ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.9+519.853.3

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

М. И. Сумин

Рассматривается регуляризация классических условий оптимальности (КУО) в выпуклой задаче оптимального управлении для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечным фазовым ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства. Множество допустимых управлений задачи по традиции вкладывается в пространство суммируемых с квадратом функций. Однако, целевой функционал не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Получение регуляризованных КУО основано на использовании двух параметров регуляризации. Один из них "отвечает" за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи. Основное предназначение регуляризованных принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина — устойчивое генерирование минимизирующих приближенных решений в смысле Дж. Варги. Регуляризованные КУО: 1) формулируются как теоремы существования в исходной задаче минимизирующих приближенных решений с одновременным конструктивным представлением их конкретных представителей; 2) выражаются в терминах регулярных классических функций Лагранжа и Гамильтона — Понтрягина; 3) являются секвенциальными обобщениями своих классических аналогов и сохраняют их общую структуру; 4) "преодолевают" свойства некорректности КУО и являются регуляризирующими алгоритмами для решения оптимизационных задач.

Ключевые слова: выпуклое оптимальное управление, выпуклое программирование, минимизирующая последовательность, регуляризирующий алгоритм, принцип Лагранжа, принцип максимума Понтрягина, двойственная регуляризация.

M. I. Sumin. On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems.

We consider a regularization of the classical optimality conditions (COCs) in a convex optimal control problem for a linear system of ordinary differential equations with a pointwise state equality constraint and a finite number of functional constraints in the form of equalities and inequalities. The set of admissible controls of the problem is traditionally embedded in the space of square integrable functions. However, the objective functional is not, generally speaking, strongly convex. The proof of regularized COCs is based on the use of two regularization parameters. One of them is "responsible" for the regularization of the dual problem, while the other is contained in a strongly convex regularizing addition to the objective functional of the original problem. The main purpose of the regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is the stable generation of minimizing approximate solutions in the sense of J. Warga. The regularized COCs: (1) are formulated as theorems on the existence of minimizing approximate solutions in the original problem with the simultaneous constructive presentation of their specific representatives; (2) are expressed in terms of regular classical Lagrange and Hamilton–Pontryagin functions; (3) are sequential generalizations of their classical counterparts and retain their general structure; (4) "overcome" the properties of ill-posedness of COCs and are regularizing algorithms for optimization problems.

Keywords: convex optimal control, convex programming, minimizing sequence, regularizing algorithm, Lagrange principle, Pontryagin maximum principle, dual regularization.

MSC: 49K15, 49N15, 47A52

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-252-269

Введение

Работа посвящена регуляризации принципа Лагранжа (ПЛ) и принципа максимума Понтрягина (ПМП) в выпуклой задаче оптимального управления для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с поточечным фазовым ограничением типа равенства и

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-07-00782_а, 20-01-00199_а и проект 20-52-00030 Бел_а).

конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства. Множество допустимых управлений задачи по традиции вкладывается в пространство суммируемых с квадратом функций, но целевой функционал при этом не является, вообще говоря, сильно выпуклым. Основное предназначение доказываемых в работе регуляризованных классических условий оптимальности (КУО) — устойчивое генерирование минимизирующих последовтельностей — минимизирующих приближенных решений (МПР) в смысле Дж. Варги (см. [1, гл. III]) в рассматриваемой задаче для целей ее непосредственного практического устойчивого решения. Заметим здесь же, что в теории математического программирования такие обобщенные минимизирующие последовательности известны также под названием обобщенных планов (см. [2]). Подчеркнем, что широко используемое в оптимальном управлении понятие МПР органично сочетает в себе учет как запросов строгой математической оптимизационной теории (см. [1, гл. IV–VIII; 2]), так и потребностей инженерной практики, предполагающей неизбежное наличие у приближенных решений ненулевых зазоров и при выполнении ограничений задачи, и при приближении значений функционала цели к ее (обобщенной) нижней грани (см. [1, гл. III]).

Регуляризованные КУО формулируются в данной работе как полностью сохраняющие "структуру" КУО теоремы существования МПР с одновременным конструктивным представлением их конкретных представителей. Их утверждения естественно трактовать так же, как регуляризирующие алгоритмы для решения рассматриваемой задачи оптимального управления. Соответствующее понятие так называемого МПР-образующего алгоритма для ее решения определяется ниже в разд. 1. Первые результаты по регуляризация КУО в задачах условной выпуклой оптимизации в гильбертовых пространствах были получены в работах [3; 4]. В их основе лежат методы двойственной регуляризации (см. [5]). Естественную потребность в такой регуляризации можно связать, по крайней мере, с двумя следующими обстоятельствами.

1. Прежде всего, несмотря на очевидную важность умения решать те или иные задачи условной оптимизации, возникающие при исследованиях как теоретического, так и прикладного характера, возможности непосредственного применения КУО для этой цели существенно ограничиваются свойствами некорректности последних (см. [4; 6]). Здесь в первую очередь мы имеем ввиду такое свойство некорректности КУО, как их неустойчивость по возмущению исходных данных оптимизационных задач (связанные с этим подробности, соответствующие примеры неустойчивости, а также другие примеры некорректности КУО можно найти в [4;6]). В частности, неустойчивость КУО неизбежно проявляется в задачах бесконечномерной условной оптимизации, возникающих при исследовании широкого спектра обратных задач современного естествознания. Обсуждение автором этого вопроса можно найти в работе 2019 г. (Сумин М.И. Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 1. С. 279–296).

2. Кроме того, можно в данном контексте указать и на то, что во многих важных задачах условной бесконечномерной оптимизации с операторными ограничениями (т. е. с ограничениями, задаваемыми операторами с бесконечномерными образами) возникают трудности принципиального характера при получении самих КУО. В частности, это относится к задачам оптимального управления с фазовыми ограничениями-равенствами, возникающим опять же при исследовании обратных задач (см., например, вышеуказанную работу автора 2019 г.). Получение КУО в задачах с такими ограничениями, относящимися к классу так называемых нерегулярных смешанных ограничений (см., например, [7; 8]), как справедливо замечено в [7, с. 92], чрезвычайно сложно. Такое сложное фазовое ограничение-равенство содержит и рассматриваемая ниже задача оптимального управления.

Регуляризация КУО имеет самое непосредственное отношение к указанным выше двум группам вопросов, связанных как с неустойчивостью (и некорректностью) самих КУО, так и с трудностями их формального доказательства. И в том, и в другом случае регуляризованные КУО устойчиво генерируют МПР в исходной оптимизационной задаче, а сами КУО "заменяются" их секвенциальными обобщениями, являясь "предельными вариантами" этих МПР.

Другими словами, можно говорить в обоих случаях о трансформации КУО в устойчивые к ошибкам исходных данных инструменты для решения задач условной оптимизации.

Регуляризация КУО в выпуклых задачах оптимального управления с не сильно выпуклыми целевыми функционалами рассматривалась ранее в работах [6; 9]. Аналогичные результаты, но для задач оптимального управления с сильно выпуклыми целевыми функционалами были получены в [10]. Отличие результатов [6; 9] и [10] кратко можно описать следующим образом. Во-первых, как в том, так и в другом случае МПР конструируется из точек минимума функции Лагранжа задачи, соответствующих значениям двойственных переменных из некоторой последовательности, определяемой регуляризованными КУО. В случае сильно выпуклого целевого функционала сильно выпуклой по исходной переменной является и функция Лагранжа, и, как следствие однозначно и корректно определяются и элементы МПР. В отсутствие же сильной выпуклости при ограниченном множестве допустимых элементов гарантируется лишь существование элемента МПР в соответствующем множестве минималей функции Лагранжа. Таким образом, генерирование МПР в силу регуляризованных КУО в такой ситуации в существенной степени теряет свою конструктивность. В настоящей работе для преодоления этого недостатка регуляризованных КУО (см. [6; 9]) вместо одного используются два параметра регуляризации. Один из них, как и в [6; 9; 10], "отвечает" за регуляризацию двойственной задачи, другой же содержится в сильно выпуклом регуляризирующем добавке к целевому функционалу исходной задачи.

В заключение вводной части отметим, что интерес к проблемам, так или иначе связанным с вопросами регуляризации КУО, наблюдается на протяжении нескольких последних десятилетий. В частности, укажем здесь на работы самого последнего времени [11; 12] (см. также библиографию этих работ) по обоснованию так называемого SQH метода (Sequential Quadratic Hamiltonian Method) решения задач оптимального управления, представляющего собою основанную на ПМП итерационную схему, предполагающую использование числовых регуляризирующих добавков к гамильтониану задачи. Однако следует подчеркнуть, что указанный SQH метод (см. [11; 12]) нацелен на решение лишь "простейших" задач оптимального управления, т. е. задач только с геометрическими ограничениями.

