ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.444

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМ ЯДРОМ, СВЯЗАННЫХ СПЕЦИАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

В. В. Напалков, В. В. Напалков (мл.)

Рассматриваются два гильбертовых пространства H_1 и H_2 с воспроизводящим ядром, состоящие из комплекснозначных функций, заданных на некоторых множествах точек $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$ соответственно. Нормы в пространствах H_1 и H_2 имеют интегральный вид

$$\|f\|^2_{H_1} = \int_{\Omega_1} |f(t)|^2\, d\mu_1(t), \quad f \in H_1, \quad \|q\|^2_{H_2} = \int_{\Omega_2} |q(z)|^2\, d\mu_2(z), \quad q \in H_2.$$

Пусть $\{E(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_2}$ — некоторая полная система функций в пространстве H_1. Обозначим

$$\widetilde{f}(z) \stackrel{def}{=} (E(\cdot, z), f)_{H_1} \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \widetilde{H}_1 = \{\widetilde{f},\, f \in H_1\},$$
$$(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}_1} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_{H_1}, \quad \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}_1} = \|f_1\|_{H_1} \quad \forall\, \widetilde{f}_1,\, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}_1.$$

В статье доказано, что гильбертовы пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 эквивалентны (т. е. эти пространства состоят из одних и тех же функций, и нормы этих пространств эквивалентны) тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}$, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2, который для любого $\xi \in \Omega_1$ переводит функцию $K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi)$ в функцию $E(\xi, \cdot)$. Здесь $\overline{H}_1$ — пространство, состоящее из функций, комплексно-сопряженных к функциям из H_1, $K_{\overline{H}_1}(t, \xi)$, $t, \xi \in \Omega_1$ — воспроизводящее ядро пространства $\overline{H}_1$. Получены и другие условия эквивалентности пространств $\widetilde{H}_1$ и H_2. Также в статье изучаются вопрос эквивалентности пространств $\check{H}_2$ и H_1, и, кроме того, вопрос существования в пространствах H_1 и H_2 специальных ортоподобных систем разложения. Получено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого пространства H_1 и H_2 эквивалентны. Эта работа является продолжением статьи авторов, в которой рассматривался случай совпадения пространств $\widetilde{H}_1$ и H_2.

Ключевые слова: системы разложения, подобные ортогональным, гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, задача описания сопряженного пространства.

V. V. Napalkov, V. V. Napalkov, Jr. On the equivalence of reproducing kernel Hilbert spaces connected by a special transform.

We consider two reproducing kernel Hilbert spaces H_1 and H_2 consisting of complex-valued functions defined on some sets of points $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$ and $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$, respectively. The norms in the spaces H_1 and H_2 have an integral form:

$$\|f\|^2_{H_1} = \int_{\Omega_1} |f(t)|^2\, d\mu_1(t), \quad f \in H_1, \quad \|q\|^2_{H_2} = \int_{\Omega_2} |q(z)|^2\, d\mu_2(z), \quad q \in H_2.$$

Let $\{E(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_2}$ be some complete system of functions in the space H_1. Define

$$\widetilde{f}(z) \stackrel{def}{=} (E(\cdot, z), f)_{H_1} \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \widetilde{H}_1 = \{\widetilde{f},\, f \in H_1\},$$
$$(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}_1} \stackrel{def}{=} (f_2, f_1)_{H_1}, \quad \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}_1} = \|f_1\|_{H_1} \quad \forall\, \widetilde{f}_1,\, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}_1.$$

We prove that the Hilbert spaces $\widetilde{H}_1$ and H_2 are equivalent (i.e., consist of the same functions and have equivalent norms) if and only if there exists a linear continuous one-to-one operator $\mathcal{A}$ acting from the space $\overline{H}_1$ onto the space H_2 that for any $\xi \in \Omega_1$ takes the function $K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi)$ to the function $E(\xi, \cdot)$, where $\overline{H}_1$ is the space consisting of functions that are complex conjugate to functions from H_1 and $K_{\overline{H}_1}(t, \xi)$, $t, \xi \in \Omega_1$, is the reproducing kernel of $\overline{H}_1$. We also obtain other conditions for the equivalence of the spaces $\widetilde{H}_1$ and H_2. In addition, we study the question of the equivalence of the spaces $\check{H}_2$ and H_1 and the question of the existence of special orthosimilar expansion systems in the spaces H_1 and H_2. We derive a necessary and sufficient condition for the equivalence of the spaces H_1 and H_2. This paper continues the authors' paper in which the case of coinciding spaces $\widetilde{H}_1$ and H_2 was considered.

