ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 519.65

О СВЯЗИ МЕЖДУ ВТОРОЙ РАЗДЕЛЕННОЙ РАЗНОСТЬЮ И ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

С. И. Новиков, В. Т. Шевалдин

В работе сформулирована общая задача экстремальной функциональной интерполяции (для конечных разностей это задача Яненко — Стечкина — Субботина) действительных функций, имеющих почти всюду n-ю производную на оси $\mathbb{R}$. Требуется найти наименьшее значение этой производной в равномерной норме на классе функций, интерполирующих любую заданную последовательность $y=\{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ действительных чисел на произвольной, бесконечной в обе стороны сетке узлов $\Delta=\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для класса последовательностей Y, у которых все разделенные разности n-го порядка на такой сетке узлов ограничены сверху по модулю фиксированным положительным числом. В данной работе эта задача решается в случае $n=2$. Для величины второй производной по схеме Ю. Н. Субботина получены оценки снизу и сверху, которые совпадают между собой для геометрической сетки узлов вида $\Delta_p=\{p^kh\}_{k=-\infty}^{\infty}$ $(h>0,\ p\geq 1)$. Оценки получены в терминах отношений соседних шагов сетки и интерполируемых значений.

Ключевые слова: интерполяция, разделенная разность, сплайны, производные.

S. I. Novikov, V. T. Shevaldin. On the connection between the second divided difference and the second derivative.

We formulate the general problem of the extremal interpolation of real-valued functions with the nth derivative defined almost everywhere on the axis $\mathbb{R}$ (for finite differences, this is the Yanenko–Stechkin–Subbotin problem). It is required to find the smallest value of this derivative in the uniform norm on the class of functions interpolating any given sequence $y=\{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ of real numbers on an arbitrary, infinite in both directions node grid $\Delta=\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ for a class of sequences Y such that the moduli of their nth-order divided differences on this node grid are upper bounded by a fixed positive number. We solve this problem in the case $n=2$. For the value of the second derivative according to Yu. N. Subbotin's scheme, we derive upper and lower estimates, which coincide for a geometric node grid of the form $\Delta_p=\{p^kh\}_{k=-\infty}^{\infty}$ $(h>0,\ p\geq 1)$. The estimates are derived in terms of the ratios of neighboring steps of the gird and interpolated values.

Keywords: interpolation, divided difference, splines, derivatives.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-216-224

Введение. Постановка задачи

Пусть n — произвольное натуральное число и на оси $\mathbb{R}$ задана бесконечная в обе стороны сетка узлов $\Delta=\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ вида

$$a<\cdots<x_k<x_{k+1}<x_{k+2}<\cdots<b,$$

где $a=\inf_k x_k,\ b=\sup_k x_k$. Здесь a может быть числом или $a=-\infty$, и аналогично b также может быть числом или $b=+\infty$.

Рассмотрим действительную функцию $f\colon(a;b)\to\mathbb{R}$, и пусть $f(x_k)=y_k$ $(k\in\mathbb{Z})$, где $y=\{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — произвольная последовательность действительных чисел. Как обычно, разделенная разность порядка n на сетке Δ определяется при помощи равенств

$$f[x_{k+1},x_k]=[y_{k+1},y_k]=\frac{y_{k+1}-y_k}{x_{k+1}-x_k},$$

$$f[x_{k+2},x_{k+1},x_k]=[y_{k+2},y_{k+1},y_k]=\frac{[y_{k+2},y_{k+1}]-[y_{k+1},y_k]}{x_{k+2}-x_k},$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$f[x_{k+n},x_{k+n-1},\dots,x_{k+1},x_k]=[y_{k+n},y_{k+n-1},\dots,y_{k+1},y_k]=\frac{[y_{k+n},\dots,y_{k+1}]-[y_{k+n-1},\dots,y_k]}{x_{k+n}-x_k}.$$

Определим класс последовательностей

$$Y=\bigl\{y=\{y_k\}_{k=-\infty}^{\infty}\colon \sup_k\bigl|[y_{k+n},y_{k+n-1},\dots,y_{k+1},y_k]\bigr|\le 1\bigr\}$$

и класс интерполирующих функций

$$F=F(y)=\bigl\{f\colon f^{(n-1)}\in AC,\ f^{(n)}\in L_\infty(a;b),\ f(x_k)=y_k\quad (k\in\mathbb{Z})\bigr\}.$$