1. Выпуклая задача оптимального управления с операторным и функциональными ограничениями

Рассмотрим выпуклую задачу оптимального управления с фиксированным временем, с поточечным фазовым ограничением типа равенства, понимаемым как ограничение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} \equiv L_2(X)$, и конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства

$$(\mathrm{OC}^\delta) \qquad f^\delta(u) \equiv \varphi_0^\delta(x^\delta[u](T)) \to \min, \qquad u \in \widetilde{\mathcal{D}} \subset L_2^l(0,T),$$

$$G^\delta(u)(t) \equiv \langle \Phi_1^\delta(t), x^\delta[u](t)\rangle = H_1^\delta(t) \ \text{ при п. в. } t \in X,$$

$$g_{1,i}^\delta(u) \equiv \langle \varphi_{1,i}^\delta, x^\delta[u](T)\rangle = h_{1,i}^\delta, \quad i = 1,\dots,k, \quad g_{2,i}^\delta(u) \equiv \varphi_{2,i}^\delta(x^\delta[u](T)) \le 0, \quad i = 1,\dots,m.$$

Здесь

φ_0^δ, $\varphi_{2,i}^\delta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $i = 1,\dots,m$, — выпуклые непрерывные функции;

Φ_1^δ, $H_1^\delta \in L_\infty(X)$; $\varphi_{1,i}^\delta \in \mathbb{R}^n$ $i = 1,\dots,k$; $h_1^\delta \equiv (h_{1,1}^\delta,\dots,h_{1,k}^\delta) \in \mathbb{R}^k$;

$\widetilde{\mathcal{D}} \equiv \{u \in L_2^l(0,T)\colon u(t) \in U$ при п. в. $t \in (0,T)\}$, $U \subset \mathbb{R}^l$, — выпуклый компакт;

$X \subset [0,T]$, $X = \mathrm{cl}\, \mathring{X}$, — замкнутое множество без изолированных точек с непустой внутренностью;

$x^\delta[u](t)$, $t \in [0,T]$, — решение задачи Коши

$$\dot{x} = \mathcal{A}^\delta(t)x + \mathcal{B}^\delta(t)u(t), \qquad t \in [0,T], \qquad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

с измеримыми по Лебегу ограниченными матрицами $\mathcal{A}^\delta\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathcal{B}^\delta\colon [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times l}$. Верхний индекс δ в исходных данных задачи (ОС$^\delta$) означает, что они либо заданы точно ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), т. е. задаются с ошибкой, величину которой и характеризует параметр $\delta \in [0,\delta_0]$, $\delta_0 > 0$, — некоторое фиксированное число[2]. Обозначаем через u^0 оптимальные элементы в задаче (ОС^0) в случае их существования. Всю совокупность оптимальных элементов в этом случае обозначаем через U^0.

Будем считать, что выполняются следующие оценки для отклонений возмущенных исходных данных задачи от точных:

$$\begin{gathered}\|\Phi_1^\delta - \Phi_1^0\|_{\infty,X} \le C\delta, \quad \|H_1^\delta - H_1^0\|_{\infty,X} \le C\delta,\\ |\varphi_{1,i}^\delta - \varphi_{1,i}^0| \le C\delta, \quad |h_{1,i}^\delta - h_{1,i}^0| \le C\delta, \quad i = 1,\dots,k,\end{gathered} \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered}|\varphi_0^\delta(x) - \varphi_0^0(x)| \le C_M\delta, \quad |\varphi_{2,i}^\delta(x) - \varphi_{2,i}^0(x)| \le C_M\delta \ \ \forall\, x \in S_M^n, \quad i = 1,\dots,m,\\ \|\mathcal{A}^\delta - \mathcal{A}^0\|_{\infty,(0,T)} \le C\delta, \quad \|\mathcal{B}^\delta - \mathcal{B}^0\|_{\infty,(0,T)} \le C\delta,\end{gathered}$$

где постоянные $C, C_M > 0$ не зависят от δ, $S_M^n \equiv \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \le M\}$. Обозначим через f^δ произвольный набор (φ_0^δ, Φ_1^δ, H_1^δ, $\varphi_{1,i}^\delta$, $h_{1,i}^\delta$, $i = 1,\dots,k$, $\varphi_{2,i}^\delta$, $i = 1,\dots,m$, $\mathcal{A}^\delta,\mathcal{B}^\delta$) исходных данных задачи (ОС$^\delta$), удовлетворяющих оценкам (1.2).

Введем обозначения: $g_1^\delta(u) \equiv (g_{1,1}^\delta(u),\dots,g_{1,k}^\delta(u))$, $g_2^\delta(u) \equiv (g_{2,1}^\delta(u),\dots,g_{2,m}^\delta(u))$,

$$\widetilde{\mathcal{D}}^{\delta,\epsilon} \equiv \bigl\{u \in \widetilde{\mathcal{D}}\colon \|\langle\Phi_1^\delta(\cdot), x^\delta[u](\cdot)\rangle - H_1^\delta(\cdot)\|_{2,X} \le \epsilon,\ |g_1^\delta(u) - h_1^\delta| \le \epsilon,\ \min_{x\in\mathbb{R}_-^m} |g_2^\delta(u) - x| \le \epsilon\bigr\},$$

где $\mathbb{R}_-^m \equiv \{x \equiv (x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m\colon x_1 \le 0,\dots,x_m \le 0\}$, $\epsilon \ge 0$, $\widetilde{\mathcal{D}}^{0,0} \equiv \widetilde{\mathcal{D}}^0$. Ниже центральным для нас будет понятие МПР в задаче (ОС^0), т. е. последовательности $u^k \in \widetilde{\mathcal{D}}$, $k = 1,2,\dots$, такой, что $f^0(u^k) \to \beta$, $u^k \in \widetilde{\mathcal{D}}^{0,\epsilon^k}$ для некоторой последовательности положительных чисел ϵ^k, $k = 1,2,\dots$, $\epsilon^k \to 0$, $k \to \infty$. Здесь β — обобщенная нижняя грань: $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim\limits_{\epsilon\to+0} \beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf\limits_{u\in\widetilde{\mathcal{D}}^{0,\epsilon}} f^0(u)$, $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\widetilde{\mathcal{D}}^{0,\epsilon} = \varnothing$. Очевидно, $\beta \le \beta_0$, где $\beta_0 \equiv \inf\limits_{u\in\widetilde{\mathcal{D}}^0} f^0(u)$ — классическая нижняя грань. Однако, в задаче (ОС^0) в силу ее выпуклости и ограниченности $\widetilde{\mathcal{D}}$ справедливо равенство $\beta = \beta_0 = \{f^0(u^0)$, если u^0 существует; $+\infty$ в противном случае$\}$.

Введем согласованное с понятием МПР понятие МПР-образующего (регуляризирующего) оператора для задачи (ОС^0).

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\delta^k \in (0,\delta_0)$, $k = 1,2,\dots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1,2,\dots$, оператор $R(\cdot,\delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, элемент $u^{\delta^k} \in \widetilde{\mathcal{D}}$, называется МПР-*образующим* в задаче (ОС^0), если последовательность u^{δ^k}, $k = 1,2,\dots$, есть МПР в этой задаче.

З а м е ч а н и е 1. При определении МПР и МПР-образующего оператора использована метрика $L_2(X)$. Однако ввиду компактности в $C(X)$ множества $\{x[u](\cdot)\colon u \in \widetilde{\mathcal{D}}\}$ в этих определениях можно было бы вместо нее использовать и метрику $L_p(X)$ с любым $p \in [1,+\infty]$, $p \ne 2$. Это объясняется тем, что в силу указанной компактности любое МПР в задаче (ОС^0) в смысле введенного выше определения является таковым же и в случае, когда в нем используется показатель $p \in [1,+\infty]$, $p \ne 2$ вместо $p = 2$.

Перепишем задачу (ОС$^\delta$) в более компактной форме

$$(\text{ОС}^\delta) \qquad f^\delta(u) \to \min, \quad u \in \widetilde{\mathcal{D}},$$

[2]Здесь и ниже $L_p^l(X)$, $L_p^1(X) \equiv L_p(X)$, — пространство суммируемых со степенью $1 \le p < \infty$ (измеримых существенно ограниченных в случае $p = \infty$) на множестве X функций $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^l$ с нормой $\|\varphi\|_{p,X}$, $\mathbb{R}^{n\times l}$ — пространство $(n \times l)$-матриц.

$$\widetilde{g}_1^\delta(u) \equiv (G^\delta(u), g_{1,1}^\delta(u), \ldots, g_{1,k}^\delta(u)) = \overline{h}^\delta, \quad g_2^\delta(u) \equiv (g_{2,1}^\delta(u), \ldots, g_{2,m}^\delta(u)) \leq 0,$$

где $\overline{h}^\delta \equiv (H_1^\delta, h_{1,1}^\delta, \ldots, h_{1,k}^\delta) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k$, а затем и в эквивалентной форме задачи выпуклого программирования

$$(\widetilde{\mathrm{P}}^\delta) \qquad f^\delta(u) \to \min, \quad A^\delta u = h^\delta, \quad g^\delta(u) \leq 0, \quad u \in \widetilde{\mathcal{D}}.$$

Здесь

$A^\delta \colon L_2^l(0,T) \to L_2(X) \times \mathbb{R}^k \equiv H$ — линейный ограниченный оператор, задаваемый равенством $A^\delta u \equiv (\langle \Phi_1^\delta(\cdot), x_0^\delta[u](\cdot)\rangle, \langle \varphi_{1,1}^\delta, x_0^\delta[u](T)\rangle, \ldots, \langle \varphi_{1,k}^\delta, x_0^\delta[u](T)\rangle)$;

$x_0^\delta[u]$ — решение задачи Коши с однородным начальным условием

$$\dot{x} = \mathcal{A}^\delta(t)x + \mathcal{B}^\delta(t)u(t), \quad x(0) = 0 \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [0,T];$$

$g^\delta(u) \equiv g_2^\delta(u)$; $h^\delta \equiv \overline{h}^\delta - \widetilde{h}^\delta$; $\widetilde{h}^\delta \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k$ — элемент, задаваемый равенством

$$\widetilde{h}^\delta \equiv (\langle \Phi_1^\delta(\cdot), x^\delta[0](\cdot)\rangle, \langle \varphi_{1,1}^\delta, x^\delta[0](T)\rangle, \ldots, \langle \varphi_{1,k}^\delta, x^\delta[0](T)\rangle).$$

Запишем оценки для отклонений исходных данных возмущенной задачи $(\widetilde{\mathrm{P}}^\delta)$ $(\delta > 0)$ от соответствующих исходных данных невозмущенной задачи $(\delta = 0)$. С помощью хорошо известных стандартных средств легко показать, что справедливы оценки

$$\|x^\delta[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leq C_1(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \quad \|x_0^\delta[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leq C_2\|u\|_{2,(0,T)},$$

$$\|x^\delta[u] - x^0[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leq C_3\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}), \quad \|x_0^\delta[u] - x_0^0[u]\|_{[0,T]}^{(0)} \leq C_4\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}),$$

в которых постоянные $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ не зависят ни от матриц $\mathcal{A}^\delta$, $\mathcal{B}^\delta$, удовлетворяющих оценкам (1.2), ни от δ, ни от $u \in L_2^l(0,T)$, $\|x\|_{[0,T]}^{(0)} \equiv \|x\|_{C[0,T]}$. В свою очередь, эти оценки в совокупности с оценками (1.2) отклонения возмущенных исходных данных от точных для задачи (OC^δ) приводят к искомым оценкам отклонения исходных данных возмущенной задачи $(\widetilde{\mathrm{P}}^\delta)$ от соответствующих исходных данных точной задачи

$$|f^\delta(u) - f^0(u)| \leq C_5\delta, \quad |g^\delta(u) - g^0(u)| \leq C_6\delta \quad \forall u \in \widetilde{\mathcal{D}}, \tag{1.3}$$

$$\|A^\delta u - A^0 u\| \leq C_7\delta(1 + \|u\|_{2,(0,T)}) \ \ \forall u \in L_2^l(0,T), \quad \|h^\delta - h^0\| \leq C_8\delta,$$

где постоянные C_5, C_6, C_7, $C_8 > 0$ также не зависят ни от набора f^δ, удовлетворяющего оценкам (1.2), ни от $\delta \in (0, \delta_0]$.