Keywords: orthosimilar decomposition systems, reproducing kernel Hilbert space, problem of describing the dual space.

MSC: 46E22, 47B32, 30H05, 32A38
DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-200-215

1. Введение. Постановка задачи

Пусть Ω_1 — некоторое подмножество точек из n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Например, в качестве Ω_1 можно взять область в $\mathbb{C}^n$. Пусть на Ω_1 задана некоторая счетно-аддитивная мера μ_1. Мы предполагаем, что пространство Ω_1 счетно-конечно, т. е. может быть представлено в виде счетного объединения подмножеств конечной меры. Пусть H_1 — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из комплекснозначных измеримых функций, заданных на множестве Ω_1. Термин "гильбертово пространство с воспроизводящим ядром" означает, что функционал δ_ξ, который любой функции $f \in H_1$ ставит в соответствие значение функции f в точке $\xi \in \Omega_1$, является линейным и непрерывным функционалом для произвольной точки $\xi \in \Omega_1$. Более подробно о гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром изложено в [1; 2]. Примерами гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром являются гильбертовы пространства аналитических функций, например, пространства Бергмана, пространство Баргмана — Фока. Пространство H_1 имеет воспроизводящее ядро, т. е. функцию $K_{H_1}(t,\xi)$, $(t,\xi) \in \Omega_1 \times \Omega_1$ такую, что для любого $\xi \in \Omega_1$, $K_{H_1}(\cdot,\xi) \in H_1$, и для любой $f \in H_1$ выполнено соотношение

$$(f, K_{H_1}(\cdot,\xi))_{H_1} = f(\xi).$$

Предположим, что норма в пространстве H_1 имеет интегральный вид

$$\|f\|_{H_1} \overset{def}{=} \sqrt{\int_{\Omega_1} |f(t)|^2 \, d\mu_1(t)}, \quad f \in H_1. \tag{1.1}$$

Пусть Ω_2 — некоторое подмножество точек m-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$, $m \geq 1$ (Ω_2 — пространство со счетно-аддитивной мерой μ_2; также предполагаем, что пространство Ω_2 счетно-конечно). Пусть H_2 — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из комплекснозначных измеримых функций, заданных на множестве Ω_2. Также предполагаем, что норма в пространстве H_2 имеет интегральный вид

$$\|q\|_{H_2} \overset{def}{=} \sqrt{\int_{\Omega_2} |q(z)|^2 \, d\mu_2(z)}, \quad q \in H_2. \tag{1.2}$$

Всюду далее считаем, что гильбертовы пространства H_j, $j = 1,2$, сепарабельные. Как частный случай, пространства H_j, $j = 1,2$, могут быть пространствами последовательностей; например, пусть Ω_j — счетный набор точек $\{\xi_1,\dots,\xi_k,\dots\}$ в $\mathbb{C}^p$, $p \geq 1$, и H_j — весовое пространство последовательностей комплексных чисел

$$l^2_w = \left\{ \mathbf{x} = \{x_k\}_{k=1}^\infty \colon \|\mathbf{x}\|_{l^2_w} = \sqrt{\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2 \, w_k^2} < \infty, \ w_k > 0, \ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Роль μ_j здесь играет следующая мера. Пусть $A = \{\xi_{k_1},\dots,\xi_{k_l}\}$ — некоторое подмножество множества Ω_j, тогда

$$\mu_j(A) \overset{def}{=} \sum_{p=1}^{l} w_{k_p},$$

где l может быть конечным числом или бесконечностью. Очевидно, справедливо неравенство $|x_{k_0}| \, w_{k_0} \leq \|\mathbf{x}\|_{l^2_w} \quad \forall \mathbf{x} \in l^2_w$. Отсюда

$$|x_{k_0}| \leq \frac{1}{w_{k_0}} \|\mathbf{x}\|_{l^2_w} \quad \forall \mathbf{x} \in l^2_w.$$

Поэтому l^2_w — также пространство с воспроизводящим ядром.

