

УДК 517.977

**ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАЛОВЫСОТНЫМ ПОЛЕТОМ
В РЕЖИМЕ СЛЕДОВАНИЯ РЕЛЬЕФУ МЕСТНОСТИ****А. В. Паршиков**

При полете в режиме огибания рельефа, как правило, важной задачей является минимизация отклонения высоты полета летательного аппарата от заданной высоты. В работе описывается класс оптимальных управлений для задачи “чистого” огибания рельефа. Рассматривается модель управляемого полета в вертикальной плоскости, в которой управлением является угол отклонения руля высоты. При этом функции аэродинамических моментов и сил являются линейными по управлению и непрерывными по всем фазовым переменным. Летательный аппарат рассматривается как абсолютно твердое тело. Исходя из указанных предположений доказывается, что оптимальное управление является функцией, принимающей два крайних значения. Указанный класс управлений используется в численных экспериментах. При расчетах используется модель полета на дозвуковых скоростях в плотных слоях атмосферы. На примере конкретной модели летательного аппарата сравнивается эффективность двух алгоритмов управления, описываемых кусочно-постоянной и непрерывной функциями.

Ключевые слова: задача огибания рельефа, задача следования рельефу, полет в вертикальной плоскости, оптимальное управление летательным аппаратом.

A. V. Parshikov. Optimal control of a low-altitude flight in the terrain-following mode.

In a terrain-following flight, it is important to minimize the deviation of the aircraft altitude from a given height function. The paper describes a class of optimal controls for the pure terrain-following problem. We consider a model of a controlled flight in a vertical plane, where the control is the elevator angle. The functions of the aerodynamic moments and forces are linear in the control and continuous in all phase variables. The aircraft is regarded as a rigid body. Based on these assumptions, it is proved that an optimal control is a function taking two extreme values. The specified class of controls is used in numerical experiments. In calculations we use a model of flight at subsonic speeds in dense layers of the atmosphere. Using a specific aircraft model as an example, we compare the efficiency of two control algorithms described by a piecewise constant function and a continuous function.

Keywords: terrain-following problem, pure terrain-following problem, flight in a vertical plane, optimal control of an aircraft.

MSC: 70E15, 70Q05, 49K15, 49K30

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-225-237

Введение

Возможности современных бортовых вычислительных устройств таковы, что необходимо создавать алгоритмы управления, минимизирующие вероятность обнаружения летательного аппарата (ЛА) при полете на малых высотах. Также при этом должно выполняться такое обязательное условие безопасности полета, как предотвращение столкновения с рельефом. Одним из возможных решений задачи является отслеживание заранее вычисленной функции высоты, которая описывает некоторую идеальную траекторию движения.

Условия задачи могут варьироваться в зависимости от целей исследования. К примеру, помимо управления с помощью рулей может вводиться управление режимом работы двигателя [1]. Кроме того, в некоторых работах также учитываются ветровые возмущения или ставится задача выработки оптимальной траектории не только по высоте, но и в горизонтальной плоскости [2].

Целями данной статьи являются, во-первых, исследование структуры оптимального управления в задаче “чистого” огибания рельефа местности (pure terrain-following problem [1]) и, во-вторых, сравнительный анализ эффективности кусочно-постоянного и непрерывного управлений рулем высоты летательного аппарата с помощью численного эксперимента.

1. Условия задачи

В данной работе используется модель плоской невращающейся Земли, т. е. угловая скорость вращения Земли равна нулю и радиус Земли равен бесконечности. В качестве модели атмосферы применяется стандартная атмосфера (СА) [3]. Атмосферные движения отсутствуют. При моделировании полет ЛА ограничен высотами от -200 м до 5000 м над уровнем моря.

В качестве модели летательного аппарата рассматривается абсолютно твердое тело постоянной массы, которое является осесимметричным в аэродинамическом и динамическом плане, т. е. главные оси инерции совпадают с главными осями связанной системы координат, определяемой через строительную ось ЛА. Угол вектора тяги двигателя относительно строительной оси ЛА $\varphi_P = 0$. Режим работы двигателя постоянен, и тяга зависит от числа Маха и высоты полета: $P = P(M, y)$.

В качестве модели системы навигации используется модель глобальной спутниковой навигации. Запаздывание сигналов в каналах управления и навигации не учитывается и считается, что параметры движения, поступающие из системы навигации, не содержат ошибок.

2. Уравнения движения

Уравнения движения центра масс ЛА в проекциях на оси связанной системы координат можно записать в виде [4]:

$$\begin{cases} m(\dot{v}_x + v_z\omega_y - v_y\omega_z) = R_x + P + G_x, \\ m(\dot{v}_y + v_x\omega_z - v_z\omega_x) = R_y + G_y, \\ m(\dot{v}_z + v_y\omega_x - v_x\omega_y) = R_z + G_z, \end{cases}$$

где m — масса ЛА; $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ и $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ — векторы линейной и угловой скоростей в связанной системе координат соответственно; $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)^T$ — вектор-функция аэродинамической силы; $P = P(M, y) = P(v_x, v_y, y)$ — значение силы тяги двигателя и $\mathbf{G} = (G_x, G_y, G_z)^T$ — сила притяжения Земли. Здесь и далее символ \dot{f} обозначает полную производную по времени функции f , а верхний индекс T есть операция транспонирования. Векторные величины выделяются жирным шрифтом для того, чтобы отличать их от скалярных величин.

Уравнения движения ЛА относительно центра масс в проекциях на оси связанной системы координат имеют вид

$$\begin{cases} I_x\dot{\omega}_x + (I_z - I_y)\omega_y\omega_z = M_x, \\ I_y\dot{\omega}_y + (I_x - I_z)\omega_x\omega_z = M_y, \\ I_z\dot{\omega}_z + (I_y - I_x)\omega_x\omega_y = M_z. \end{cases}$$

Здесь I_x, I_y, I_z — главные моменты инерции ЛА; $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ — вектор-функция момента аэродинамической силы.

Кинематические уравнения движения в земной системе координат могут быть представлены в виде [5]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \cos \psi \cos \vartheta + v_y(-\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma) + v_z(\cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma), \\ \dot{y} = v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta \cos \gamma - v_z \cos \vartheta \sin \gamma, \\ \dot{z} = -v_x \sin \psi \cos \vartheta + v_y(\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma) + v_z(\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} = \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \tan \vartheta, \\ \dot{\psi} = (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \sec \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \end{cases}$$

где x, y, z — координаты центра масс в земной системе координат, а ϑ, γ, ψ — углы тангажа, крена и рысканья соответственно.