2. Задача выпуклого программирования

Основной нашей целью, как уже было сказано выше, является доказательство регуляризованных ПЛ и ПМП в задаче оптимального управления (OC^0) с выпуклым (и, вообще говоря, не сильно выпуклым) функционалом качества в случае ограниченного множества $\mathcal{D}$. Будем опираться для достижения указанной цели на результаты статьи [4], в которой рассматривалась регуляризация ПЛ или, другими словами, теоремы Куна — Таккера для задачи выпуклого программирования в предположении сильной выпуклости целевого функционала (как точного, так и возмущенного).

Перепишем задачу $(\widetilde{\mathrm{P}}^\delta)$ в обозначениях [4]. Отметим сразу, что в отличие от [4] будем иметь дело здесь с задачей без параметров в ограничениях, т. е. в задаче $(\mathrm{P}_{p,r})$ из [4] надо формально положить $p = 0$, $r = 0$. Таким образом, вместо задачи $(\widetilde{\mathrm{P}}^\delta)$ будем непосредственно рассматривать задачу с ограниченным допустимым множеством $\mathcal{D}$

$$(\mathrm{P}^\delta) \qquad f^\delta(z) \to \min, \quad A^\delta z = h^\delta, \quad g_i^\delta(z) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

которая совпадает с задачей $(\widetilde{\mathrm{P}}^\delta)$, если мы формально полагаем:

$Z = L_2^l(0,T)$; $z = u$; $H = L_2(X) \times \mathbb{R}^k$;

$\mathcal{D} = \widetilde{\mathcal{D}} \equiv \{u \in L_2^l(0,T)\colon u(t) \in U$ при п.в. $t \in (0,T)\}$;

$f^\delta(u) \equiv \varphi_0^\delta(x^\delta[u](T))$;

$A^\delta u \equiv (\langle \Phi_1^\delta(\cdot), x_0^\delta[u](\cdot)\rangle, \langle \varphi_{1,1}^\delta, x_0^\delta[u](T)\rangle, \dots, \langle \varphi_{1,k}^\delta, x_0^\delta[u](T)\rangle)$;

$g^\delta(u) \equiv g_2^\delta(u)$; $h^\delta \equiv \overline{h}^\delta - \widetilde{h}^\delta$.

Ее решения в случае их существования обозначаем через z^0, а множество всех таких решений — через Z^0.

Для этой задачи, как и в [4], можем записать в силу локальной липшицевости функций φ_0^δ, $\varphi_{2,i}^\delta\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ и стандартных оценок для отклонений решений задачи Коши (1.1)

$$|f^\delta(z_1) - f^\delta(z_2)| \le L_M \|z_1 - z_2\|, \quad |g^\delta(z_1) - g^\delta(z_2)| \le L_M \|z_1 - z_2\| \quad \forall\, z_1,\, z_2 \in \mathcal{D} \cap S_M,$$

где $L_M > 0$ — независящая от δ постоянная, $S_M \equiv \{z \in Z\colon \|z\| \le M\}$, а также в силу (1.3) оценки для отклонений возмущенных исходных данных от точных

$$\begin{aligned} &|f^\delta(z) - f^0(z)| \le C\delta(1 + \|z\|^2), && \|A^\delta z - A^0 z\| \le C\delta(1 + \|z\|), \\ &|g^\delta(z) - g^0(z)| \le C\delta(1 + \|z\|^2) \ \ \forall z \in \mathcal{D}, && \|h^\delta - h^0\| \le C\delta, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $C > 0$ не зависит от δ. Здесь мы сохраняем оценки для отклонений в таком виде, как они даны в [4], хотя в силу ограниченности $\mathcal{D}$ сомножители $(1 + \|z\|)$ в правых частях неравенств могут быть формально удалены (см. (1.3)).

Как и в [4], используем обозначения $L^\delta(z, \lambda, \mu) \equiv f^\delta(z) + \langle \lambda, A^\delta z - h^\delta\rangle + \langle \mu, g^\delta(z)\rangle$, $\mathcal{D}^{\delta,\epsilon} \equiv \{z \in \mathcal{D}\colon \|A^\delta z - h^\delta\| \le \epsilon,\ g_i^\delta(z) \le \epsilon,\ i = 1, \dots, m\}$, $\epsilon \ge 0$, $\mathcal{D}^{0,0} \equiv \mathcal{D}^0$, а под МПР понимаем последовательность $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \dots$, если $f^0(z^k) \to \beta$, $z^k \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^k}$, для некоторой последовательности положительных чисел ϵ^k, $k = 1, 2, \dots$, $\epsilon^k \to 0$, $k \to \infty$, где обобщенная нижняя грань $\beta \equiv \beta_{+0} \equiv \lim\limits_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon$, $\beta_\epsilon \equiv \inf\limits_{z \in \mathcal{D}^{0,\epsilon}} f^0(z)$, $\beta_\epsilon \equiv +\infty$, если $\mathcal{D}^{0,\epsilon} = \varnothing$. Как и в случае задачи (OC^δ), здесь в силу ограниченности $\mathcal{D}$ имеет место равенство $\beta = \beta_0 \equiv \inf\limits_{z \in \mathcal{D}^0} f^0(z)$.

Введем далее, следуя традиции теории некорректных задач, понятие регуляризирующего алгоритма в задаче условной оптимизации (P^0). Предположим, что обобщенная нижняя грань β задачи (P^0) удовлетворяет строгому неравенству $\beta < +\infty$.

О п р е д е л е н и е 2. Зависящий от параметра $\delta \in (0, \delta_0)$, оператор $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\delta)$, ставящий в соответствие каждой четверке исходных данных f^δ, A^δ, h^δ, g^δ, удовлетворяющих оценкам (2.1), элемент $R(f^\delta,\, A^\delta,\, h^\delta,\, g^\delta,\, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$ такой, что $f^0(z^\delta) \to \beta$, $\|A^0 z^\delta - h^0\| \to 0$, $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^m_-} |g^0(z^\delta) - x| \to 0$, $\delta \to 0$, называется *регуляризирующим* в задаче (P^0).

З а м е ч а н и е 2. Определения регуляризирующих алгоритмов для задач математического программирования с конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенства можно найти, например, в [13, гл. 9]. Эти определения даны в случае задач первого типа (т. е. задач, в которых ищется только нижняя грань, см. [13, гл. 9, с. 802]) и второго типа (т. е. задач, в которых ищется и нижняя грань, и оптимальный элемент, см. [13, гл. 9, с. 837]). С формальной точки зрения данное выше определение 2 занимает промежуточное положение между двумя указанными выше определениями (см. [13, гл. 9]). В отличие от определения [13, гл. 9, с. 802] в определении 2 речь идет не только о приближении к нижней грани задачи, но и параллельно о выполнении "в пределе" ее ограничений с одновременным представлением "сходящихся" при $\delta \to 0$, как по функции, так и по "ограничениям" элементов $R(f^\delta,\, A^\delta,\, h^\delta,\, g^\delta,\, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$. В то же время в отличие от определения [13, гл. 9, с. 837] в определении 2 не идет речь о какой-либо сходимости (сильной, слабой) при $\delta \to 0$ самих элементов семейства $R(f^\delta,\, A^\delta,\, h^\delta,\, g^\delta,\, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$ к какому-либо конкретному элементу, например, к точному решению задачи (P^0) в случае существования последнего. Такая сходимость (сильная, слабая) является уже следствием, как того факта, что элементы $R(f^\delta,\, A^\delta,\, h^\delta,\, g^\delta,\, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$

при $\delta \to 0$ сходятся одновременно и по функции, и по “ограничениям”, так и дополнительных свойств исходных данных задачи.

Так как основной целью работы является построение МПР в задаче (ОС^0), а семейство $\{z^\delta \in \mathcal{D}\colon \delta \in (0, \delta_0]\}$ из определения 2 не является последовательностью, то помимо введенного выше определения регуляризирующего оператора в задаче (P^0) введем его “след” — определение МПР-образующего оператора в задаче (P^0) (см. аналогичное определение 1).

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \ldots$, оператор $R(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(f^{\delta^k}, A^{\delta^k}, h^{\delta^k}, g^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (2.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $z^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется МПР-*образующим* в задаче (P^0), если последовательность z^{δ^k}, $k = 1, 2, \ldots$, есть МПР в этой задаче.

2.1. Двойственная регуляризация в задаче выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом цели

Предполагаем в данном разделе, что функции f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, в задаче (P$^\delta$) являются сильно выпуклыми на $\mathcal{D}$ с постоянной сильной выпуклости κ, которая не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$, а задача (P^0) имеет решение, которое обозначается через z^0. Обозначим, как и в [4], через $(\lambda^{\delta,\alpha}, \mu^{\delta,\alpha})$ единственную в $H \times \mathbb{R}^m_+$ точку, дающую на этом множестве максимум сильно вогнутому функционалу

$$R^{\delta,\alpha}(\lambda, \mu) \equiv V^\delta(\lambda, \mu) - \alpha\|\lambda\|^2 - \alpha|\mu|^2, \quad (\lambda, \mu) \in H \times \mathbb{R}^m_+.$$

Подчеркнем, что в данной работе в отличие от [4] мы рассматриваем, во-первых, непараметрическую задачу (P^0) (т. е. задачу, не содержащую параметры в ограничениях), у которой, во-вторых, множество $\mathcal{D}$ ограничено. Здесь мы используем все те же обозначения, что и в [4], но пара (p, r) при этом из всех обозначений [4] удаляется.