Здесь, как обычно, AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $L_\infty=L_\infty(a;b)$ — класс функций, существенно ограниченных на $(a;b)$ с обычным определением нормы

$$\|f\|_\infty=\|f\|_{L_\infty(a;b)}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in(a;b)}|f(x)|.$$

Задача *экстремальной функциональной интерполяции* заключается в точном нахождении величины

$$A_n=A_n(\Delta)=\sup_{y\in Y}\inf_{f\in F(y)}\|f^{(n)}\|_\infty. \tag{0.1}$$

Эту задачу можно считать обратной к следующему известному свойству разделенных разностей: если n-я производная некоторой действительной функции $f(x)$ ограничена сверху по модулю для всех $x\in(a;b)$ некоторой положительной константой M, то абсолютная величина соответствующей разделенной разности n-го порядка на любой сетке узлов Δ из промежутка $(a;b)$ не превосходит числа $M/(n!)$ (см., например, [1, гл. 1, с. 40]).

Для конечных разностей n-го порядка (т. е. в случае $h_k=x_{k+1}-x_k=h>0$ для всех $k\in\mathbb{Z}$) эта задача возникла в начале 1960-х годов в исследованиях академика Н. Н. Яненко, а именно, в задачах вычислительной математики при замене дифференциальных операторов разностными. При этом экстремальную постановку в форме (0.1) предложил С. Б. Стечкин, а полностью исследовал задачу Ю. Н. Субботин в пространствах $L_\infty(\mathbb{R})$ и $L_q(\mathbb{R})$ $(1\le q<\infty)$ в работах [2–4]. Все ссылки и многочисленные обобщения и применения в различных направлениях содержатся в недавней обзорной статье (Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т. Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225). Отметим также, что оценки производных интерполирующих функций через разделенные разности интерполируемых значений можно найти в работе [5] и приведенной в ней литературе. Однако, рассмотренная там задача отличается от изучаемой в настоящей работе.

В данной работе мы изучаем задачу (0.1) для произвольной сетки Δ, а также для класса геометрических сеток Δ_p вида

$$\frac{h_{k+1}}{h_k}=p,\quad h_k=x_{k+1}-x_k\quad (k\in\mathbb{Z}),\quad p\ge 1. \tag{0.2}$$

При $p=1$ (т.е. для равномерной сетки узлов интерполяции) величину (0.1) при любом натуральном n вычислил Ю. Н. Субботин [2] в 1965 г., в частности, он доказал равенства $A_2(\Delta_1)=4$, $A_3(\Delta_1)=18$. Ю. Н. Субботин [2–4] предложил оригинальный метод решения подобных задач, в котором при оценке сверху величины A_n естественным образом возникали полиномиальные сплайны и их обобщения. В свою очередь, его метод нахождения оценки снизу величины (0.1) дал способ построения узлов этих сплайнов (при фиксированных узлах интерполяции $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$).

Настоящая работа посвящена случаю $n=2$. Основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для любой сетки узлов* Δ *имеет место двойное неравенство*

$$A \le A_2(\Delta) \le B,$$

где

$$A = \overline{\lim_{N\to\infty}}\left[\frac{1}{4N}\sum_{k=-N+1}^{N}\frac{1}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k}+2+\frac{h_{k+1}}{h_k}\right)}\left(\frac{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}+\frac{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}\right)\right]^{-1},$$

$$B = 2\left[\inf_{k\in\mathbb{Z}}\left(1-\frac{2\left(1+\frac{h_k}{h_{k+1}}\right)}{\left(\frac{h_k}{h_{k+1}}+2+\frac{h_{k+2}}{h_{k+1}}\right)^2}-\frac{2\left(1+\frac{h_{k+1}}{h_k}\right)}{\left(\frac{h_{k-1}}{h_k}+2+\frac{h_{k+1}}{h_k}\right)^2}\right)\right]^{-1}.$$

З а м е ч а н и е 1. Числа A и B удовлетворяют неравенствам $A \ge 2,\ B \le 18$.