Таким образом, полная система, описывающая движение ЛА, имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{v}_x = (R_x + P + G_x)/m - v_z\omega_y + v_y\omega_z, \\ \dot{v}_y = (R_y + G_y)/m - v_x\omega_z + v_z\omega_x, \\ \dot{v}_z = (R_z + G_z)/m - v_y\omega_x + v_x\omega_y, \\ \dot{\omega}_x = (M_x - (I_z - I_y)\omega_y\omega_z)/I_x, \\ \dot{\omega}_y = (M_y - (I_x - I_z)\omega_x\omega_z)/I_y, \\ \dot{\omega}_z = (M_z - (I_y - I_x)\omega_x\omega_y)/I_z, \\ \dot{x} = v_x \cos \psi \cos \vartheta + v_y(-\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma) \\ \quad + v_z(\cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma), \\ \dot{y} = v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta \cos \gamma - v_z \cos \vartheta \sin \gamma, \\ \dot{z} = -v_x \sin \psi \cos \vartheta + v_y(\cos \psi \sin \gamma + \sin \vartheta \sin \psi \cos \gamma) \\ \quad + v_z(\cos \psi \cos \gamma - \sin \vartheta \sin \psi \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} = \omega_x - (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \tan \vartheta, \\ \dot{\psi} = (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) \sec \vartheta, \\ \dot{\vartheta} = \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Аэродинамические силы, действующие по осям связанной системы координат, зависят в том числе от числа Маха M , числа Рейнольдса Re , углов атаки $\alpha = \alpha(\mathbf{v}, \vartheta, \gamma, \psi)$ и скольжения $\beta = \beta(\mathbf{v}, \vartheta, \gamma, \psi)$ следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_x = c_x(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS, \\ R_y = c_y(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS, \\ R_z = c_z(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS. \end{array} \right.$$

Здесь $q = \rho V^2/2 = \rho(y) \cdot (v_x^2 + v_y^2)/2$ — скоростной напор; $\rho(y)$ — плотность воздуха; S — площадь крыльев, c_x, c_y, c_z — коэффициенты аэродинамических сил.

Аэродинамические моменты, действующие по осям связанной системы координат, могут быть представлены в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = m_x(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS\bar{c}, \\ M_y = m_y(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qS\bar{c}, \\ M_z = m_z(M, Re, \alpha, \beta, \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\delta}, \dots)qSb, \end{array} \right.$$

где \bar{c} — длина главной хорды крыла, b — размах крыльев, а m_x, m_y, m_z — коэффициенты аэродинамических моментов.

Управляющим воздействием является вектор $\boldsymbol{\delta} = (\delta_v, \delta_n, \delta_\psi)^T$, который описывает значение углов отклонения рулей высоты, направления и крена (элеронов) соответственно. В дальнейшем при моделировании полета в вертикальной плоскости в качестве управления используется только угол отклонения руля высоты δ_v .

3. Управление высотой полета в вертикальной плоскости

В данном разделе рассматривается модель полета ЛА в вертикальной плоскости при постоянной массе. Из системы (2.1) выводится следующая система уравнений движения ЛА.

$$\begin{cases} \dot{\omega}_z = M_z(v_x, v_y, \vartheta, \omega_z, \delta_B)/I_z, \\ \dot{v}_x = (R_x(v_x, v_y, \vartheta, \omega_z, \delta_B) + P(v_x, v_y, h) + G_x)/m + v_y\omega_z, \\ \dot{v}_y = (R_y(v_x, v_y, \vartheta, \omega_z, \delta_B) + G_y)/m - v_x\omega_z, \\ \dot{\vartheta} = \omega_z, \\ \dot{x} = v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta, \\ \dot{y} = v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\delta_B \in [\delta_B^{\min}, \delta_B^{\max}]$.

Пусть коэффициенты аэродинамических сил и моментов являются линейными по переменной δ_B :

$$\begin{aligned} c_x(\cdot) &= \bar{c}_x(\cdot) + c'_x(\cdot)\delta_B, \\ c_y(\cdot) &= \bar{c}_y(\cdot) + c'_y(\cdot)\delta_B, \\ m_z(\cdot) &= \bar{m}_z(\cdot) + m'_z(\cdot)\delta_B. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь функции с чертой и со штрихом не зависят от δ_B . Тогда уравнения движения записываются следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\omega}_z = (\bar{m}_z q S b)/I_z + \delta_B (m'_z q S b)/I_z, \\ \dot{v}_x = (\bar{c}_x q S + P + G_x)/m + v_y \omega_z + \delta_B (c'_x q S)/m, \\ \dot{v}_y = (\bar{c}_y q S + G_y)/m - v_x \omega_z + \delta_B (c'_y q S)/m, \\ \dot{\vartheta} = \omega_z, \\ \dot{x} = v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta, \\ \dot{y} = v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta. \end{cases} \quad (3.3)$$

В векторной форме система (3.3) представляется в виде

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f} + \mathbf{g}\delta_B, \text{ где}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \omega_z \\ v_x \\ v_y \\ \vartheta \\ x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} (\bar{m}_z q S b)/I_z \\ (\bar{c}_x q S + P + G_x)/m + v_y \omega_z \\ (\bar{c}_y q S + G_y)/m - v_x \omega_z \\ \omega_z \\ v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta \\ v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} (m'_z q S b)/I_z \\ (c'_x q S)/m \\ (c'_y q S)/m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

При рассмотрении маловысотного полета в режиме огибания рельефа поиск оптимального управления $\delta_B(\cdot)$ может осуществляться для двух типов задачи: для задачи огибания рельефа (terrain-following problem) и для задачи “чистого” огибания рельефа (pure terrain following (PTF) problem) [2].

Задача огибания рельефа учитывает время прохождения траектории, т. е. содержит в себе задачу быстрогодействия. Минимизируемый функционал имеет вид

$$I = \eta T + (1 - \eta) \int_0^T (y(t) - F(x(t)))^2 dt, \quad \eta \in (0, 1), \quad T > 0.$$

Функция заданной высоты полета $F(x)$ создается на основе карты высот рельефа, и в данной задаче мы будем считать ее априорно известной. Поэтому можно упростить задачу, сократив множество оптимальных управлений до релейных, используя принцип максимума Понтрягина.