Пусть выполняется условие согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \quad \alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{2.2}$$

Как и в [4], используем обозначение $z^\delta[\lambda, \mu] \equiv \operatorname{argmin}\{L^\delta(z, \lambda, \mu),\ z \in \mathcal{D}\}$ для минималей функций Лагранжа, из которых в конечном итоге и конструируется МПР в задаче. Напомним, что в [4] (без предположения ограниченности $\mathcal{D}$) при условии независимости постоянной сильной выпуклости κ от δ было показано (см. [4, неравенство (3.25)]), что

$$\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\| \le L, \tag{2.3}$$

где постоянная $L > 0$ не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$, но зависит, вообще говоря, от κ. Указанная постоянная L была использована затем в формулировке теоремы сходимости метода двойственной регуляризации (см. [4, теорема 3.1]). При получении этой оценки использовалась, в частности, доказанная в [4, (3.17)], оценка

$$f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\, \mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \ge K, \tag{2.4}$$

где постоянная K также не зависит от $\delta \in [0, \delta_0]$, но зависит, вообще говоря, от κ. Так как в данной работе множество $\mathcal{D}$ ограничено, то первая из этих оценок выполняется автоматически, например с $L = \sup_{z \in \mathcal{D}} \|z\|$, а вторая выполняется в силу первой из оценок (2.1) и того факта, что непрерывная выпуклая функция на ограниченном замкнутом выпуклом множестве гильбертова пространства достигает минимума. Данное обстоятельство позволяет нам воспользоваться теми результатами из [4], которые были получены с использованием указанных выше двух оценок. Сохраним ниже обозначения L и K для постоянных из этих двух оценок.

С учетом сказанного мы можем применить в данной работе теорему сходимости метода двойственной регуляризации из [4, теорема 3.1] для задачи (P^0). Но прежде чем сформулировать здесь нужную нам часть этой теоремы, приведем следующие оценки из [4], являющиеся основными при ее доказательстве. Во-первых, это оценка (3.23) (постоянная C в ней — это постоянная из (2.1))

$$f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])$$
$$\le f^0(z^0)+C\delta(1+\|z^0\|^2)+C\delta\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|(2+\|z^0\|)+C\delta|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|(1+\|z^0\|^2)\equiv f^0(z^0)+\psi(\delta). \quad (2.5)$$

Она является следствием неравенств, во втором из которых используются оценки (2.1),

$$L^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}],\,\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)})\le L^\delta(z^0,\,\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)})$$
$$\le f^0(z^0)+[f^\delta(z^0)-f^0(z^0)]+\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|\,\|A^\delta z^0-h^\delta\|+|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|\,|g^\delta(z^0)-g^0(z^0)|$$
$$\le f^0(z^0)+C\delta(1+\|z^0\|^2)+C\delta\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|(2+\|z^0\|)+C\delta|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|(1+\|z^0\|^2), \quad (2.6)$$

учитывая [4, неравенство (3.14)])

$$\big\langle(A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-h^\delta,\,g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])),(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)})\big\rangle\ge 0. \quad (2.7)$$

Во вторых, это оценка из [4, (3.18)]

$$\alpha(\delta)\sqrt{\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2+|\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|^2}\le C_2\delta+\sqrt{C_2^2\delta^2-8\,\alpha(\delta)\,K(\delta)}\equiv\phi(\delta,\alpha(\delta)), \quad (2.8)$$

где $C_2=\sqrt{2}\,C_1(1+\|z^0\|^2)$ (см. [4, (3.16)]), $C_1=3/2\,C$ (см. (3.15) там же) и, кроме того, с $K(\delta)\equiv f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])-f^0(z^0)-C\delta(1+\|z^0\|^2)$.

Наконец, в третьих, это оценки из [4, (3.20)]

$$\begin{gathered}\|A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-h^\delta\|\le\phi(\delta,\alpha(\delta))\to 0,\\ g_i^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])\le\phi(\delta,\alpha(\delta)),\quad \phi(\delta,\alpha(\delta))\to 0,\quad \delta\to 0,\quad i=1,\dots,m.\end{gathered} \quad (2.9)$$

Применение оценок (2.3), (2.4) в совокупности с оценками (2.1) в (2.5), (2.8), (2.9) приводит к следующим результатам ($\psi(\delta)$ определено в (2.5), $\phi(\delta,\alpha(\delta))$ — в (2.8))

$$\|A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-h^0\|$$
$$\le\|A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-h^\delta\|+\|A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\,\|+\|h^0-h^\delta\|$$
$$\le\|A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]-h^\delta\|+C\delta(1+\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\,\|\,)+C\delta\le\phi(\delta,\alpha(\delta))+C\delta(2+L), \quad (2.10)$$

$$g_i^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])$$
$$\le g_i^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])+g_i^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])-g_i^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])$$
$$\le g_i^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])+C\delta(1+\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\,\|^2)\le\phi(\delta,\alpha(\delta))+C\delta(1+L^2), \quad (2.11)$$

$$f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}])$$
$$\le f^0(z^0)+\psi(\delta)+f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\,)-f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\,)$$
$$\le f^0(z^0)+\psi(\delta)+C\delta(1+\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\,\|^2)\le f^0(z^0)+\psi(\delta)+C\delta(1+L^2). \quad (2.12)$$

Кроме того, оценивая величину $\phi(\delta,\alpha(\delta))$, имеем (напомним, что $C_2=C\,(3\sqrt{2}/2)(1+\|z^0\|^2)$)

$$\phi(\delta,\alpha(\delta))\equiv C_2\delta+\sqrt{C_2^2\delta^2-8\,\alpha(\delta)\,K(\delta)}$$

$$\equiv C_2\delta+\sqrt{C_2^2\delta^2-8\,\alpha(\delta)(f^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]\,)-f^0(z^0)-C\delta(1+\|z^0\|^2))}$$

$$\leq C_2\delta + \sqrt{C_2^2\delta^2 - 8\,\alpha(\delta)(K - f^0(z^0) - C\delta(1+\|z^0\|^2))}, \tag{2.13}$$

$$\alpha(\delta)\sqrt{\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}\|^2 + |\mu^{\delta,\alpha(\delta)}|^2} \leq C_2\delta + \sqrt{C_2^2\delta^2 - 8\,\alpha(\delta)(K - f^0(z^0) - C\delta(1+\|z^0\|^2))}. \tag{2.14}$$

Как результат полученных оценок можем сформулировать теорему сходимости метода двойственной регуляризации в задаче (P^0), являющуюся следом из [4, теорема 3.1] (в данной работе нам нужны не все утверждения этой теоремы)

Теорема 1 (Регуляризирующий двойственный алгоритм). *Пусть задача* (P^0) *имеет решение* z^0. *Вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная к* (P^0) *задача, при выполнении условия согласования* (2.2) *выполняются соотношения*:

$$f^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leq f^0(z^0) + \psi_1(\delta), \quad \psi_1(\delta) \equiv \psi(\delta) + C\delta(1+L^2) \to 0, \quad \delta \to 0; \tag{2.15}$$

$$\|A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^0\| \leq \phi(\delta,\alpha(\delta)) + C\delta(2+L) \to 0; \tag{2.16}$$

$$g_i^0(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]) \leq \phi(\delta,\alpha(\delta)) + C\delta(1+L^2) \to 0; \tag{2.17}$$

$$\big\langle(\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}),(A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - h^\delta,\, g^\delta(z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]))\big\rangle \to 0, \quad \delta \to 0, \tag{2.18}$$

где C *— независящая от* δ *постоянная* (*см. формулу* (2.1)), *величина* L *определена в* (2.3), *а величины* $\psi(\delta)$, $\phi(\delta,\alpha(\delta))$ *определены в* (2.5), (2.8), *соответственно.*

Если же сильно выпуклый функционал f^0 *является и субдифференцируемым* (*в смысле выпуклого анализа*) *в точках* $\mathcal{D}$, *то справедливо и предельное соотношение*

$$\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}] - z^0\| \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{2.19}$$

Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет двойственная задача, алгоритм, задаваемый равенством $R(f^\delta,\,A^\delta,\,h^\delta,\,g^\delta,\,\delta) = z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$, *является регуляризирующим в смысле определения* 2, *причем в случае субдифференцируемости* f^0 *в точках* $\mathcal{D}$ *имеет место и сильная сходимость* (2.19). *Если же такой субдифференцируемости нет, то можно говорить лишь о слабой сходимости* $z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta)}]$ *к* z^0 *при* $\delta \to 0$.

З а м е ч а н и е 3. В формулировке теоремы 3.1 в [4] были пропущены полученные при ее доказательстве слагаемые: $\psi(\delta)$ (см. [4, неравенства (3.23), (3.26)]) — в выражении для $\psi_1(\delta)$ в формуле, соответствующей (2.15); $C\delta(2+L)$ — в правой части неравенства, соответствующего (2.16); $C\delta(1+L^2)$ — в правой части неравенства, соответствующего (2.17). В приводимой здесь формулировке все указанные слагаемые восстановлены.

2.2. Двойственная регуляризация в задаче выпуклого программирования с выпуклым функционалом цели

В предыдущем разделе была описана процедура двойственной регуляризации в задаче выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалом качества и получены оценки сходимости этой процедуры по функции и по ограничениям. В настоящем разделе мы покажем, как эти оценки могут быть применены к задаче выпуклого программирования с выпуклым функционалом качества, который не обязательно является сильно выпуклым. А именно, мы организуем процесс двойственной регуляризации с помощью двух регуляризирующих добавков, один из которых находится, как и ранее, в двойственной задаче, а другой — в функционале качества.