Теорема 2. *Для класса сеток* Δ_p $(p \ge 1)$ *имеет место равенство*

$$A_2(\Delta_p) = A = B = \frac{2(p+1)^2}{p^2+1}.$$

З а м е ч а н и е 2. Функция $A_2(\Delta_p)$ убывает по параметру p $(1 \le p \le \infty)$ от $A_2(\Delta_1) = 4$ до $A_2(\Delta_\infty) = 2$.

Первый раздел данной статьи имеет вспомогательный характер. В нем приведено представление разделенной разности второго порядка в виде суммы интегралов. В разд. 2 найдена оценка снизу величины $A_2(\Delta)$ в теореме 1, в разд. 3 установлена соответствующая оценка сверху. Завершающий раздел работы посвящен доказательству теоремы 2 и замечаний 1 и 2. Они являются следствиями основной теоремы 1.

1. Формула для разделенной разности второго порядка

Пусть $n = 2$ и $y \in Y$. Функцию $f \in F(y)$ с помощью формулы Тейлора запишем в виде

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \int_{x_k}^{x}(x-t)f''(t)\,dt \quad (x \in (a;b)).$$

Из этой формулы имеем

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + f'(x_k)h_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-t)f''(t)\,dt,$$

$$f(x_{k+2}) = f(x_k) + f'(x_k)(h_{k+1}+h_k) + \int_{x_k}^{x_{k+2}}(x_{k+2}-t)f''(t)\,dt,$$

$$f[x_{k+2},x_{k+1},x_k] = [y_{k+2},y_{k+1},y_k] = \frac{f(x_{k+2})}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})} - \frac{f(x_{k+1})}{h_{k+1}h_k} + \frac{f(x_k)}{h_k(h_k+h_{k+1})}$$

$$= \frac{1}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}\left[f(x_k) + f'(x_k)(h_{k+1}+h_k) + \int_{x_k}^{x_{k+2}}(x_{k+2}-t)f''(t)\,dt\right]$$

$$-\frac{1}{h_kh_{k+1}}\left[f(x_k) + f'(x_k)h_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}}(x_{k+1}-t)f''(t)\,dt\right] + \frac{f(x_k)}{h_k(h_k+h_{k+1})}$$

$$= \frac{1}{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})} \int\limits_{x_k}^{x_{k+2}} (x_{k+2}-t) f''(t)\,dt - \frac{1}{h_k h_{k+1}} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1}-t) f''(t)\,dt, \tag{1.1}$$

поскольку все неинтегральные слагаемые взаимно уничтожаются в силу того, что разделенная разность второго порядка обращается в нуль на линейных функциях. Из (1.1) получаем

$$[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{1}{h_k+h_{k+1}} \Bigg(\int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{x_{k+2}-t}{h_{k+1}} f''(t)\,dt + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{t-x_k}{h_k} f''(t)\,dt \Bigg). \tag{1.2}$$

2. Оценка снизу величины $A_2(\Delta)$

Для получения оценки снизу величины $A_2(\Delta)$ рассмотрим произвольную последовательность $y^* = \{y_k^*\}_{k=-\infty}^{\infty} \in Y$, удовлетворяющую условию

$$[y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*] = (-1)^k \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{2.1}$$

Таких последовательностей бесконечно много. В самом деле, задавая, например, произвольным образом числа y_0^* и y_1^*, из (2.1) последовательно находим остальные члены этой последовательности.

Из (1.2) и (2.1) при $N \geq 2$ получим

$$2N+1 = \sum_{k=-N}^{N} (-1)^k [y_{k+2}^*, y_{k+1}^*, y_k^*]$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} \frac{(-1)^k}{h_k+h_{k+1}} \Bigg(\int\limits_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{x_{k+2}-t}{h_{k+1}} f''(t)\,dt + \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{t-x_k}{h_k} f''(t)\,dt \Bigg) = S_1 + S_2, \tag{2.2}$$

где

$$\begin{gathered} S_1 = \frac{(-1)^N}{h_N+h_{N+1}} \int\limits_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} \frac{x_{N+2}-t}{h_{N+1}} f''(t)\,dt + \frac{(-1)^N}{h_{-N}+h_{-N+1}} \int\limits_{x_{-N}}^{x_{-N+1}} \frac{t-x_{-N}}{h_{-N}} f''(t)\,dt, \\ S_2 = \sum_{k=-N+1}^{N} (-1)^k \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \Big(\frac{t-x_k}{h_k} \frac{1}{h_k+h_{k+1}} - \frac{x_{k+1}-t}{h_k} \frac{1}{h_{k-1}+h_k} \Big) f''(t)\,dt. \end{gathered} \tag{2.3}$$