В задаче “чистого” огибания рельефа имеет значение только отклонение высоты полета $y(x)$ от заданной высоты $F(x)$; в этом случае задачу оптимального управления рулем высоты запишем следующим образом:

$$\int_0^T (y(t) - F(x(t)))^2 dt \rightarrow \min_{\delta_b(\cdot)}, \quad T > 0, \quad (3.5)$$

где $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ — скалярные функции координат ситемы (3.1). Это задача с фиксированным временем T и незакрепленным правым концом.

Функция Понтрягина этой задачи имеет вид

$$H = -\Psi_0 \cdot (y - F(x))^2 + \Psi^T(\mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{g}(\mathbf{X})\delta_b), \quad (3.6)$$

где $\Psi(\cdot)$ — n -вектор-функция ($n = 6$) есть решение следующей задачи Коши для сопряженной системы:

$$\dot{\Psi} + (\mathbf{f}_X + \mathbf{g}_X \delta_b)^T \Psi = \mathbf{h} \Psi_0, \quad \Psi(T) = 0. \quad (3.7)$$

Здесь \mathbf{f}_X и \mathbf{g}_X — (6×6) -матрицы, состоящие из частных производных компонент векторов \mathbf{f} и \mathbf{g} соответственно по компонентам фазового вектора $\mathbf{X} = (\omega_z, v_x, v_y, \vartheta, x, y)^T$ (см. (3.4)); \mathbf{h} — 6-вектор, состоящий из частных производных подынтегральной функции $(y - F(x))^2$ по компонентам фазового вектора \mathbf{X} ; \mathbf{q}_X — (6×6) -матрица, состоящая из частных производных компонент вектора \mathbf{q} по компонентам фазового вектора \mathbf{X} .

Анализ принципа максимума Понтрягина [6; 7] для задач с правой частью, линейной по управлению, приводит (см. [8]) к заключению о том, что у оптимальной траектории могут существовать участки, для которых вектор $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ принадлежит особой поверхности. В рассматриваемом случае, как показано в [8, гл. 8], особая поверхность описывается системой

$$\begin{cases} \Psi^T \mathbf{g} = 0, \\ \Psi^T \mathbf{g}_X \dot{\mathbf{X}} + \dot{\Psi}^T \mathbf{g} = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Введем в рассмотрение n -вектор-функцию

$$\mathbf{q} = \mathbf{g}_X \mathbf{f} - \mathbf{f}_X \mathbf{g}.$$

На особой поверхности (3.8) выполняется равенство $\Psi^T \mathbf{g} = 0$, и при условии

$$\Psi^T (\mathbf{q}_X \mathbf{g} - \mathbf{g}_X \mathbf{q}) \neq 0$$

управление (см. [8, гл. 8])

$$\delta_b = -\frac{\Psi^T (\mathbf{q}_X \mathbf{f} - \mathbf{f}_X \mathbf{g})}{\Psi^T (\mathbf{q}_X \mathbf{g} - \mathbf{g}_X \mathbf{q})} \quad (3.9)$$

удерживает вектор $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ на особой поверхности, обеспечивая тем самым необходимое условие стационарности.

Таким образом, применение принципа максимума Понтрягина к задаче (3.5) на траекториях системы (3.1) позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. Пусть для системы (3.1) в задаче (3.5) с фиксированным временем и незакрепленным правым концом выполняются следующие условия.

1. Существует измеримое оптимальное управление $\delta_b^*(\cdot)$.
2. Функции M_z, R_x, R_y являются линейными по управлению, а также непрерывными по всем фазовым переменным.
3. Функция $F(x)$ непрерывна вместе со своей производной.

Тогда функция $\delta_B^*(\cdot)$ оптимального управления рулем высоты либо принимает крайние значения δ_B^{\min} , δ_B^{\max} , либо в случае принадлежности вектора $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ особой поверхности (3.8) и выполнения условия $\Psi^T(\mathbf{q}\mathbf{X}\mathbf{g} - \mathbf{g}\mathbf{X}\mathbf{q}) \neq 0$ значения функции оптимального управления вычисляются по формуле (3.9), в которой матрицы \mathbf{f}_X и \mathbf{g}_X и вектор \mathbf{h} имеют следующий вид:

$$\mathbf{f}_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{m}_z}{\partial \omega_z} qSb/I_z & \frac{\partial \bar{m}_z}{\partial v_x} qSb/I_z & \frac{\partial \bar{m}_z}{\partial v_y} qSb/I_z & \frac{\partial \bar{m}_z}{\partial \vartheta} qSb/I_z & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{c}_x}{\partial \omega_z} qS/m + v_y & \frac{\partial(\bar{c}_x qS + P)}{\partial v_x} /m & \frac{\partial(\bar{c}_x qS + P)}{\partial v_y} /m + \omega_z & \frac{\partial(\bar{c}_x qS + G_x)}{\partial \vartheta} /m & 0 & \frac{\partial P}{\partial y} /m \\ \frac{\partial(\bar{c}_y qS)}{\partial \omega_z} /m - v_x & \frac{\partial(\bar{c}_y qS)}{\partial v_x} /m - \omega_z & \frac{\partial(\bar{c}_y qS)}{\partial v_y} /m & \frac{\partial(\bar{c}_y qS + G_y)}{\partial \vartheta} /m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta & -v_y \cos \vartheta - v_x \sin \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta & v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}_X = \begin{pmatrix} \frac{\partial m'_z}{\partial \omega_z} qSb/I_z & \frac{\partial m'_z}{\partial v_x} qSb/I_z & \frac{\partial m'_z}{\partial v_y} qSb/I_z & \frac{\partial m'_z}{\partial \vartheta} qSb/I_z & 0 & 0 \\ \frac{\partial c'_x}{\partial \omega_z} qS/m & \frac{\partial c'_x}{\partial v_x} qS/m & \frac{\partial c'_x}{\partial v_y} qS/m & \frac{\partial c'_x}{\partial \vartheta} qS/m & 0 & 0 \\ \frac{\partial c'_y}{\partial \omega_z} qS/m & \frac{\partial c'_y}{\partial v_x} qS/m & \frac{\partial c'_y}{\partial v_y} qS/m & \frac{\partial c'_y}{\partial \vartheta} qS/m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \cdot (y - F(x)) \frac{dF(x)}{dx} \\ 2 \cdot (y - F(x)) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ не принадлежит особой поверхности. Покажем, что Ψ_0 не может равняться нулю. Действительно, пусть $\Psi_0 = 0$. Тогда из-за отсутствия граничных условий на правом конце выполняется [7] условие трансверсальности $\Psi(T) = 0$. Поскольку по условию 1 теоремы существует некоторое оптимальное управление, то, исходя из принципа максимума Понтрягина в задаче со свободным правым концом [6], необходимо, чтобы

$$\forall t \in [0, T] \quad (\Psi_0, \Psi_1(t), \Psi_2(t), \Psi_3(t), \Psi_4(t), \Psi_5(t), \Psi_6(t))^T \neq 0,$$

что противоречит вышесказанному. Таким образом, можем положить $\Psi_0 = 1$, поскольку необходимое условие оптимальности задано с точностью до множителя.