Пусть $\{E(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_2} \subset H_1$ — некоторая полная система функций в пространстве H_1. Каждому линейному непрерывному функционалу над H_1, порождаемому функцией $f \in H_1$, поставим в соответствие функцию

$$\widetilde{f}(z) \overset{def}{=} (E(\cdot, z), f)_{H_1}, \quad z \in \Omega_2.$$

Совокупность $\{\widetilde{f},\, f \in H_1\} \overset{def}{=} \widetilde{H}_1$ образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}_1} \overset{def}{=} (f_2, f_1)_{H_1} \quad \forall\, \widetilde{f}_1,\, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}_1$$

и нормой $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}_1} = \|f\|_{H_1}$, $\widetilde{f} \in \widetilde{H}_1$. Во многих задачах комплексного анализа возникает необходимость получить более полную информацию о пространстве $\widetilde{H}_1$. Необходимо выяснить, из каких функций состоит пространство $\widetilde{H}_1$, а также существует ли мера ν на Ω_2 такая, что

$$\|g\|^2_{\widetilde{H}_1} \asymp \int_{\Omega_2} |g(z)|^2\, d\nu(z) \quad \forall g \in \widehat{H}_1?$$

Знак $\asymp$ означает, что найдутся постоянные $C_1, C_2 > 0$ такие, что для любой $g \in \widetilde{H}_1$ выполнены неравенства:

$$C_1 \int_{\Omega_2} |g(z)|^2\, d\nu(z) \le \|g\|_{\widetilde{H}_1} \le C_2 \int_{\Omega_2} |g(z)|^2\, d\nu(z).$$

Для пространства Баргмана — Фока и преобразования Лапласа такого рода задача рассматривалась в [3]. Отметим также здесь работы [4–6], в которых исследуются подобные вопросы. Эта статья посвящена решению задач 1–4.

З а д а ч а 1. При каких условиях пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 эквивалентны, т. е. состоят из одних и тех же функций, и нормы пространств $\widetilde{H}_1$, H_2 эквивалентны?

Как оказалось, с задачей 1 тесно связана другая задача. Предположим, что система функций $\{E(t, \cdot)\}_{t\in\Omega_1}$ принадлежит пространству H_2 и полна в нем. Каждому линейному непрерывному функционалу, порождаемому функцией $g \in H_2$, поставим в соответствие функцию

$$\check{g}(t) \overset{def}{=} (E(t, \cdot), g)_{H_2}, \quad t \in \Omega_1.$$

Совокупность функций $\{\check{g},\, g \in H_2\}$ образует гильбертово пространство $\check{H}_2$ со скалярным произведением

$$(\check{g}, \check{h})_{\check{H}_2} \overset{def}{=} (h, g)_{H_2}, \quad h, g \in H_2,$$

и нормой $\|\check{g}\|_{\check{H}_2} = \|g\|_{H_2}$, $g \in H_2$.

З а д а ч а 2. При каких условиях пространство $\check{H}_2$ эквивалентно пространству H_1?

Можно сказать, что фактически задачи 1 и 2 — это задачи об описании сопряженного пространства в терминах специальных систем функций. Так задача 1 — это задача об описании пространства, сопряженного к пространству H_1 в терминах системы функций $\{E(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_2}$, а задача 2 — это задача об описании пространства, сопряженного к пространству H_2 в терминах системы функций $\{E(t, \cdot)\}_{t\in\Omega_1}$. Такого рода задачи часто возникают при решении различных проблем комплексного анализа, например, задач интерполяции, уравнений свертки и других. В этой статье мы решаем и следующую задачу.

З а д а ч а 3. Предположим, что пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 эквивалентны. Найти условия, при выполнении которых пространства H_1 и H_2 оказываются эквивалентными.