И з (2.3) имеем

$$|S_1| \leq \Bigg[\frac{1}{h_{N+1}(h_N+h_{N+1})} \int\limits_{x_{N+1}}^{x_{N+2}} (x_{N+2}-t)\,dt + \frac{1}{h_{-N}(h_{-N}+h_{-N+1})} \int\limits_{x_{-N}}^{x_{-N+1}} (t-x_{-N})\,dt \Bigg]$$

$$\times \sup_{t\in(a;b)} |f''(t)| \leq \sup_{t\in(a;b)} |f''(t)|, \tag{2.4}$$

поскольку выражение в квадратных скобках в неравенстве (2.4) не превосходит 1. Для оценки величины S_2 рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_k(t) = \frac{t-x_k}{h_k(h_k+h_{k+1})} - \frac{x_{k+1}-t}{h_k(h_{k-1}+h_k)} \quad (t \in [x_k; x_{k+1}]), \quad k = \overline{-N+1, N}. \tag{2.5}$$

Каждая из этих функций линейна по переменной t и имеет единственный нуль

$$t_k = \frac{x_k(h_{k-1}+h_k) + x_{k+1}(h_k+h_{k+1})}{h_{k-1}+2h_k+h_{k+1}} \tag{2.6}$$

на интервале $(x_k; x_{k+1})$ $(k = \overline{-N+1, N})$. Далее из (2.3) следует, что

$$|S_2| \le \Bigg[\sum_{k=-N+1}^{N} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi_k(t)|\,dt\Bigg] \sup_{t\in(a;b)} |f''(t)|. \tag{2.7}$$

Из (2.5) после несложных вычислений получаем, что выражение в квадратных скобках в равенстве (2.7) равно

$$\sum_{k=-N+1}^{N} \frac{h_k}{2(h_{k-1}+2h_k+h_{k+1})}\Big(\frac{h_k+h_{k+1}}{h_{k-1}+h_k}+\frac{h_{k-1}+h_k}{h_k+h_{k+1}}\Big). \tag{2.8}$$

Таким образом, при любом натуральном числе $N \ge 2$ из (2.2)–(2.8) приходим к оценке

$$\sup_{t\in(a;b)} |f''(x)| \ge \frac{2N+1}{K}, \tag{2.9}$$

где

$$K = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=-N+1}^{N} \frac{1}{\big(\frac{h_{k-1}}{h_k}+2+\frac{h_{k+1}}{h_k}\big)}\left(\frac{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}+\frac{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}\right).$$

Устремляя число N к бесконечности, из неравенства (2.9) для величины $A_2(\Delta)$ получаем оценку снизу

$$A_2(\Delta) \ge A = \varlimsup_{N\to\infty}\left[\frac{1}{4N}\sum_{k=-N+1}^{N} \frac{1}{\big(\frac{h_{k-1}}{h_k}+2+\frac{h_{k+1}}{h_k}\big)}\left(\frac{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}+\frac{1+\frac{h_{k-1}}{h_k}}{1+\frac{h_{k+1}}{h_k}}\right)\right]^{-1}. \tag{2.10}$$

Интересно заметить, что в выписанной оценке фигурируют только отношения соседних шагов h_k исходной сетки Δ.

3. Оценка сверху величины $A_2(\Delta)$

Покажем, что для любой последовательности $y \in Y$ существует функция f — интерполяционный параболический сплайн с узлами в точках $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ (см. (2.6)), который интерполирует значения последовательности y в точках $\{x_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ (т. е. $f(x_k) = y_k$ $(k \in \mathbb{Z})$), и для него справедлива оценка

$$A_2(\Delta) \le B$$

(см. формулировку теоремы 1).