Из принципа максимума следует, что функция Понтрягина (3.6) должна достигать максимума по δ_B в точках, где $\delta_B(t)$ непрерывна. Так как по условию 2 теоремы функции M_z, R_x, R_y линейны по δ_B , то в зависимости от величины $\Psi^T \mathbf{g}$ максимум достигается на одном из концов отрезка $[\delta_B^{\min}, \delta_B^{\max}]$. Следовательно, если $\Psi^T \mathbf{g} \neq 0$, только два возможных значения функции управления удовлетворяют принципу максимума Понтрягина — это значения из множества $\{\delta_B^{\min}, \delta_B^{\max}\}$.

На участках особого управления вектор $(\mathbf{X}^T, \Psi^T)^T$ находится на особой поверхности. Тогда, если $\Psi^T(\mathbf{q}\mathbf{X}\mathbf{g} - \mathbf{g}\mathbf{X}\mathbf{q}) \neq 0$, то управление будет определяться в соответствии с (3.9).

Теорема доказана.

Ввиду полученным теоретическим результатам класс функций для построения алгоритмов оптимального управления сужается. Это приводит к упрощению построения управления с практической точки зрения.

4. Моделирование

В данной работе в качестве модели ЛА используется модель самолета F-4 Phantom [2]. Для данной модели коэффициенты аэродинамических сил записываются в виде

$$\begin{aligned}
 c_x &= -0.0434 + 2.39 \cdot 10^{-3}\alpha + 2.53 \cdot 10^{-5}\beta^2 - 1.07 \cdot 10^{-6}\alpha\beta^2 + 9.5 \cdot 10^{-4}\delta_B \\
 &\quad - 8.5 \cdot 10^{-7}\delta_B\beta^2 + (180\omega_z\bar{c})/(2\pi v)(8.73 \cdot 10^{-3} + 0.001\alpha - 1.75 \cdot 10^{-4}\alpha^2), \\
 c_y &= +0.131 + 0.538\alpha + 4.76 \cdot 10^{-3}\delta_B + 3.3 \cdot 10^{-5}\delta_B\alpha + 7.5 \cdot 10^{-5}\delta_S^2 \\
 &\quad - (180\omega_z\bar{c})/(2\pi v)(-0.111 + 5.17 \cdot 10^{-3}\alpha - 1.1 \cdot 10^{-3}\alpha^2), \\
 c_z &= -0.012\beta + 1.55 \cdot 10^{-3}\delta_H - 8 \cdot 10^{-6}\delta_H\alpha + (180b)/(2\pi v)(2.25 \cdot 10^{-3}\omega_x + 0.0117\omega_y \\
 &\quad - 3.67 \cdot 10^{-4}\omega_y\alpha + 1.75 \cdot 10^{-4}\omega_y\delta_B).
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь $v = |\mathbf{v}|$, где $|\mathbf{v}|$ есть модуль вектора \mathbf{v} . Для выбранной модели [2] коэффициенты аэродинамических моментов выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 m_x &= -5.98 \cdot 10^{-4}\beta - 2.83 \cdot 10^{-4}\alpha\beta + 1.51 \cdot 10^{-5}\alpha^2\beta - \delta_S(6.1 \cdot 10^{-4} + 2.5 \cdot 10^{-5}\alpha \\
 &\quad - 2.6 \cdot 10^{-6}\alpha^2) - \delta_H(-2.3 \cdot 10^{-4} + 4.5 \cdot 10^{-6}\alpha) + (180b)(2\pi v)(-4.12 \cdot 10^{-3}\omega_x \\
 &\quad - 5.24 \cdot 10^{-4}\omega_x\alpha + 4.36 \cdot 10^{-5}\omega_x\alpha^2 + 4.36 \cdot 10^{-4}\omega_y + 1.05 \cdot 10^{-4}\omega_y\alpha \\
 &\quad + 5.24 \cdot 10^{-5}\omega_y\delta_B), \\
 m_y &= -2.28 \cdot 10^{-3}\beta - 1.79 \cdot 10^{-6}\beta^3 - 1.4 \cdot 10^{-5}\delta_S - 7.0 \cdot 10^{-6}\delta_S\alpha + 9.0 \cdot 10^{-4}\delta_H \\
 &\quad - 4.0 \cdot 10^{-6}\delta_H\alpha - (180b)(2\pi v)(-6.63 \cdot 10^{-5}\omega_x - 1.92 \cdot 10^{-5}\omega_x\alpha \\
 &\quad + 5.06 \cdot 10^{-6}\omega_x\alpha^2 - 6.06 \cdot 10^{-3}\omega_y - 8.73 \cdot 10^{-5}\omega_y\delta_B + 8.7 \cdot 10^{-6}\omega_y\delta_B\alpha); \\
 m_z &= 6.61 \cdot 10^{-3} + 2.67 \cdot 10^{-3}\alpha + 6.48 \cdot 10^{-5}\beta^2 + 2.65 \cdot 10^{-6}\alpha\beta^2 + 6.54 \cdot 10^{-3}\delta_B \\
 &\quad + 8.49 \cdot 10^{-5}\delta_B\alpha - 3.74 \cdot 10^{-6}\delta_B\beta + 3.5 \cdot 10^{-5}\delta_S^2 \\
 &\quad - (180\omega_z\bar{c})(2\pi v)(-0.0473 - 1.57 \cdot 10^{-3}\alpha).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

В данных функциях коэффициентов все угловые аргументы измеряются в градусах, а угловые скорости — в рад/с.