Итак, рассматриваем сформулированную в начале разд. 2 задачу (P^0), функционал $f^0 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ которой является выпуклым на выпуклом замкнутом ограниченном множестве $\mathcal{D}$; точнее, выпуклыми являются как точный функционал f^0, так и его возмущение f^δ. Пусть решение задачи (P^0) существует, т. е. $Z^0 \neq \varnothing$. Далее будем обозначать через z^0 одно конкретное из решений задачи (P^0), а именно, ее нормальное, т. е. минимальное по норме, решение.

Рассмотрим формально семейство регуляризованных задач

$$(\mathrm{P}^\delta_\varepsilon) \qquad f^\delta(z)+\varepsilon\|z\|^2\to\min,\quad A^\delta z=h^\delta,\quad g^\delta_i(z)\le 0,\quad i=1,\dots,m,\quad z\in\mathcal{D}\subset Z,$$

решения которых z^δ_ε при $\varepsilon>0$, $\delta>0$ могут и не существовать, $z^0_0\equiv z^0$. Очевидно, в каждой из задач $(\mathrm{P}^\delta_\varepsilon)$ с $\varepsilon>0$ функционал качества $f^\delta(\cdot)+\varepsilon\|\cdot\|^2$ является непрерывным и сильно выпуклым на $\mathcal{D}$ с постоянной сильной выпуклости $\varepsilon>0$.

Как известно из результатов обычной теории тихоновской стабилизации (см. [13, § 4, теорема 4]), в этом случае имеет место предельное соотношение $z^0_\varepsilon\to z^0$, $\varepsilon\to 0$, где, как уже определено выше, $z^0\in Z^0$ — нормальное решение исходной задачи (P^0).

Введем регулярный функционал Лагранжа

$$L^{\delta,\varepsilon}(z,\lambda,\mu)\equiv f^\delta(z)+\varepsilon\|z\|^2+\langle\lambda,\,A^\delta z-h^\delta\rangle+\langle\mu,\,g^\delta(z)\rangle,\quad z\in\mathcal{D},\quad \lambda\in H,\quad \mu\in\mathbb{R}^m_+,$$

вогнутый функционал значений — двойственный функционал

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu)\equiv\inf_{z\in\mathcal{D}}L^{\delta,\varepsilon}(z,\lambda,\mu),\quad \lambda\in H,\quad \mu\in\mathbb{R}^m,\quad V^{\delta,0}(\lambda,\mu)\equiv V^\delta(\lambda,\mu)$$

и двойственную задачу

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu)\to\sup,\quad (\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+.$$

Пусть $z^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]\equiv\operatorname{argmin}\{L^{\delta,\varepsilon}(z,\lambda,\mu),\ z\in\mathcal{D}\}$ при условии, что $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $\varepsilon>0$, $\delta\ge 0$. Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon})\in H\times\mathbb{R}^m_+$ решение регуляризованной двойственной задачи $V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu)-\alpha(\delta)\|(\lambda,\mu)\|^2\to\max$, $(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+$ с условием согласования (2.2).

Сформулированные условия в силу оценок (2.10)–(2.12) позволяют записать

$$\|A^0z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\,\varepsilon},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta),\,\varepsilon}]-h^0-p\|\le\phi(\delta,\alpha(\delta),\varepsilon)+C\delta(2+L),\tag{2.20}$$

$$g^0_i(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}])\le\phi(\delta,\alpha(\delta),\varepsilon)+C\delta(1+L^2),\tag{2.21}$$

$$f^0(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}])+\varepsilon\|z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\|^2\le f^0(z^0_\varepsilon)+\varepsilon\|z^0_\varepsilon\|^2+\psi(\delta,\varepsilon)+C\delta(1+L^2),\tag{2.22}$$

$$\|z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]\|\le L,\tag{2.23}$$

где (см. формулы (2.5), (2.8), (2.13), (2.14))

$$\phi(\delta,\alpha(\delta),\varepsilon)\le C_2(\varepsilon)\delta+\sqrt{(C_2(\varepsilon))^2\delta^2-8\,\alpha(\delta)(F-f^0(z^0_\varepsilon)-\varepsilon\,\|z^0_\varepsilon\|^2-C\delta(1+\|z^0_\varepsilon\|^2))},\tag{2.24}$$

$$\psi(\delta,\varepsilon)\equiv C\delta(1+\|z^0_\varepsilon\|^2)+C\delta(\|z^0_\varepsilon\|+2)\,\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\|+C\delta(1+\|z^0_\varepsilon\|^2)\,|\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}|\to 0,\quad \delta\to 0,\tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}&\alpha(\delta)\sqrt{\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\|^2+|\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}|^2}\\ &\le C_2(\varepsilon)\delta+\sqrt{(C_2(\varepsilon))^2\delta^2-8\,\alpha(\delta)(F-f^0(z^0_\varepsilon)-\varepsilon\,\|z^0_\varepsilon\|^2-C\delta(1+\|z^0_\varepsilon\|^2))},\end{aligned}\tag{2.26}$$

и в силу ограниченности $\mathcal{D}$ можно считать, что существует такое не зависящее от δ, ε число F, для которого выполняется неравенство (вместо неравенства (2.4))

$$f^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\,\alpha(\delta),\,\varepsilon},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}])+\varepsilon\,\|z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]\,\|^2\ge F.$$

Здесь постоянная $C>0$ берется, как и выше, из (2.1) и не зависит от δ,

$$C_2(\varepsilon)=C(3\sqrt{2}/2)(1+\|z^0_\varepsilon\|^2).$$

Полученные оценки (2.20)–(2.22) в совокупности с оценкой (2.24), равенством (2.25) и оценкой (2.26), а также с учетом условия согласования (2.2) и предельного соотношения $z^0_\varepsilon\to z^0$, $\varepsilon\to 0$, где z^0 — нормальное решение исходной задачи (P^0), позволяют записать

$$\begin{gathered}A^0z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}]-h^0\to 0,\ g^0_i(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}])\le\varphi(\delta,\varepsilon)\to 0,\ i=\overline{1,m},\\ f^0(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\,\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}])\le f^0(z^0)+\varphi_1(\delta,\,\varepsilon),\quad \varphi_1(\delta,\varepsilon)\to 0,\quad \delta\to 0,\quad \varepsilon\to 0,\end{gathered}\tag{2.27}$$

$$\alpha(\delta)\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\| \to 0, \quad \alpha(\delta)\|\mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}\| \to 0, \quad \delta \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.28}$$

Откуда следует, что любая последовательность $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k},\, \mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}]$ с $\delta^k \ge 0$, $\delta^k \to 0$, $\varepsilon^k > 0$, $\varepsilon^k \to 0$, $k \to \infty$ представляет собою МПР в рассматриваемой задаче (P^0), все слабые предельные точки которой (они заведомо существуют в силу ограниченности $\mathcal{D}$) являются ее решениями.

Итак, в настоящем разделе построено МПР в задаче (P^0) или, другими словами, доказана теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие согласования* (2.2), $\delta^k \in (0,\delta_0)$, ε^k, $k = 1, 2, \dots,$ — *последовательности сходящихся к нулю положительных чисел. Оператор* $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\delta^k)$, *ставящий в соответствие любому набору исходных данных* $\{f^{\delta^k},\, A^{\delta^k},\, h^{\delta^k},\, g^{\delta^k}\}$, *удовлетворяющих оценкам* (2.1) *при* $\delta = \delta^k$, *элемент* $R(f^{\delta^k}, A^{\delta^k}, h^{\delta^k}, g^{\delta^k}, \delta^k) \equiv z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}, \mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}]$, *является* МПР-*образующим в смысле определения* 3.

Данное обстоятельство позволит нам сформулировать и доказать в терминах МПР в следующем разделе регуляризованный ПЛ для задачи (P^0), являющийся одновременно регуляризирующим алгоритмом в задаче в смысле определения 3.

З а м е ч а н и е 4. При каждом фиксированном ε задача $(\mathrm{P}^0_\varepsilon)$ является задачей выпуклого программирования с сильно выпуклым функционалами цели $f^\delta(\cdot) + \varepsilon\,\|\cdot\|^2$ при $\delta \in [0,\delta_0]$. Поэтому к ней могут быть применены результаты теоремы 3.1 в [4] или, другими словами, результаты теоремы 1, следствием которых, по сути дела, и явились оценки (2.20)–(2.22). Учитывая оценку (2.24) и равенство (2.25), а также условие согласования (2.2) в силу теоремы 1 можно утверждать в этой ситуации, что при дополнительном предположении субдифференцируемости f^0 на $\mathcal{D}$ справедливо предельное соотношение $z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}] \to z^0_\varepsilon$, $\delta \to 0$. Так как при этом $z^0_\varepsilon \to z^0$, $\varepsilon \to 0$, где z^0 — нормальное решение исходной задачи (P^0), то можно говорить о существовании такой зависимости $\delta = \delta(\varepsilon)$, при которой справедливо предельное соотношение $z^{\delta(\varepsilon),\varepsilon}[\lambda^\varepsilon,\, \mu^\varepsilon] \to z^0$, $\varepsilon \to 0$, где принято обозначение $(\lambda^\varepsilon,\, \mu^\varepsilon) \equiv (\lambda^{\delta(\varepsilon),\alpha(\delta(\varepsilon)),\varepsilon},\, \mu^{\delta(\varepsilon),\alpha(\delta(\varepsilon)),\varepsilon})$. При этом без ограничения общности в силу предельного соотношения (2.18) выполняется и предельное соотношение

$$\langle(\lambda^\varepsilon,\, \mu^\varepsilon), (A^{\delta(\varepsilon)} z^{\delta(\varepsilon),\varepsilon}[\lambda^\varepsilon,\, \mu^\varepsilon] - h^{\delta(\varepsilon)},\, g^{\delta(\varepsilon)}(z^{\delta(\varepsilon),\varepsilon}[\lambda^\varepsilon,\, \mu^\varepsilon]))\rangle \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

2.3. Регуляризованный ПЛ в задаче условной оптимизации с ограниченным допустимым множеством

Прежде всего, покажем, что выполняется и предельное соотношение

$$\langle\lambda^{\delta,\varepsilon},\, A^\delta z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}] - h^\delta\rangle + \langle\mu^{\delta,\varepsilon},\, g^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}])\rangle \to 0, \quad \delta \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.29}$$

Здесь и ниже, как и в теореме 2, принято обозначение $(\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}) \equiv (\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon})$.