Построим этот параболический сплайн. Равенства (2.6) задают его узлы $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Для любого числа $k \in \mathbb{Z}$ полагаем

$$f''(t) = \begin{cases} Z_k, & x_k \le t < t_k, \\ Z_{k+1}, & t_k \le t < t_{k+1}, \\ Z_{k+2}, & t_{k+1} \le t < x_{k+2}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Поскольку $f(x_k) = y_k$, то из (1.2) и (3.1) выводим следующее равенство:

$$[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = \frac{1}{h_k+h_{k+1}}\Bigg(Z_{k+2}\int\limits_{t_{k+1}}^{x_{k+2}} \frac{x_{k+2}-t}{h_{k+1}}\,dt + Z_{k+1}\int\limits_{x_{k+1}}^{t_{k+1}} \frac{x_{k+2}-t}{h_{k+1}}\,dt$$

$$+ Z_{k+1}\int\limits_{t_k}^{x_{k+1}} \frac{t-x_k}{h_k}\,dt + Z_k\int\limits_{x_k}^{t_k} \frac{t-x_k}{h_k}\,dt\Bigg) = \frac{1}{2}(a_k Z_{k+2} + b_k Z_{k+1} + c_k Z_k), \tag{3.2}$$

где

$$a_k = \frac{h_{k+1}(h_k+h_{k+1})}{(h_k+2h_{k+1}+h_{k+2})^2}, \quad c_k = \frac{h_k(h_k+h_{k+1})}{(h_{k-1}+2h_k+h_{k+1})^2}, \quad b_k = 1 - a_k - c_k. \tag{3.3}$$

Лемма 1. *При любом $k \in \mathbb{Z}$ имеют место неравенства*

$$0 < a_k < \frac{1}{4}, \quad 0 < c_k < \frac{1}{4}, \quad a_k + c_k < \frac{4}{9}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первые два неравенства легко следуют из (3.3). Для доказательства третьего неравенства обозначим

$$\frac{h_k}{h_{k+1}} = a, \quad \frac{h_{k+2}}{h_{k+1}} = b, \quad \frac{h_{k-1}}{h_k} = c.$$

Тогда $a, b, c > 0$ и

$$a_k + c_k = \frac{a+1}{(a+2+b)^2} + \frac{1+1/a}{(c+2+1/a)^2} < \frac{a+1}{(a+2)^2} + \frac{a(a+1)}{(2a+1)^2}.$$

Нетрудно убедиться в том, что функция

$$g(a) = \frac{a+1}{(a+2)^2} + \frac{a(a+1)}{(2a+1)^2}$$

положительна при $a > 0$ и имеет максимум в точке $a = 1$, причем $g(1) = 4/9$.

Лемма доказана.

Следствие. *При любом $k \in \mathbb{Z}$ имеют место следующие неравенства:*

$$\frac{5}{9} < b_k < 1, \quad \frac{1}{9} < 1 - 2a_k - 2c_k < 1.$$

Лемма 2. *Для любой последовательности $y \in Y$ разностное уравнение* (3.2) *имеет ограниченное решение, и это решение единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство (3.2) с учетом (3.3) переписываем в виде

$$a_k(Z_{k+1} - Z_{k+2}) + c_k(Z_{k+1} - Z_k) + 2[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k] = Z_{k+1} \quad (k \in \mathbb{Z}). \tag{3.4}$$

Через $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z})$ обозначаем пространство бесконечных в обе стороны ограниченных последовательностей $V = \{v_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ с нормой $\|V\|_{l_\infty} = \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |v_k|$. Рассмотрим нелинейный оператор T, который ставит в соответствие произвольной последовательности $Z = \{Z_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_\infty$ последовательность

$$\bigl\{a_k(Z_{k+1} - Z_{k+2}) + c_k(Z_{k+1} - Z_k) + 2[y_{k+2}, y_{k+1}, y_k]\bigr\}_{k=-\infty}^{\infty} \in l_\infty.$$

В силу леммы 1 и неравенств

$$\|TZ^{(1)} - TZ^{(2)}\|_{l_\infty} = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \Bigl| a_k\bigl(Z_{k+2}^{(2)} - Z_{k+2}^{(1)}\bigr) + a_k\bigl(Z_{k+1}^{(1)} - Z_{k+1}^{(2)}\bigr)$$

$$+ c_k\bigl(Z_k^{(2)} - Z_k^{(1)}\bigr) + c_k\bigl(Z_{k+1}^{(1)} - Z_{k+1}^{(2)}\bigr)\Bigr| \le 2(a_k + c_k)\bigl\|Z^{(1)} - Z^{(2)}\bigr\|_{l_\infty} < \frac{8}{9}\bigl\|Z^{(1)} - Z^{(2)}\bigr\|_{l_\infty}$$