Функции (4.1), (4.2) раскладываются в соответствии с (3.2) на части следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_z &= 6.61 \cdot 10^{-3} + 2.67 \cdot 10^{-3}\alpha - (180\omega_z\bar{c})(2\pi v)(-0.0473 - 1.57 \cdot 10^{-3}\alpha), \\
 \bar{c}_x &= -0.0434 + 2.39 \cdot 10^{-3}\alpha + (180\omega_z\bar{c})/(2\pi v)(8.73 \cdot 10^{-3} + 0.001\alpha - 1.75 \cdot 10^{-4}\alpha^2), \\
 \bar{c}_y &= 0.131 + 0.538\alpha - (180\omega_z\bar{c})/(2\pi v)(-0.111 + 5.17 \cdot 10^{-3}\alpha - 1.1 \cdot 10^{-3}\alpha^2), \\
 m'_z &= 6.54 \cdot 10^{-3} + 8.49 \cdot 10^{-5}\alpha, \\
 c'_x &= 9.5 \cdot 10^{-4}, \\
 c'_y &= 4.76 \cdot 10^{-3} + 3.3 \cdot 10^{-5}\alpha.
 \end{aligned}$$

Тяга силовой установки (в фунтах) выражается как функция от числа Маха и высоты (в десятках тысяч футов)

$$T_{\max}^* = T_{\max}^*(M, y) = 1000 \cdot [1, M, M^2, M^3, M^4] \begin{bmatrix} 30.21 & -0.668 & -6.877 & 1.951 & -0.1512 \\ -33.80 & 3.347 & 18.13 & -5.865 & 0.4757 \\ 100.80 & -77.56 & 5.441 & 2.864 & -0.3355 \\ -78.99 & 101.40 & -30.28 & 3.236 & -0.1089 \\ 18.74 & -31.60 & 12.04 & -1.785 & 0.09417 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y \\ y^2 \\ y^3 \\ y^4 \end{bmatrix}.$$

В численных экспериментах для обеспечения ограничения по числу Маха $M < 0.8$ режим работы двигателя ЛА принимается равным 30%. После перевода в метрическую систему значение тяги (в ньютонах) при указанном режиме может быть представлено в виде

$$P = T_{max}^*(M, \frac{y}{3048}) \cdot 0.45359237 \cdot 9.80665 \cdot 0.3.$$

Параметры ЛА согласно модели F-4 Phantom [2] имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} m &= 19050 \text{ kg}, & \delta_B^{\max} &= -\delta_B^{\min} = 15^\circ, \\ I_x &= 33854.76 \text{ kg} \cdot m^2, & I_y &= 189543.27 \text{ kg} \cdot m^2, & I_z &= 165667.32 \text{ kg} \cdot m^2, \\ S &= 49.2 \text{ m}^2, & l = \bar{c} &= 4.8768 \text{ m}, & L = b &= 11.796 \text{ m}. \end{aligned}$$

Уравнения движения с учетом (4.1), (4.2) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_z &= 6.036 \cdot 10^{-6} (119.969\rho v^2 (-316017(-0.0899544\alpha - 0.0473)\omega_z v \\ &\quad + 0.27871\alpha\delta_B + 0.15298\alpha + 0.374714\delta_B + 0.00661)), \\ \dot{v}_x &= \frac{1}{19050} \left(P(v_x, v_y, y) + 24.6\rho v^2 \left(\frac{8004.8\omega_z}{v} (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 0.00873) + 0.136937\alpha + 0.054431\delta_B - 0.0434 \right) - G \sin \vartheta \right) + \omega_z v_y, \\ \dot{v}_y &= \frac{1}{19050} \left(24.6\rho v^2 \left(-\frac{8004.8\omega_z}{v} (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 0.108333\alpha\delta_B + 30.8251\alpha + 0.272728\delta_B + 0.131 \right) - G \cos \vartheta \right) - \omega_z v_x, \\ \dot{\vartheta} &= \omega_z, \\ \dot{x} &= v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta, \\ \dot{y} &= v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Функция Понтрягина выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} H &= \Psi_2 \left[\frac{1}{19050} \left(P(v_x, v_y, y) + 24.6\rho v^2 \left(\frac{8004.8\omega_z}{v} (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha + 0.00873) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 0.136937\alpha + 0.054431\delta_B - 0.0434 \right) - G \sin \vartheta \right) + \omega_z v_y \right] \\ &+ \Psi_3 \left[\frac{1}{19050} \left(24.6\rho v^2 \left(-\frac{8004.8\omega_z}{v} (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) + 0.108333\alpha\delta_B \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 30.8251\alpha + 0.272728\delta_B + 0.131 \right) - G \cos \vartheta \right) - \omega_z v_x \right] \\ &+ 6.036 \cdot 10^{-6} \Psi_1 \left[119.969\rho v^2 (-316017(-0.0899544\alpha - 0.0473)\omega_z v + 0.27871\alpha\delta_B \right. \\ &\quad \left. + 0.15298\alpha + 0.374714\delta_B + 0.00661) \right] - (y - F(x))^2 + \omega_z \Psi_4 \\ &+ \Psi_5 (v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta) + \Psi_6 (v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Сопряженная система представима в виде

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1 &= -\Psi_2 (10.3369 (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha + 0.00873) \rho V + v_y) \\ &\quad - \Psi_3 (-10.3369 (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) \rho V - v_x) \\ &\quad + 228.846 (-0.0899544\alpha - 0.0473) \Psi_1 \rho V^3 - \Psi_4, \\ \dot{\Psi}_2 &= -\frac{1}{19050} \Psi_2 \frac{\partial P}{\partial v_x} + \omega_z \Psi_3 - \Psi_5 \cos \vartheta - \Psi_6 \sin \vartheta, \\ \dot{\Psi}_3 &= -\frac{1}{19050} \Psi_2 \left(\frac{\partial P}{\partial v_y} + \omega_z \right) + \Psi_5 \sin \vartheta - \Psi_6 \cos \vartheta, \\ \dot{\Psi}_4 &= \frac{1}{19050} G \Psi_2 \cos \vartheta - \frac{1}{19050} G \Psi_3 \sin \vartheta - \Psi_5 (-v_x \sin \vartheta - v_y \cos \vartheta) \\ &\quad - \Psi_6 (v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta), \\ \dot{\Psi}_5 &= -2(y - F(x)) F'(x), \\ \dot{\Psi}_6 &= 2(y - F(x)) - \frac{1}{19050} \Psi_2 \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned}$$