Для доказательства результатов статьи мы используем теорию систем разложения, подобных ортогональным (ортоподобных систем разложения)(см. статью Т. П. Лукашенко [7]). Мы докажем также теорему, в которой устанавливается связь вопроса существования ортоподобных систем разложения в пространствах H_1 и H_2 с задачей об описании сопряженного пространства, а именно, решается и четвертая задача.

З а д а ч а 4. Найти условия, при которых система функций $\{\mathcal{S}E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$, где $\mathcal{S}$ — самосопряженный автоморфизм пространства H_1, будет ортоподобной системой разложения в пространстве H_1. Найти условия, при которых система функций $\{\mathcal{Q}E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$, где $\mathcal{Q}$ — самосопряженный автоморфизм пространства H_2, будет ортоподобной системой разложения в пространстве H_2. Выяснить, как при этом связаны операторы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Q}$.

В статье показано, что задачи 1–4 тесно связаны друг с другом. В разд. 2 установлено, что задачи 1 и 2 между собой эквивалентны; приведено решение этих задач в терминах существования операторов со специальными свойствами. Раздел 3 посвящен решению задачи 3. В разделе 4 решена задача 4.

Следует отметить, что в работе авторов 2019 г. (К вопросу о совпадении гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами, связанных специальным преобразованием //Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Vol. 25, № 2. С. 149–159) изучался случай совпадения пространств $\widetilde{H}_1$ и H_2 (а также пространств $\check{H}_2$ и H_1). В этой статье исследуется случай эквивалентности пространств.

Через $\overline{H}_j,\ j=1,2$, обозначим гильбертовы пространства комплексно-сопряженных функций к функциям из пространств $H_j, j=1,2$. Также нам понадобятся определения антилинейного и антиунитарного операторов (см., например, [8, с. 12, 34]). Оператор инверсии $\mathrm{I}nv\colon f\mapsto\overline{f},\ f\in H_1$, действует из пространства H_1 на пространство $\overline{H}_1$ и является антилинейным, антиунитарным оператором (см. [8, с. 41]). В дальнейшем тем же символом $\mathrm{I}nv$ мы будем обозначать инверсию $q\to\overline{q},\ q\in H_2$, действующую из пространства H_2 на пространство $\overline{H}_2$ (см. работу авторов 2019 г.).

2. Задача об описании сопряженного пространства и вопрос существования операторов со специальными свойствами

Определим оператор $\mathcal{B}$ следующим равенством:

$$\mathcal{B}(f)\overset{def}{=}\widetilde{f}\quad\forall f\in H_1.$$

Теорема 1. *Следующие условия равносильны.*

1. *Пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 эквивалентны.*

2. *Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}_1$, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2, такой, что*

$$\mathcal{A}_1\colon K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi)\mapsto E(\xi,\cdot)\quad\forall\xi\in\Omega_1.\tag{2.1}$$

3. *Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}_2$, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2, такой, что*

$$\mathcal{A}_2\colon\overline{E(\cdot,z)}\mapsto K_{H_2}(\cdot,z)\quad\forall z\in\Omega_2.\tag{2.2}$$

4. *Существует антилинейный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{B}_1$, действующий из пространства H_1 на пространство H_2, $\|\mathcal{B}_1f\|_{H_2}\asymp\|f\|_{H_1}\,\forall f\in H_1$, такой, что*

$$\mathcal{B}_1\colon K_{H_1}(\cdot,\xi)\mapsto E(\xi,\cdot)\quad\forall\xi\in\Omega_1,$$
$$\mathcal{B}_1\colon E(\cdot,z)\mapsto\mathcal{Q}_1K_{H_2}(\cdot,z)\quad\forall z\in\Omega_2,\tag{2.3}$$

где $\mathcal{Q}_1$ — некоторый линейный непрерывный взаимнооднозначный самосопряженный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_2.