этот оператор является сжимающим оператором в полном метрическом пространстве l_∞ с константой сжатия $8/9 < 1$. Здесь $Z^{(1)} = \{Z_k^{(1)}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ и $Z^{(2)} = \{Z_k^{(2)}\}_{k=-\infty}^{\infty}$. Поэтому согласно известной теореме о сжимающем операторе уравнение $TZ = Z$ (т. е. разностное уравнение (3.4)) имеет решение, и это решение единственно.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для решения разностного уравнения* (3.2) *справедлива следующая оценка:*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |Z_k| \le \frac{2}{\inf\limits_{k\in\mathbb{Z}} (1 - 2a_k - 2c_k)}. \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z = \{Z_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ — ограниченное решение разностного уравнения (3.2), существование и единственность которого доказаны в лемме 2.

Обозначим левую часть неравенства (3.5) через α, а правую — через γ, α и γ — положительные числа, и нам требуется установить неравенство

$$\alpha \le \gamma.$$

Будем рассуждать от противного. Пусть $\alpha > \gamma$. Тогда существует положительное число β такое, что $\alpha > \gamma + \beta$ (например, можно взять $\beta = 1/2(\alpha - \gamma)$). Поскольку $\alpha = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |Z_k|$, то для любого числа $k \in \mathbb{Z}$ имеет место неравенство $|Z_k| \le \alpha$, и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число m, что

$$\alpha - \varepsilon < |Z_{m+1}| \le \alpha.$$

Не ограничивая общности, далее будем считать, что $Z_{m+1} > 0$ и поэтому $\alpha - \varepsilon < Z_{m+1} \le \alpha$. Оценим величину

$$D_m = |a_m Z_{m+2} + b_m Z_{m+1} + c_m Z_m|$$

сверху и снизу и придем тем самым к противоречию.

Поскольку $y \in Y$, то

$$D_m = 2\big|[y_{m+2}, y_{m+1}, y_m]\big| \le 2. \tag{3.6}$$

С другой стороны,

$$D_m \ge \big|b_m Z_{m+1} - |a_m Z_{m+2} + c_m Z_m|\big|. \tag{3.7}$$

Рассмотрим выражение, стоящее под знаком внешнего модуля в правой части (3.7). Имеем

$$b_m Z_{m+1} - |a_m Z_{m+2} + c_m Z_m| > b_m(\alpha - \varepsilon) - (a_m + c_m)\alpha = \alpha(b_m - a_m - c_m) - b_m\varepsilon$$

$$> (\gamma + \beta)(b_m - a_m - c_m) - b_m\varepsilon = \gamma(b_m - a_m - c_m) + \beta(b_m - a_m - c_m) - b_m\varepsilon. \tag{3.8}$$

В силу определения числа γ имеем

$$\gamma(b_m - a_m - c_m) = \gamma(1 - 2a_m - 2c_m) \ge 2.$$

Далее в силу леммы 1 и следствия из нее получаем

$$\beta(b_m - a_m - c_m) - b_m\varepsilon > \frac{\beta}{9} - \varepsilon,$$

а затем из (3.7) и (3.8) выводим неравенство

$$D_m > 2 + \frac{\beta}{9} - \varepsilon,$$

где ε — произвольное положительное число и $m = m(\varepsilon)$. Устремляем число ε к нулю и получаем, что для некоторого числа $m \in \mathbb{Z}$ имеет место неравенство $D_m > 2$, что противоречит (3.6).

Лемма доказана.