Функции f и g имеют вид

$$f = \begin{pmatrix} 6.036 \cdot 10^{-6} (-3.79123 \cdot 10^7 (-0.0899544\alpha - 0.0473)\omega_z \rho v^3 + 18.3529\alpha \rho v^2 + 0.792997\rho v^2) \\ \frac{P}{19050} + 10.3369 (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha + 0.00873) \omega_z \rho v + 0.000176832\alpha \rho v^2 - \frac{G \sin \vartheta}{19050} + \omega_z v_y - 0.0000560441\rho v^2 \\ -10.3369 (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) \omega_z \rho v + 0.0398057\alpha \rho v^2 + 0.0398057\alpha \rho v^2 - \frac{G \cos \vartheta}{19050} - \omega_z v_x + 0.000169165\rho v^2 \\ \omega_z \\ v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta \\ v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

$$g = \begin{pmatrix} 6.036 \cdot 10^{-6} (33.4367\alpha \rho v^2 + 44.9542\rho v^2) \\ 0.0000702888\rho v^2 \\ 0.000139894\alpha \rho v^2 + 0.000352184\rho v^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений особой поверхности (3.8) в данном случае определяется системой

$$\left\{ \begin{array}{l} 6.036 \cdot 10^{-6} \Psi_1 (33.4367\alpha \rho v^2 + 44.9542\rho v^2) + 0.0000702888 \Psi_2 \rho v^2 \\ + \Psi_3 (0.000139894\alpha \rho v^2 + 0.000352184\rho v^2) = 0, \\ (0.000139894\alpha \rho v^2 + 0.000352184\rho v^2) \left(-\Psi_2 \left(\frac{1}{19050} \frac{\partial P}{\partial v_y} + \omega_z \right) + \Psi_5 \sin \vartheta - \Psi_6 \cos \vartheta \right) \\ + 0.0000702888 \rho v^2 \left(-\frac{\Psi_2}{19050} \frac{\partial P}{\partial v_x} + \omega_z \Psi_3 - \Psi_5 \cos \vartheta - \Psi_6 \sin \vartheta \right) \\ + 6.036 \cdot 10^{-6} (33.4367\alpha \rho v^2 + 44.9542\rho v^2) \left[-\Psi_2 (10.3369 (-0.574491\alpha^2 + 0.0572958\alpha + 0.00873) \rho v + v_y) \right. \\ \left. - \Psi_3 (-10.3369 (-3.61109\alpha^2 + 0.296219\alpha - 0.111) \rho v - v_x) \right. \\ \left. + 228.846 (-0.0899544\alpha - 0.0473) \Psi_1 \rho v^3 - \Psi_4 \right] = 0. \end{array} \right.$$

В вычислительном эксперименте будем использовать следующие начальные условия:

$$\begin{aligned} \omega_z(0) &= 0, & \vartheta(0) &= 0, \\ v_x(0) &= 0.5M, & x(0) &= 0, \\ v_y(0) &= 0, & y(0) &= F(x(0)) = 150. \end{aligned}$$

В инженерной практике управления высотой полета часто используется понятие “упрежденного расстояния” D . Этот параметр системы управления определяет, на какой дальности от ЛА берется значение заданной высоты F . С физической точки зрения данный параметр характеризует удаленность впереди лежащей точки прицеливания, которая принадлежит кривой $F(x)$. В данной работе реализуется система управления, которая стремится повернуть строительную ось ЛА к вектору, направленному из центра масс ЛА в точку прицеливания (рис. 1). Кусочно-постоянная функция управления вводится следующим образом (см. рис. 1):

$$\delta_B = -\delta_B^{\max} \text{sign}(\varphi_1), \quad \text{где } \varphi_1 = \arccos \frac{\vec{i} \hat{v}}{|\hat{v}|}, \quad \hat{v} = \begin{pmatrix} \hat{v}_x \\ \hat{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D \\ F(x+D) - y \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

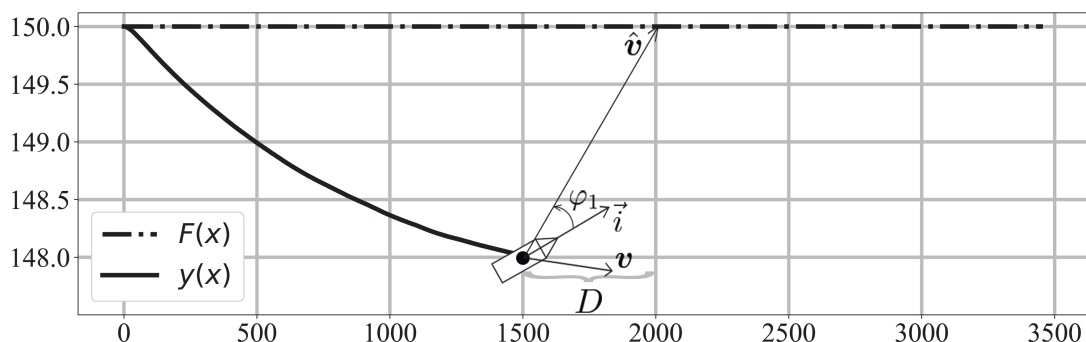


Рис. 1. Векторы, вычисляемые в системе управления.

Здесь \vec{i} — единичный базисный вектор оси Ox связанной системы координат; \hat{v} — направление на график $F(x)$, φ_1 — есть угол между строительной осью ЛА и направлением на график $F(x)$; D — заданный параметр “упрежденное расстояние” системы управления.

В качестве непрерывного аналога кусочно-постоянной функции рассматривается следующая функция:

$$\delta_B = -\delta_B^{\max} \cdot (2\varphi_1)/\pi, \quad -\pi/2 \leq \varphi_1 \leq \pi/2.$$

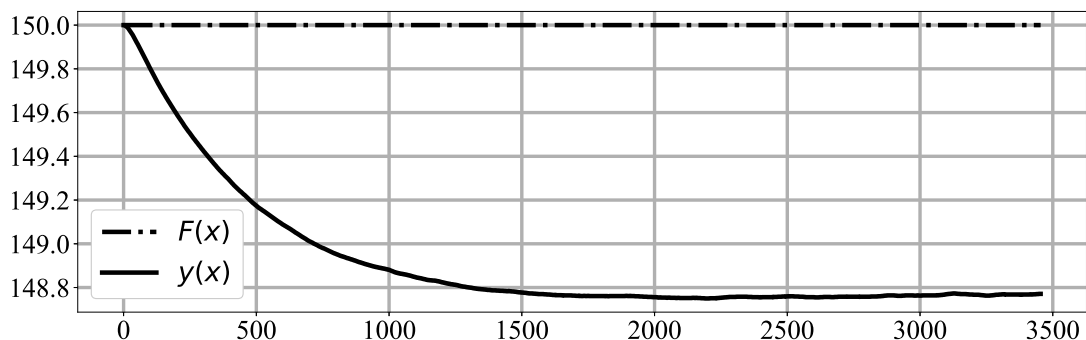
При данном управлении угол отклонения руля высоты может принимать любое значение из отрезка $[-\delta_B^{\max}, \delta_B^{\max}]$.