5. *Существует антилинейный антиунитарный оператор $\mathcal{B}_2$, действующий из пространства H_1 на пространство H_2, такой, что*

$$\mathcal{B}_2\colon K_{H_1}(\cdot,\xi)\mapsto\mathcal{Q}_2^{-1}E(\xi,\cdot)\,\forall\xi\in\Omega_1,\qquad\mathcal{B}_2\colon E(\cdot,z)\mapsto\mathcal{Q}_2K_{H_2}(\cdot,z)\,\forall z\in\Omega_2,\tag{2.4}$$

$$\mathcal{B}_2\colon\mathcal{S}_3^{-1}K_{H_1}(\cdot,\xi)\mapsto\mathcal{Q}_3^{-1}E(\xi,\cdot)\,\forall\xi\in\Omega_1,\quad\mathcal{B}_2\colon\mathcal{S}_3E(\cdot,z)\mapsto\mathcal{Q}_3K_{H_2}(\cdot,z)\,\forall z\in\Omega_2,\tag{2.5}$$

$$\mathcal{B}_2\colon\mathcal{S}_2^{-1}K_{H_1}(\cdot,\xi)\mapsto E(\xi,\cdot)\,\forall\xi\in\Omega_1,\qquad\mathcal{B}_2\colon\mathcal{S}_2E(\cdot,z)\mapsto K_{H_2}(\cdot,z)\,\forall z\in\Omega_2,\tag{2.6}$$

где $\mathcal{S}_j\colon H_1 \to H_1$, $\mathcal{Q}_j\colon H_2 \to H_2$, $j = 2,3$, — некоторые линейные непрерывные взаимно-однозначные самосопряженные операторы, связанные между собой соотношениями

$$\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_3 \circ \mathcal{Q}_3, \quad \mathcal{S}_3 = \mathcal{B}_2^{-1} \circ \mathcal{Q}_3^{-1} \circ \mathcal{B}_2, \quad \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 \circ \mathcal{S}_3. \tag{2.7}$$

6. *Существует антилинейный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{B}_3$, действующий из пространства H_2 на пространство H_1, $\|\mathcal{B}_3 f\|_{H_2} \asymp \|f\|_{H_1}$ $\forall f \in H_1$, и обладающий свойствами*

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_3\colon K_{H_2}(\cdot,z) \mapsto E(\cdot,z) \qquad \forall z \in \Omega_2,\\ &\mathcal{B}_3\colon E(\xi,\cdot) \mapsto \mathcal{S}_1 K_{H_1}(\cdot,\xi) \quad \forall \xi \in \Omega_1, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\mathcal{S}_1$ — некоторый линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_1.

7. *Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{C}_1$, действующий из пространства $\overline{H}_2$ на пространство H_1 и такой, что*

$$\mathcal{C}_1\colon K_{\overline{H}_2}(\cdot,\tau) \mapsto E(\cdot,\tau) \quad \forall \tau \in \Omega_2. \tag{2.9}$$

8. *Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{C}_2$, действующий из пространства $\overline{H}_2$ на пространство H_1 и такой, что*

$$\mathcal{C}_2\colon \overline{E(\eta,\cdot)} \mapsto K_{H_1}(\cdot,\eta) \quad \forall \eta \in \Omega_1. \tag{2.10}$$

9. *Пространства $\check{H}_2$ и H_1 эквивалентны.*

Доказательство. Покажем, что из условия 1 следует условие 2. Пусть пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 эквивалентны, т. е. состоят из одних и тех же функций, и нормы этих пространств эквивалентны. На элементах пространства $\overline{H}_1$ определим оператор $\mathcal{A}_1$. Если $g \in \overline{H}_1$, то

$$\mathcal{A}_1 g(z) \stackrel{def}{=} \int\limits_{\Omega_1} (g, K_{\overline{H}_1}(\cdot,t))_{\overline{H}_1} E(t,z)\, d\mu_1(t) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Заметим, что если $g \in \overline{H}_1$, то $\overline{g} \in H_1$ и (см. лемму 1 из работы авторов 2019 г., отмеченную на с. 203)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\overline{g}(z) = \widetilde{\overline{g}(z)} = (E(\cdot,z),\overline{g})_{H_1} = \int\limits_{\Omega_1} g(t)E(t,z)\, d\mu_1(t)\\ = \int_{\Omega_1} (g, K_{\overline{H}_1}(\cdot,t))_{\overline{H}_1} E(t,z)\, d\mu_1(t) = \mathcal{A}_1 g(z) \quad \forall z \in \Omega_2. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Очевидно, что $\mathcal{A}_1$ — линейный оператор. Оператор $\mathcal{B}\colon h \to \widetilde{h}$, $h \in H_1$ действует взаимно-однозначно из пространства H_1 на пространство $\widetilde{H}_1$ (см. лемму 1 из работы авторов 2019 г.). Поэтому $\mathcal{A}_1$ также взаимно-однозначный оператор, действующий из $\overline{H}_1$ на H_2. Из того, что пространства H_2 и $\widetilde{H}_1$ эквивалентны, и из (2.11) следует