Для этого сначала заметим, что из трех соотношений (2.27) следует предельное соотношение

$$f^0(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}]) \to f^0(z^0), \quad \delta \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.30}$$

Одновременно в силу (2.6) можем записать в случае задачи $(\mathrm{P}^\delta_\varepsilon)$

$$\begin{aligned} f^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}]) + \varepsilon\,\|z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}]\|^2 + \langle\lambda^{\delta,\varepsilon}, A^\delta z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}] - h^\delta\rangle + \langle\mu^{\delta,\varepsilon},\, g^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}])\rangle \\ \le f^0(z^0_\varepsilon) + \varepsilon\,\|z^0_\varepsilon\|^2 + C\delta(1 + \|z^0_\varepsilon\|^2) + C\delta\|\lambda^{\delta,\varepsilon}\|(2 + \|z^0_\varepsilon\|) + C\delta|\mu^{\delta,\varepsilon}|(1 + \|z^0_\varepsilon\|^2) \\ \equiv f^0(z^0_\varepsilon) + \varepsilon\,\|z^0_\varepsilon\|^2 + \psi(\delta,\varepsilon) \end{aligned}$$

или

$$\langle\lambda^{\delta,\varepsilon}, A^\delta z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}] - h^\delta\rangle + \langle\mu^{\delta,\varepsilon}, g^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}])\rangle \le f^0(z^0_\varepsilon) + \varepsilon\|z^0_\varepsilon\|^2 + \psi(\delta,\varepsilon) - f^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]),$$

что с учетом предельного соотношения (2.30), первой из оценок (2.1), оценки (2.23) и предельных соотношений $z^0_\varepsilon \to z^0$, $\psi(\delta,\varepsilon) \to 0$, $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ дает оценку

$$\langle \lambda^{\delta,\varepsilon},\, A^\delta z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}] - h^\delta\rangle + \langle \mu^{\delta,\varepsilon},\, g^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}])\rangle \le \gamma(\delta,\varepsilon) \to 0, \quad \delta \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

При этом в силу (2.7) имеем неравенство $\langle \lambda^{\delta,\varepsilon}, A^\delta z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}] - h^\delta\rangle + \langle \mu^{\delta,\varepsilon}, g^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}])\rangle \ge 0$. Две последние оценки дают предельное соотношение (2.29).

Одновременно получаем, что из равенства

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}) = \min_{z\in\mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(z, \lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon})$$

$$= f^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]) + \varepsilon\, \|z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}]\,\|^2 + \langle \lambda^{\delta,\varepsilon}, A^\delta z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}] - h^\delta\rangle + \langle \mu^{\delta,\varepsilon}, g^\delta(z^{\delta,\varepsilon}[\lambda^{\delta,\varepsilon}, \mu^{\delta,\varepsilon}])\rangle$$

в силу предельных соотношений (2.29), (2.30) и ограниченности $\mathcal{D}$ следует

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}) \to f^0(z^0), \quad \delta \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.31}$$

Далее нам (в случае ограниченного $\mathcal{D}$) понадобится оценка

$$|V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) - V^0(\lambda,\mu)| \le K\,(\delta\,(1 + \|\lambda\| + |\mu|) + \varepsilon), \tag{2.32}$$

в которой постоянная $K > 0$ (в случае ограниченного $\mathcal{D}$) зависит от $\sup\limits_{z\in\mathcal{D}}\|z\|$, но не зависит от $\delta,\ \varepsilon,\ (\lambda,\mu) \in H\times\mathbb{R}^m$. Для доказательства этой оценки предположим без ограничения общности рассуждений, что $V^{\delta,\epsilon}(\lambda,\mu) \ge V^0(\lambda,\mu)$. Тогда можем записать цепочку равенств и неравенств

$$|V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) - V^0(\lambda,\mu)| = V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) - V^0(\lambda,\mu)$$

$$= V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) - \inf_{z\in\mathcal{D}}(L^0(z,\lambda,\mu) - L^{\delta,\varepsilon}(z,\lambda,\mu) + L^{\delta,\varepsilon}(z,\lambda,\mu))$$

$$\le V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) - V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) - \inf_{z\in\mathcal{D}}(L^0(z,\lambda,\mu) - L^{\delta,\varepsilon}(z,\lambda,\mu))$$

$$= -\inf_{z\in\mathcal{D}}(L^0(z,\lambda,\mu) - L^{\delta,\varepsilon}(z,\lambda,\mu)) \le \sup_{z\in\mathcal{D}}|L^{\delta,\varepsilon}(z,\lambda,\mu) - L^0(z,\lambda,\mu)|,$$

очевидным следствием которой с учетом оценок (2.1) и является доказываемая оценка (2.32). Далее в силу оценки (2.32) можем записать

$$|V^{\delta,\varepsilon}(\lambda^{\delta,\varepsilon},\mu^{\delta,\varepsilon}) - V^0(\lambda^{\delta,\varepsilon},\mu^{\delta,\varepsilon})| \le K(\delta(1 + \|\lambda^{\delta,\varepsilon}\| + |\mu^{\delta,\varepsilon}|) + \varepsilon),$$

где постоянная $K > 0$ зависит лишь $\sup\limits_{z\in\mathcal{D}}\|z\|$, но не зависит от δ. Поэтому в силу условия согласования (2.2), оценки (2.26) и ограниченности $\mathcal{D}$ имеем

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda^{\delta,\varepsilon},\quad \mu^{\delta,\varepsilon}) - V^0(\lambda^{\delta,\varepsilon},\quad \mu^{\delta,\varepsilon}) \to 0, \quad \delta \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Это предельное соотношение позволяет переписать (2.31) в виде

$$V^0(\lambda^{\delta,\varepsilon},\, \mu^{\delta,\varepsilon}) \to \sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+} V^0(\lambda,\mu) = f^0(z^0), \quad \delta \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.33}$$

Сформулируем теперь и докажем следующий регуляризованный ПЛ в задаче (P^0) с ограниченным $\mathcal{D}$. Подчеркнем, что его формулировка за счет применения секвенциального подхода учитывает одновременно, как регулярный, так и нерегулярный случаи задачи.

Теорема 3. *Для того, чтобы в задаче* (P^0) *существовало* МПР (*и, следовательно, каждая его слабая предельная точка принадлежала множеству* Z^0), *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных* $(\lambda^k,\mu^k)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\ldots$, *такая, что* $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0$, $k\to\infty$, *и выполняются включения*

$$z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k,\gamma^k},\quad \gamma^k\to 0,\quad k\to\infty, \tag{2.34}$$

для некоторой последовательности положительных чисел γ^k, $k=1,2,\ldots$, (*она играет роль последовательности* ϵ^k, $k=1,2,\ldots$ *из определения* МПР) *и предельное соотношение*

$$\big\langle(\lambda^k,\mu^k),\,(A^{\delta^k}z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]-h^{\delta^k},\,g^{\delta^k}(z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]))\big\rangle\to 0,\quad k\to\infty, \tag{2.35}$$

где $\varepsilon^k>0$, $\varepsilon^k\to 0$, $k\to\infty$. *Более того, последовательность* $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, *является искомым* МПР. *Другими словами, оператор* $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\delta^k)$, *который задается равенством* $R(f^{\delta^k},\,A^{\delta^k},\,h^{\delta^k},\,g^{\delta^k},\,\delta^k)=z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]$, *является регуляризирующим в смысле определения* 3, *причем каждая слабая предельная точка последовательности* $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$, *есть решение задачи* (P^0). *Одновременно с предельным соотношением* $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0$, $k\to\infty$, *и соотношениями* (2.34), (2.35) *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k,\mu^k)\to\sup_{(\lambda,\mu)\in H\times\mathbb{R}^m_+}V^0(\lambda,\mu)=f^0(z^0). \tag{2.36}$$

В качестве конкретной последовательности $(\lambda^k,\mu^k)\in H\times\mathbb{R}^m_+$, $k=1,2,\ldots$ *может быть взята, например, последовательность* $(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k},\,\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k})$, $k=1,2,\ldots$, *вырабатываемая* МПР-*образующим алгоритмом теоремы* 2.

Доказательство. Для проверки необходимости, прежде всего, заметим, что задача (P^0) разрешима, т. е. $Z^0\neq\varnothing$, благодаря условиям на исходные данные и существованию МПР. Теперь включение (2.34) и предельное соотношение (2.35), а также предельное соотношение $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0$, $k\to\infty$, теоремы вытекают из (2.27), (2.28) с учетом ограниченности $\mathcal{D}$ и (2.29), если в качестве точек (λ^k,μ^k), $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]$ взять точки $(\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k},\,\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k})$, $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k},\,\mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}]$, $k=1,2,\ldots$, соответственно, с δ^k, $\varepsilon^k\to 0$, $k\to\infty$. В свою очередь, предельное соотношение (2.36) является следствием (2.33).