4.1. Результаты моделирования при полете над плоскостью

В данном разделе приведены результаты вычислительного эксперимента со значением “упрежденного расстояния” $D = 500$ м и константной заданной высотой $F(x) = 150$ м. Траектории движения центра масс для кусочно-постоянного и непрерывного управлений показаны на рис. 2 и на рис. 3 соответственно. Как видно из графиков, при полете над плоскостью кусочно-постоянное управление обеспечивает максимальное отклонение высоты полета от $F(x)$ меньше, чем 2 м. Отклонение высоты полета от $F(x)$ при непрерывном управлении достигает 95 м.

Заметим, что кусочно-постоянное управление (4.3) имеет точки переключения почти в каждом шаге интегрирования задачи Коши, в отличие от функции непрерывного управления (рис. 4).

Численное решение сопряженной системы (3.7) показало, что траектория $(\mathbf{X}^T(t), \mathbf{\Psi}^T(t))^T$ не попадает на особую поверхность (3.8) для каждой рассматриваемой функции управления.

Рис. 2. Высота полета при кусочно-постоянном $\delta_B(\cdot)$.

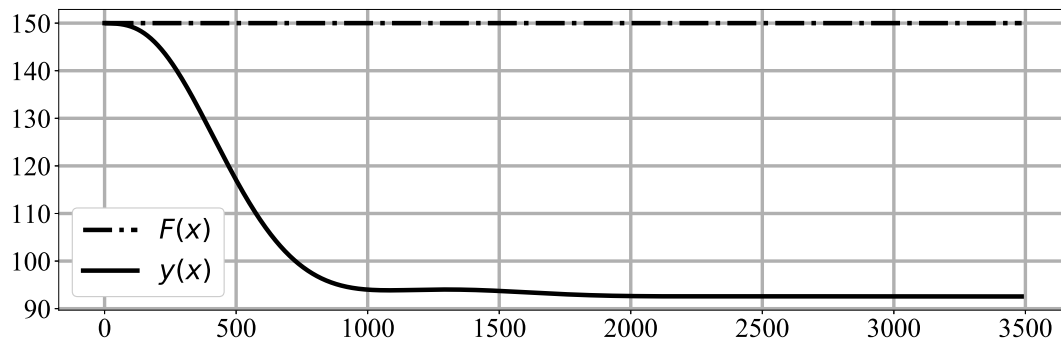


Рис. 3. Высота полета при непрерывном $\delta_v(\cdot)$.

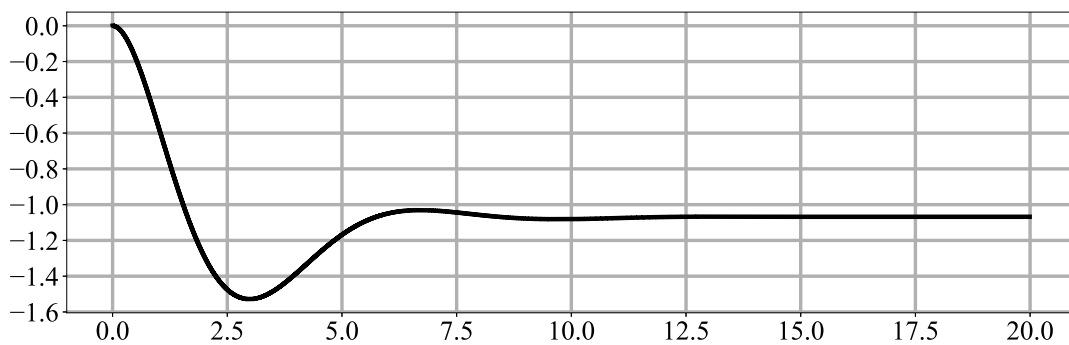


Рис. 4. Отклонение руля высоты $\delta_v(t)$ при непрерывном управлении, в градусах.

4.2. Результаты моделирования при полете над препятствием

В данном разделе показаны результаты моделирования полета над препятствием в виде прямоугольника высотой 100 м и протяженностью 20 км. В вычислительном эксперименте в качестве функции заданной высоты используется дискретное приближение гладкой непрерывной функции $F(x)$, график которой изображен на рис. 5, 6 штрихпунктирной линией. Результаты эксперимента показаны для двух значений параметра $D = 500$ м и $D = 1000$ м. Интегрирование производилось на отрезке времени от нуля до $T = 200$ с.

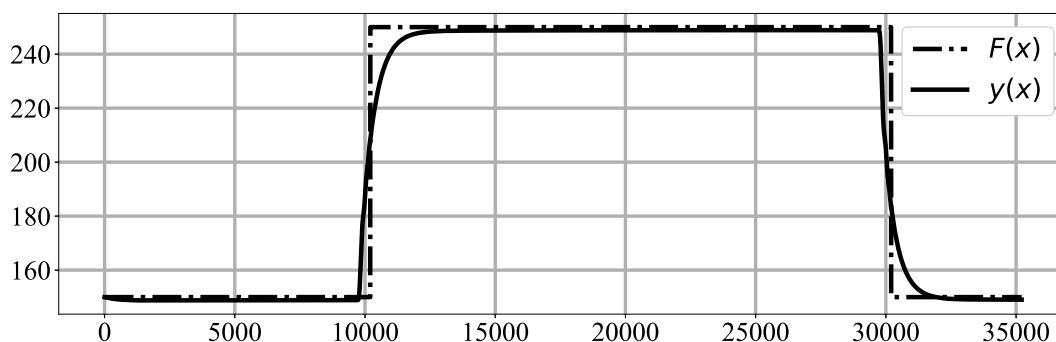
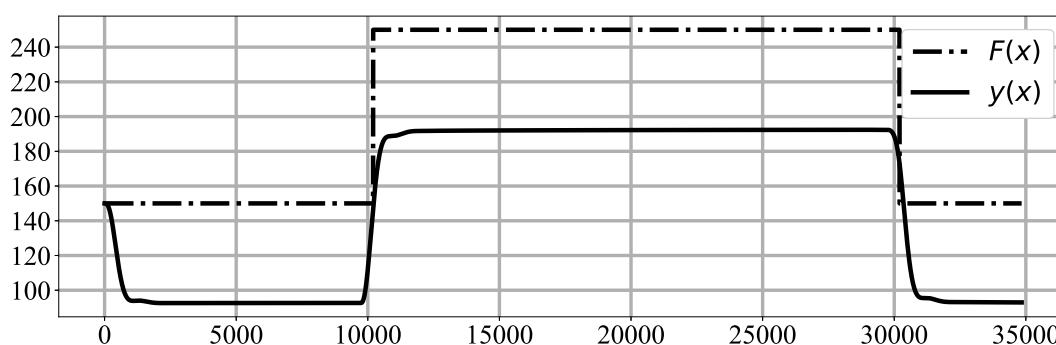
Траектории движения при управлении со значением параметра $D = 500$ м. показаны на рис. 5 и 6 сплошной линией. Кусочно-постоянному управлению соответствует рис. 5, при этом значение функционала (см. (3.5)) $I = 2,27 \cdot 10^6$. Непрерывному управлению соответствует рис. 6, а функционал имеет значение $I = 1,12 \cdot 10^8$.