$$\|\mathcal{A}_1 g\|_{H_2} \asymp \|\mathcal{A}_1 g\|_{\widetilde{H}_1} = \|\widetilde{\overline{g}}\|_{\widetilde{H}_1} = \|\overline{g}\|_{H_1} = \|g\|_{\overline{H}_1} \quad \forall g \in \overline{H}_1.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}_1$ — линейный, непрерывный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2. Проверим теперь, что выполнено соотношение (2.1). Действительно, при произвольном $\xi \in \Omega_1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_1 K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi))(\tau) = \int\limits_{\Omega_1} (K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi), K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta))_{\overline{H}_1} E(\eta,\tau)\, d\mu_1(\eta)\\ = \int\limits_{\Omega_1} K_{\overline{H}_1}(\eta,\xi)E(\eta,\tau)\, d\mu_1(\eta) = \int\limits_{\Omega_1} \overline{K_{H_1}(\eta,\xi)}E(\eta,\tau)\, d\mu_1(\eta) = E(\xi,\tau) \quad \forall \tau \in \Omega_2. \end{aligned}$$

Мы доказали, что условие 1 влечет условие 2.

Докажем импликацию 2 $\Rightarrow$ 3. Построим линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}_2\colon \overline{H}_1 \to H_2$, обладающий свойством (2.2). Действительно, оператор $\mathcal{A}_1$ является линейным непрерывным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2. Заметим, что оператор $\mathcal{Q}_1 \stackrel{def}{=} \mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_1^*$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_2. Поэтому

$$\mathcal{A}_1 g(z) = (g, \overline{E(\cdot,z)})_{\overline{H}_1} = ((\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_1^*)^{-1}\mathcal{A}_1 g, \mathcal{A}_1\overline{E(\cdot,z)})_{H_2}$$
$$= (\mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{A}_1 g, \mathcal{A}_1\overline{E(\cdot,z)})_{H_2} = (\mathcal{A}_1 g, \mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{A}_1\overline{E(\cdot,z)})_{H_2} \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \forall g \in \overline{H}_1.$$

Таким образом, функция $\mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{A}_1\overline{E(\cdot,z)}$ обладает воспроизводящим свойством; в силу единственности воспроизводящего ядра для любого $z \in \Omega_2$ справедливо

$$\mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{A}_1\overline{E(\cdot,z)} = K_{H_2}(\cdot,z).$$

Отсюда

$$\mathcal{A}_1\overline{E(\cdot,z)} = \mathcal{Q}_1 K_{H_2}(\cdot,z) \quad \forall z \in \Omega_2. \tag{2.12}$$

Тогда $\mathcal{A}_2 \stackrel{def}{=} \mathcal{Q}_1^{-1} \circ \mathcal{A}_1$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2; при этом

$$\mathcal{A}_2\overline{E(\cdot,z)} = \mathcal{Q}_1^{-1}\mathcal{A}_1\overline{E(\cdot,z)} = K_{H_2}(\cdot,z) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Заметим, что $\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_1^*)^{-1} \circ \mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_1^*)^{-1}$. Таким образом, выполнено соотношение (2.2), и условие 3 также выполняется.