Для доказательства достаточности заметим, прежде всего, что множество Z^0 не пусто ввиду включения $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k,\gamma^k}$, ограниченности $\mathcal{D}$ и условий на исходные данные задачи (P^0). Далее, так как $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]$ минимизирует функционал $L^{\delta^k,\varepsilon^k}(\cdot,\lambda^k,\mu^k)$, можем записать

$$f^{\delta^k}(z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k])+\varepsilon^k\|z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]\|^2+\big\langle(\lambda^k,\mu^k),(A^{\delta^k}z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]-h^{\delta^k},\,g^{\delta^k}(z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]))\big\rangle$$
$$\le f^{\delta^k}(z)+\varepsilon^k\|z\|^2+\langle(\lambda^k,\mu^k),\,(A^{\delta^k}z-h^{\delta^k},\,g^{\delta^k}(z))\rangle\quad\forall\,z\in\mathcal{D}.$$

В силу условий теоремы отсюда следует с учетом ограниченности $\mathcal{D}$, что

$$f^{\delta^k}(z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k])\le f^{\delta^k}(z)+\langle(\lambda^k,\mu^k),\,(A^{\delta^k}z-h^{\delta^k},\,g^{\delta^k}(z))\rangle+\psi^k\quad\forall\,z\in\mathcal{D},\quad\psi^k\to 0,\quad k\to\infty.$$

Положим здесь $z=z^0\in Z^0$ и используем условие согласования $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\|\to 0$, $k\to\infty$. Тогда получаем $f^0(z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k])\le f^0(z^0)+\widetilde{\psi}^k$, $\widetilde{\psi}^k\to 0$, $k\to\infty$. Так как одновременно мы имеем включение $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]\in\mathcal{D}^{\delta^k,\gamma^k}$, то используя классические свойства слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве, получаем, что $f^0(z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k])\to f^0(z^0)$, $k\to\infty$, т. е. последовательность $z^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]$, $k=1,2,\ldots$ является МПР в задаче (P^0). Последнее предельное соотношение в совокупности с (2.35) приводят, в свою очередь, к предельному соотношению $V^{\delta^k,\varepsilon^k}(\lambda^k,\mu^k) \to f^0(z^0)$, $k\to\infty$. Далее, так как благодаря оценке (2.32) и предельному соотношению $\delta^k\|(\lambda^k,\mu^k)\| \to 0$, $k\to\infty$, можно утверждать, что справедливо предельное соотношение $V^{\delta^k,\varepsilon^k}(\lambda^k,\mu^k) - V^0(\lambda^k,\mu^k) \to 0$, $k\to\infty$, то получаем окончательно предельное соотношение (и одновременно равенство) (2.36).

Теорема доказана.

3. Регуляризованные классические условия оптимальности в задаче оптимального управления

Вернемся к задаче оптимального управления (OC^0), которая в разд. 1 была сведена к задаче выпуклого программирования (P^0) (см. также начало разд. 2). Для получения анонсированных регуляризованных условий оптимальности в задаче (OC^0) необходимо далее "расшифровать" утверждения теорем 2 и 3 в терминах исходной задачи (OC^0). С этой целью определим функцию Лагранжа в задаче оптимального управления (роль двойственной переменной $\lambda\in H$ играет пара $\lambda\equiv(\lambda_1,\lambda_2)\in L_2(X)\times\mathbb{R}^k$)

$$L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu) \equiv L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda_1,\lambda_2,\mu) \equiv f^\delta(u) + \varepsilon\|u\|^2 + \langle\lambda,\, A^\delta u - h^\delta\rangle + \langle\mu,\, g_2^\delta(u)\rangle$$

$$= f^\delta(u) + \varepsilon\|u\|^2 + \langle\lambda_1,\, G^\delta(u) - H_1^\delta\rangle + \langle\lambda_2,\, g_1^\delta(u) - h_1^\delta\rangle + \langle\mu,\, g_2^\delta(u)\rangle$$

$$= \varphi_0^\delta(x^\delta[u](T)) + \varepsilon\int_0^T \langle u(t),u(t)\rangle\,dt + \int_0^T \lambda_1(t)\big(\langle\Phi_1^\delta(t),\, x^\delta[u](t)\rangle - H_1^\delta(t)\rangle\big)\,dt$$

$$+\sum_{i=1}^k \lambda_{2,i}\big(\langle\varphi_{1,i}^\delta,\, x^\delta[u](T)\rangle - h_{1,i}^\delta\big) + \sum_{i=1}^m \mu_i\big(\varphi_{2,i}^\delta(x^\delta[u](T))\big), \quad L^0(u,\lambda_1,\lambda_2,\mu)\equiv L^{0,0}(u,\lambda_1,\lambda_2,\mu),$$

где $\lambda_1\in L_2(X)$, $\lambda_2\equiv(\lambda_{2,1},\dots,\lambda_{2,k})\in\mathbb{R}^k$, $\mu\equiv(\mu_1,\dots,\mu_m)\in\mathbb{R}^m$. Введем также обозначение $u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu] = u^{\delta,\varepsilon}[\lambda_1,\lambda_2,\mu] = \operatorname{argmin}\{L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda_1,\lambda_2,\mu)\colon u\in\mathcal{D}\}$. Определим далее двойственную задачу

$$V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) \equiv \min_{u\in\mathcal{D}} L^{\delta,\varepsilon}(u,\lambda,\mu) \to \sup, \quad (\lambda,\mu)\in L_2(X)\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m_+, \quad \lambda=(\lambda_1,\lambda_2),$$

$$V^{\delta}(\lambda,\mu) \equiv V^{\delta,0}(\lambda,\mu) \equiv \min_{u\in\mathcal{D}} L^{\delta,0}(u,\lambda,\mu) \to \sup, \quad (\lambda,\mu)\in L_2(X)\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m_+.$$

Обозначим через $(\lambda^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}) = (\lambda_1^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}, \lambda_2^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon},\, \mu^{\delta,\alpha(\delta),\varepsilon}) \in L_2(X)\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m_+$ решение регуляризованной двойственной задачи $V^{\delta,\varepsilon}(\lambda,\mu) - \alpha(\delta)\|(\lambda,\mu)\|^2 \to \max$, $(\lambda,\mu)\in L_2(X)\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m_+$ с условием согласования (2.2). "Расшифровка" теорем 2 и 3 в терминах исходной задачи приводит соответственно к регуляризирующему двойственному алгоритму и регуляризованному ПЛ в задаче оптимального управления (OC^0).

Теорема 4 (Регуляризирующий двойственный алгоритм). *Пусть выполняется условие согласования* (2.2), $\varepsilon^k > 0$, $\varepsilon^k\to 0$, $k\to\infty$, *— произвольная фиксированная последовательность. Тогда оператор* $R(\cdot,\delta^k)$, *ставящий в соответствие набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам* (1.2) *при* $\delta=\delta^k$, *управление*

$$R(\mathsf{f}^{\delta^k},\delta^k) \equiv u^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k},\, \mu^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}], \quad \lambda^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k} = (\lambda_1^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k},\, \lambda_2^{\delta^k,\alpha(\delta^k),\varepsilon^k}),$$

является МПР-*образующим в задаче* (OC^0) *в смысле определения* 1.

Теорема 5 (Регуляризованный ПЛ). *Для того, чтобы в задаче* (OC^0) *существовало* МПР *(и, следовательно, каждая ее слабая предельная точка принадлежала множеству* U^0*), необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность двойственных переменных*

$(\lambda^k, \mu^k) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \ldots$, $(\lambda^k \equiv (\lambda^k_1, \lambda^k_2))$, *такая, что* $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$, $k \to \infty$, *и выполняются включения*

$$u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k] \in \widetilde{\mathcal{D}}^{\delta^k, \widetilde{\gamma}^k}, \quad \widetilde{\gamma}^k \to 0, \quad k \to \infty, \tag{3.1}$$

для некоторой последовательности положительных чисел $\widetilde{\gamma}^k$, $k = 1, 2, \ldots$, (*она играет роль последовательности* ϵ^k, $k = 1, 2, \ldots$ *из определения* МПР) *и предельное соотношение при* $k \to \infty$

$$\Big\langle (\lambda^k, \mu^k), (G^{\delta^k}(u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]) - H^{\delta^k}_1, g^{\delta^k}_1(u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]) - h^{\delta^k}_1, g^{\delta^k}_2(u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k])) \Big\rangle \to 0, \tag{3.2}$$

где $\varepsilon^k > 0$, $\varepsilon^k \to 0$, $k \to \infty$. *Более того, последовательность* $u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *является искомым* МПР. *Другими словами, оператор* $R(\cdot, \delta^k)$, *ставящий в соответствие набору исходных данных* f^{δ^k}, *удовлетворяющих оценкам* (1.2) *при* $\delta = \delta^k$, *управление* $R(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) = u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]$, *является* МПР-*образующим в смысле определения* 1, *причем каждая слабая предельная точка последовательности* $u^{\delta^k, \varepsilon^k}[\lambda^k, \mu^k]$, $k = 1, 2, \ldots$, *есть решение задачи* (OC^0). *Одновременно с предельным соотношением* $\delta^k \|(\lambda^k, \mu^k)\| \to 0$, $k \to \infty$, *и соотношениями* (3.1) *и* (3.2) *выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(\lambda^k, \mu^k) \to \sup_{(\lambda, \mu) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m_+} V^0(\lambda, \mu) = \varphi^0_0(x^0[u^0](T)).$$

В качестве конкретной последовательности $(\lambda^k, \mu^k) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m_+$, $k = 1, 2, \ldots$ *может быть взята, например, последовательность* $(\lambda^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k}, \mu^{\delta^k, \alpha(\delta^k), \varepsilon^k})$, $k = 1, 2, \ldots$, *о которой идет речь в теореме* 4.

Получим из регуляризованного ПЛ теоремы 5 регуляризованный ПМП в задаче (OC^0). Рассмотрим с этой целью при фиксированных $(\lambda_1, \lambda_2) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k$, $\mu \in \mathbb{R}^m_+$ задачу минимизации функционала Лагранжа ($\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$)

$$L^{\delta, \varepsilon}(u, \lambda, \mu) \to \min, \quad u \in \mathcal{D}. \tag{3.3}$$

В дополнение к ранее сформулированным условиям на исходные данные задачи (OC^0) предположим, что функции $\varphi^\delta_0, \varphi^\delta_{2,i}$, $i = 1, \ldots, m$, обладают непрерывными в $\mathbb{R}^n$ градиентами $\nabla\varphi^\delta_0$, $\nabla\varphi^\delta_{2,i}$, $i = 1, \ldots, m$. В этом случае, очевидно, в силу выпуклости задачи (OC$^\delta$) необходимым и достаточным условием того, что некоторое управление $u \in \mathcal{D}$ доставляет минимум в задаче (3.3), является выполнимость ПМП для этого управления. Для записи ПМП в задаче (3.3) введем стандартное обозначение: $H^{\delta, \varepsilon}(x, t, u, \psi, \lambda_1) \equiv \langle \psi, \mathcal{A}^\delta(t)x + \mathcal{B}^\delta(t)u \rangle - \varepsilon\langle u, u \rangle - \langle \lambda_1, \Phi^\delta_1(t), x \rangle - H^\delta_1(t) \rangle$. Здесь и ниже в случае, если функция $\lambda \in L_2(X)$ рассматривается на всем временном интервале $[0, T]$, то полагается, что $\lambda(t) = 0$ при $t \in [0, T] \setminus X$ и одновременно для этой функции, рассматриваемой на более широком интервале, сохраняется прежнее обозначение. Справедлива следующая стандартная лемма (см., например, [14, §4.2]).