Из леммы 3 следует оценка сверху для $A_2(\Delta)$ в теореме 1

$$A_2(\Delta) \le B = 2\left[\inf_{k\in\mathbb{Z}}\left(1 - \frac{2\big(1 + \frac{h_k}{h_{k+1}}\big)}{\big(\frac{h_k}{h_{k+1}} + 2 + \frac{h_{k+2}}{h_{k+1}}\big)^2} - \frac{2\big(1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\big)}{\big(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\big)^2}\right)\right]^{-1}.$$

Оценка снизу для $A_2(\Delta)$ (см. (2.10)) получена в предыдущем разделе.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2 и замечаний 1, 2

Для геометрических сеток Δ_p, удовлетворяющих условию $\dfrac{h_{k+1}}{h_k} = p\ (k \in \mathbb{Z}),\ p \geq 1$, величины

$$\alpha_k = \frac{1}{\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}} \left(\frac{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}} + \frac{1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}}{1 + \frac{h_{k-1}}{h_k}} \right),$$

$$\beta_k = 1 - \frac{2\big(1 + \frac{h_k}{h_{k+1}}\big)}{\big(\frac{h_k}{h_{k+1}} + 2 + \frac{h_{k+2}}{h_{k+1}}\big)^2} - \frac{2\big(1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\big)}{\big(\frac{h_{k-1}}{h_k} + 2 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\big)^2} \tag{4.1}$$

не зависят от k, и нетрудно убедиться в том, что

$$A = B = \frac{2(p+1)^2}{p^2+1} \quad (p \geq 1).$$

Отсюда следует справедливость теоремы 2 и замечания к ней. □

Лемма 4. *Имеют место равенства*

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k = 1, \quad \inf_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k = \frac{1}{9}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{x+y}\Big(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\Big),$$

где

$$x = 1 + \frac{h_{k-1}}{h_k} \geq 1 \ \text{ и } \ y = 1 + \frac{h_{k+1}}{h_k} \geq 1.$$

Эта функция от переменной x при фиксированном значении $y \geq 1$ имеет на полуоси $[1;+\infty)$ единственную точку минимума $x_0 = y + y\sqrt{2}$. Кроме того, $\varphi(1,y) = \dfrac{1+y^2}{y+y^2} \leq 1$ и $\varphi(1,\infty) = 1/y$. Отсюда следует, что $\sup\limits_{x,y\geq 1} \varphi(x,y) = 1$, и поэтому из (4.1) получаем, что

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k = 1.$$

Второе равенство леммы 4 следует из доказательства леммы 1 и следствия из нее.

Лемма доказана.

Из леммы 4 получаем, что $A \geq 2$ и $B \leq 18$, и тем самым замечание 1 доказано. □

Заключение

Было бы интересно найти все сетки Δ, для которых совпадают величины A и B, фигурирующие в теореме 1 в оценках снизу и сверху минимального значения второй производной в задаче (0.1) экстремальной функциональной интерполяции при $n = 2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гельфонд А.О.** Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967. 376 с.
2. **Субботин Ю.Н.** О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
3. **Субботин Ю.Н.** Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.

4. **Субботин Ю.Н.** Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
5. **Kunkle Th.** Favard's interpolation problem in one or more variables // Constructive Approxim. 2002. Vol. 18. P. 467–478. doi:10.1007/s00365-001-0015-7 .

Поступила 25.03.2020
После доработки 5.05.2020
Принята к публикации 11.05.2020

Новиков Сергей Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Gel'fond A.O. *Calculus of finite differences.* Delhi: Hindustan Publ. Corp., 1971, Ser. International Monographs on Advanced Mathematics and Physics, 451 p. Original Russian text published in Gel'fond A.O. *Ischislenie konechnykh raznostei.* Moscow: Nauka Publ., 1967. 376 p.
2. Subbotin Yu.N. On the connection between finite differences and corresponding derivatives. *Proc. Steklov Institute Math.*, 1965, vol. 78, pp. 24–42 (in Russian).
3. Subbotin Yu.N. Functional interpolation in the mean with smallest n derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1967, vol. 88, pp. 31–63.
4. Subbotin Yu.N. Extremal problems of functional interpolation, and mean interpolation splines. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 127–185.
5. Kunkle Th. Favard's interpolation problem in one or more variables. *Constructive Approxim.* 2002, vol. 18, pp. 467–478. doi: 10.1007/s00365-001-0015-7 .

Received March 25, 2020
Revised May 5, 2020
Accepted May 11, 2020

Sergey Igorevich Novikov, Cand. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Sergey.Novikov@imm.uran.ru .

Valerii Trifonovich Shevaldin, Dr.Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Cite this article as: S. I. Novikov, V. T. Shevaldin. On the connection between the second divided difference and the second derivative. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 216–224 .