Покажем, что из условия 3 следует условие 4. Пусть существует линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}_2$, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2, такой, что выполнено соотношение (2.2). Докажем, что найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{A}_3$, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2, такой, что

$$\mathcal{A}_3\colon K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi) \mapsto E(\xi,\cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1. \tag{2.13}$$

Поскольку норма в пространстве H_2 имеет интегральный вид (1.2), система функций $\{K_{H_2}(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2 в пространстве H_2 (см. [9, теорема 2]). Значит, любая функция $q \in H_2$ представляется в виде

$$q(z) = \int\limits_{\Omega_2} (q, K_{H_2}(\cdot,\tau))_{H_2} K_{H_2}(z,\tau)\, d\mu_2(\tau) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором $\mathcal{D} \stackrel{def}{=} \mathcal{A}_2^{-1}$. Применим теорему из [10, с. 128] и воспользуемся соотношением $\mathcal{D}\colon K_{H_2}(\cdot,\tau) \mapsto \overline{E(\cdot,\tau)}$ $\forall \tau \in \Omega_2$, которое следует из (2.2). Получим

$$\mathcal{D}q(\xi) = \int\limits_{\Omega_2} (q, K_{H_2}(\cdot,\tau))_{H_2} \overline{E(\xi,\tau)}\, d\mu_2(\tau) \quad \forall \xi \in \Omega_1.$$

Оператор $\mathcal{R}_1 \stackrel{def}{=} \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^*$ является линейным непрерывным взаимно-однозначным самосопряженным оператором, действующим из пространства $\overline{H}_1$ на $\overline{H}_1$. Тогда

$$\mathcal{D}q(\xi) = (q, E(\xi,\cdot))_{H_2} = ((\mathcal{D} \circ \mathcal{D}^*)^{-1}\mathcal{D}q, \mathcal{D}E(\xi,\cdot))_{H_1}$$
$$= \ (\mathcal{R}_1^{-1}\mathcal{D}q, \mathcal{D}E(\xi,\cdot))_{H_1} = (\mathcal{D}q, \mathcal{R}_1^{-1}\mathcal{D}E(\xi,\cdot))_{H_1} \quad \forall \xi \in \Omega_1, \quad \forall q \in H_2.$$

Таким образом, функция $\mathcal{R}_1^{-1}\mathcal{D}E(\xi,\cdot)$ обладает воспроизводящим свойством; в силу единственности воспроизводящего ядра для любого $\xi\in\Omega_1$ справедливо равенство $\mathcal{R}_1^{-1}\mathcal{D}E(\xi,\cdot)=K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi)$. Из последнего соотношения вытекает, что линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{D}_1\overset{def}{=}\mathcal{R}_1^{-1}\circ\mathcal{D}$ действует из пространства H_2 на пространство $\overline{H}_1$, и при этом

$$\mathcal{D}_1\colon E(\xi,\cdot)\mapsto K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi)\quad \forall\xi\in\Omega_1.$$

Также $\mathcal{D}_1=(\mathcal{D}\circ\mathcal{D}^*)^{-1}\circ\mathcal{D}=(\mathcal{D}^*)^{-1}$. Положим

$$\mathcal{A}_3\overset{def}{=}\mathcal{D}_1^{-1}=\mathcal{D}^{-1}\circ\mathcal{R}_1=\mathcal{A}_2\circ\mathcal{R}_1=\mathcal{D}^*.$$

Тогда $\mathcal{A}_3$ — это линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2 и такой, что выполнено соотношение (2.13). Отсюда легко увидеть, что оператор $\mathcal{A}_3$ совпадает с оператором $\mathcal{A}_1$ (см. п. 1 теоремы). Как было доказано выше, найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор $\mathcal{Q}_1\colon H_2\to H_2$ такой, что выполнено соотношение (2.12). В качестве оператора $\mathcal{B}_1$ возьмем оператор $\mathcal{B}_1\overset{def}{=}\mathcal{A}_3\circ Inv$. Очевидно, оператор $\mathcal{B}_1$ — антилинейный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства H_1 на H_1, поскольку $Inv\colon H_1\to\overline{H}_1$ — антилинейный взаимно-однозначный оператор. Отсюда согласно (2.13) и тому, что $K_{\overline{H}_1}(\eta,\xi)=\overline{K_{H_1}(\xi,\eta)}$ $\forall\eta,\xi\in\Omega_1$, получаем $\mathcal{B}_1\colon K_{H_1}(\cdot,\xi)\mapsto E(\xi,\cdot)$ $\forall\xi\in\Omega_1$. Ввиду (2.12)

$$\mathcal{B}_1\colon E(\cdot,z)\mapsto\mathcal{Q}_1K_{H_2}(\cdot,z)\quad\forall z\in\Omega_2.$$

Таким образом, выполнены соотношения (2.3); отсюда следует выполнение условия 4.