Лемма. *При сформулированном выше дополнительном условии дифференцируемости* φ^δ_0, $\varphi^\delta_{2,i}$, $i = 1, \ldots, m$, *управление* $u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu]$ $(\lambda = (\lambda_1, \lambda_2))$ *при любых* $(\lambda, \mu) \in L_2(X) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m_+$ *удовлетворяет* ПМП *в задаче* (3.3), *т. е. удовлетворяет при* $u(\cdot) = u^{\delta, \varepsilon}[\lambda, \mu](\cdot)$ *соотношению максимума при п.в.* $t \in [0, T]$

$$H^{\delta, \varepsilon}(x^\delta[u](t), u(t), t, \psi^{\delta, \varepsilon}(t), \lambda_1(t)) = \max_{v \in U} H^{\delta, \varepsilon}(x^\delta[u](t), v, t, \psi^{\delta, \varepsilon}(t), \lambda_1(t)), \tag{3.4}$$

где $\psi^{\delta, \varepsilon}(t)$, $t \in [0, T]$, — *решение сопряженной задачи*

$$\dot{\psi} = -\nabla_x H^\delta(x^\delta[u](t), u(t), t, \psi(t), \lambda_1(t)), \tag{3.5}$$

$$\psi(T) = -\nabla\varphi_0^\delta(x^\delta[u](T) - \sum_{i=1}^{k}\lambda_{2,i}\,\varphi_{1,i}^\delta - \sum_{i=1}^{m}\mu_i\left(\nabla\varphi_{2,i}^\delta(x^\delta[u](T))\right).$$

Обратно, в силу выпуклости задачи (OC^δ) *любой элемент* $u \in \mathcal{D}$*, удовлетворяющий при некоторых* $(\lambda,\mu) \in L_2(X)\times\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^m_+$ *соотношениям* (3.4), (3.5)*, доставляет минимум в задаче* (3.3)*, т. е.* $u(\cdot) = u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$.

Обозначим через $U_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$ множество всех управлений из $\mathcal{D}$, удовлетворяющих ПМП в задаче (3.3) при сформулированном выше дополнительном условии непрерывной дифференцируемости функций φ_0^δ, $\varphi_{2,i}^\delta$, $i = 1,\ldots,m$. Очевидно, в нашем случае, благодаря сильной выпуклости $f^\delta(\cdot) + \varepsilon\|\cdot\|^2$, это множество состоит из одного элемента $U_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu] \equiv u_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$ и справедливо равенство $u_m^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu] = u^{\delta,\varepsilon}[\lambda,\mu]$. Тогда непосредственным следствием теоремы 5 и леммы является регуляризованный ПМП для задачи оптимального управления (OC^0).

Теорема 6 (Регуляризованный ПМП). *Пусть выполняется сформулированное выше дополнительное условие дифференцируемости* φ_0^δ, $\varphi_{2,i}^\delta$, $i = 1,\ldots,m$*. Тогда все утверждения теоремы* 5 *остаются справедливыми и в том случае, если в них* $u^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]$ *заменяется везде на* $u_m^{\delta^k,\varepsilon^k}[\lambda^k,\mu^k]$.

Заключение

В статье получены регуляризованные ПЛ и ПМП для выпуклой задачи оптимального управления для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с ограниченным множеством допустимых управлений и с не являющимся, вообще говоря, сильно выпуклым целевым функционалом. Они сформулированы как теоремы существования МПР в смысле Дж. Варги, выражаются в терминах регулярных обычных функций Лагранжа и Гамильтона — Понтрягина и представляют собою так называемые МПР-образующие алгоритмы для решения рассматриваемой задачи с одновременным конструктивным представлением конкретных МПР. Устроенные структурно так же, как и классические ПМ и ПМП, они преодолевают возможные свойства некорректности классических КУО и являются теоретической базой для конструирования на своей основе численных алгоритмов для практического решения различных конкретных задач оптимального управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Гольштейн Е. Г.** Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
3. **Сумин М. И.** Параметрическая двойственная регуляризация для задачи оптимального управления с поточечными фазовыми ограничениями // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009. Т. 49, № 12. С. 2083–2102.
4. **Сумин М. И.** Регуляризованная параметрическая теорема Куна — Таккера в гильбертовом пространстве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1594–1615.
5. **Сумин М. И.** Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 4. С. 602–625.
6. **Сумин М. И.** Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2014. Т. 54, № 1. С. 25–49. doi: 10.7868/S0044466914010141.
7. **Арутюнов А. В.** Условия экстремума. Нормальные и вырожденные задачи. Москва: Факториал, 1997. 256 с.
8. **Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П.** Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. фак-те МГУ, 2004. 168 с.

9. **Сумин М. И.** Об устойчивом секвенциальном принципе Лагранжа в выпуклом программировании и его применении при решении неустойчивых задач // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 4. С. 231–240.
10. **Кутерин Ф. А., Сумин М. И.** Регуляризованный итерационный принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении, I: оптимизация сосредоточенной системы // Вестн. Удмурт. ун-та (Математика. Механика. Компьютерные науки.). 2016. Т. 26, вып. 4. С. 474–489. doi: 10.20537/vm160403 .
11. **Breitenbach T., Borzi A.** A sequential quadratic hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals // J. Dyn. Control Syst. 2019. Vol. 25, no. 3. P. 403–435. doi: 10.1007/s10883-018-9419-6 .
12. **Breitenbach T., Borzi A.** On the SQH scheme to solve nonsmooth PDE optimal control problems // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2019. Vol. 40, no. 13. P. 1489–1531. doi: 10.1080/01630563.2019.1599911 .
13. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации: в 2-х кн. Москва: МЦНМО, 2011. 1056 с.
14. **Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.** Оптимальное управление. Москва: Наука, 1979. 432 с.

Поступила 24.03.2020
После доработки 2.05.2020
Принята к публикации 18.05.2020

Сумин Михаил Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор
Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина
г. Тамбов;
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
г. Нижний Новгород
e-mail: m.sumin@mail.ru

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* N Y: Acad. Press, 1972, 531 p. ISBN: 0127351507 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 624 p.
2. Golshtein E.G. *Teoriya dvoistvennosti v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya* [Duality theory in mathematical programming and its applications]. Moscow: Nauka Publ., 1971, 352 p.
3. Sumin M.I. Parametric dual regularization for an optimal control problem with pointwise state constraints. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2009, vol. 49, no. 12, pp. 1987–2005. doi: 10.1134/S096554250912001X .
4. Sumin M.I. Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1489–1509. doi: 10.1134/S0965542511090156 .
5. Sumin M.I. Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2007, vol. 47, no. 4, pp. 579–600. doi: 10.1134/S0965542507040045 .
6. Sumin M.I. Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 1, pp. 22–44. doi: 10.1134/S0965542514010138 .
7. Arutyunov A.V. *Optimality conditions. Abnormal and degenerate problems.* Ser. Mathematics and Its Applications (Dordrecht), vol. 526, Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2000, 300 p. doi: 10.1007/978-94-015-9438-7 . Original Russian text published in Arutyunov A.V. *Usloviya ekstremuma. Anormal'nye i vyrozhdennye zadachi.* Moscow: Faktorial Publ., 1997, 255 p. ISBN: 5-88688-015-1 .
8. Milyutin A.A., Dmitruk A.V., Osmolovskii N.P. *Printsip maksimuma v optimal'nom upravlenii* [Maximum principle in optimal control]. Moscow: Center of Applied Investigations at the Faculty of Mechanics and Mathematics in MSU, 2004, 168 p.
9. Sumin M.I. On the stable sequential Lagrange principle in convex programming and its application for solving unstable problems. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 4, pp. 231–240 (in Russian).

10. Kuterin F.A., Sumin M.I. The regularized iterative Pontryagin maximum principle in optimal control. I. Optimization of a lumped system. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, no. 4, pp. 474–489 (in Russian). doi: 10.20537/vm160403 .
11. Breitenbach T., Borzi A. A sequential quadratic hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals. *J. Dyn. Control Syst.*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 403–435. doi: 10.1007/s10883-018-9419-6 .
12. Breitenbach T., Borzi A. On the SQH scheme to solve nonsmooth PDE optimal control problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2019, vol. 40, no. 13, pp. 1489–1531. doi: 10.1080/01630563.2019.1599911 .
13. Vasil'ev F.P. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow: MTsNMO Publ., 2011. Vol. 1: 620 p., ISBN: 978-5-94057-707-2 ; Vol. 2: 433 p., ISBN: 978-5-94057-708-9 .
14. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal control.* N Y: Plenum Press, 1987, 309 p. doi: 10.1007/978-1-4615-7551-1 . Original Russian text published in Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie.* Moscow: Nauka Publ., 1979, 432 p.

Received March 24, 2020
Revised May 2, 2020
Accepted May 18, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-07-00782_a, 20-01-00199_a, 20-52-00030 Bel_a).

Mikhail Iosifovich Sumin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tambov State University, Tambov, 392000 Russia; Nizhnii Novgorod State University, Nizhnii Novgorod, 603950 Russia,
e-mail: m.sumin@mail.ru .

Cite this article as: M. I. Sumin. On the regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 252–269 .