Вычислительный эксперимент показал, что при увеличении “упрежденного расстояния” качество управления ухудшается. В случае, если параметр $D = 1000$ м, функционал принимает значения $I = 4,85 \cdot 10^6$ при кусочно-постоянном управлении и $I = 4,47 \cdot 10^8$ при непрерывном управлении.

По результатам моделирования можно утверждать, что при указанных условиях эксперимента кусочно-постоянное управление минимизирует функционал на два порядка эффективнее, чем непрерывное.

Заключение

Полученные теоретические результаты позволяют искать оптимальное управление задачи “чистого” огибания рельефа в более узком классе функций. Результаты численных экспери-

Рис. 5. Высота полета при кусочно-постоянном $\delta_B(\cdot)$, $D = 500$ м.Рис. 6. Высота полета при непрерывном $\delta_B(\cdot)$, $D = 500$ м.

ментов показали, что при всей простоте рассматриваемых систем кусочно-постоянное управление обеспечивает требование безопасности полета. Однако оно требует частого переключения. Этот недостаток может быть устранен введением ограничения снизу на длину отрезков постоянства значений $\delta_B(t)$. Непрерывная функция управления допускает большие отклонения от заданной высоты полета, что не может гарантировать выполнение условия безопасности. В совокупности с теоретическими результатами можно заключить, что при последующем совершенствовании алгоритма вычисления кусочно-постоянного управляющего воздействия качество управления можно улучшить.

Автор благодарит своего научного руководителя В.Б. Костоусова за плодотворное обсуждение постановки задачи и результатов работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lu Ping, Pierson Bion.** Optimal aircraft terrain-following analysis and trajectory generation // J. of Guidance, Control, and Dynamics. 1995. Vol. 18. P. 555–560. doi: 10.2514/3.21422.
2. **Williams Paul.** Real-time computation of optimal three-dimensional aircraft trajectories including terrain-following // AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit (21–24 August 2006, Keystone, Colorado). No. AIAA-2006-6603. 2006. doi: 10.2514/6.2006-6603.
3. ГОСТ 4401-81. Атмосфера стандартная. Параметры, М.: ИПК Издательство стандартов, 2004. 180 с.
4. **Stevens B.L., Lewis F.L., Johnson E.N.** Aircraft control and simulation: Dynamics, controls design, and autonomous systems. Third ed. N Y: Wiley-Blackwell, 2015. 768 p. doi: 10.1002/9781119174882.
5. **Горбатенко С.А., Макашов Э.М., Полушкин Ю.Ф., Шефтель Л.В.** Механика полета (Общие сведения Уравнения движения): Инж. справочник. М.: Машиностроение, 1969. 420 с.
6. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

7. Иoffee А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.
8. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. Москва: Мир, 1972, 544 с.

Поступила 2.03.2020

После доработки 5.05.2020

Принята к публикации 18.05.2020

Паршиков Андрей Викторович

бакалавр

старший программист

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: a.v.parshikov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lu Ping, Pierson Bion. Optimal aircraft terrain-following analysis and trajectory generation. *J. of Guidance, Control, and Dynamics*, 1995, vol. 18, pp. 555-560, doi: 10.2514/3.21422.
2. Williams Paul. Real-time computation of optimal three-dimensional aircraft trajectories including terrain-following. *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit* (21–24 August 2006, Keystone, Colorado), no. AIAA-2006-6603. doi: 10.2514/6.2006-6603.
3. Russian Standard GOST 4401-81. *Atmosfera standartnaya. Parametry* [Standard atmosphere. Parameters]. Moscow: IPK Izdatel'stvo standartov, 2004, 180 p.
4. Stevens B.L., Lewis F.L., Johnson E.N. *Aircraft Control and Simulation: Dynamics, Controls Design, and Autonomous Systems*, 3rd ed. N Y: Wiley-Blackwell, 2015, 768 p. DOI: 10.1002/9781119174882.
5. Gorbatenko S.A., Makashov E.M., Polushkin Yu.F., Sheftel L.V. *Mekhanika poleta* [Flight mechanics]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1969, 420 p.
6. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. N Y; London: John Wiley & Sons, 1962, 515 p. doi: 10.1002/zamm.19630431023. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Moscow: Nauka Publ., 1983, 392 p.
7. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems*. Ser. Studies in Math. and its Appl., vol. 6. Amsterdam; N Y; Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979, 460 p. ISBN: 0444851674. Original Russian text published in Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach*. Moscow: Nauka Publ., 1974, 480 p.
8. Bryson A. E. Jr., Ho Yu-Chi. *Applied optimal control*. Waltham, Mass.: Blaisdell Publ. Comp., 1969, 496 p. Translated to Russian under the title *Prikladnaya teoriya optimal'nogo upravleniya*. Moscow: Mir Publ., 1972, 544 p.

Received March 2, 2020

Revised May 5, 2020

Accepted May 18, 2020

Andrey Victorovich Parshikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: a.v.parshikov@imm.uran.ru.

Cite this article as: A. V. Parshikov. Optimal control of a low-altitude flight in the terrain-following mode. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 225-237.