Покажем теперь, что $4\Rightarrow5$. Предположим, что существует антилинейный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{B}_1$, действующий из пространства H_1 на пространство H_2, $\|\mathcal{B}_1f\|_{H_2}\asymp\|f\|_{H_1}$ $\forall f\in H_1$, и выполняются соотношения (2.3). Пусть $\mathcal{Q}_2$ — положительный квадратный корень из оператора $\mathcal{Q}_1$, т. е. такой самосопряженный оператор, что $\mathcal{Q}_1=\mathcal{Q}_2\circ\mathcal{Q}_2$ (см., например, [11, с. 284]). Очевидно, что $\mathcal{Q}_2$ — взаимно-однозначный оператор. Положим $\mathcal{B}_2\overset{def}{=}\mathcal{Q}_2^{-1}\circ\mathcal{B}_1$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{B}_2$ — это также антилинейный взаимно-однозначный оператор, действующий из пространства H_1 на пространство H_2. При этом, как нетрудно увидеть, выполнены соотношения (2.4). Докажем, что $\mathcal{B}_2$ — антиунитарный оператор, т. е. выполнено соотношение

$$(\mathcal{B}_2f_1,\mathcal{B}_2f_2)_{H_2}=(f_2,f_1)_{H_1}\quad\forall f_1,f_2\in H_1.\tag{2.14}$$

По условию теоремы норма в пространстве H_1 имеет вид (1.1). В пространстве $\overline{H}_1=\{h,\,\overline{h}\in H_1\}$ норма также имеет интегральный вид

$$\|h\|_{\overline{H}_1}=\sqrt{\int_{\Omega_1}|h(z)|^2\,d\mu_1(z)},\quad h\in\overline{H}_1.$$

Заметим, что

$$(f_2,f_1)_{H_1}=(\overline{f}_1,\overline{f}_2)_{\overline{H}_1}\quad\forall f_1,f_2\in H_1.\tag{2.15}$$

Определим оператор $\mathcal{J}\colon\mathcal{J}\overset{def}{=}\mathcal{B}_2\circ Inv$. Оператор $\mathcal{J}$, очевидно, является линейным непрерывным взаимно-однозначным оператором, действующим из $\overline{H}_1$ на H_2, и при этом

$$\mathcal{J}\colon K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi)\mapsto\mathcal{Q}_2^{-1}E(\xi,\cdot)\quad\forall\xi\in\Omega_1;\tag{2.16}$$

$$\mathcal{J}\colon\overline{E(\cdot,z)}\mapsto\mathcal{Q}_2K_{H_2}(\cdot,z)\quad\forall z\in\Omega_2.\tag{2.17}$$

В силу равенства (2.15) соотношение (2.14) выполняется тогда и только тогда, когда оператор $\mathcal{J}$ — унитарный оператор, действующий из $\overline{H}_1$ на H_2. Докажем, что $\mathcal{J}$ — унитарный оператор. В пространстве $\overline{H}_1$ система функций $\{K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta)\}_{\eta\in\Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 на Ω_1, т. е. любая функция $h\in\overline{H}_1$ может быть представлена в виде

$$h(\xi)\overset{def}{=}\int\limits_{\Omega_1}(h,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta))_{\overline{H}_1}K_{\overline{H}_1}(\xi,\eta)\,d\mu_1(\eta)\quad\forall\xi\in\Omega_1. \tag{2.18}$$

Подействуем на обе части этого равенства оператором $\mathcal{J}$. Учтем теорему из [10, с. 128] и соотношение (2.16). Имеем

$$(\mathcal{J}h)(z)\overset{def}{=}\int\limits_{\Omega_1}(h,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta))_{\overline{H}_1}\mathcal{Q}_2^{-1}E(\eta,z)\,d\mu_1(\eta)\quad\forall z\in\Omega_2. \tag{2.19}$$

Так как норма в пространстве H_2 имеет вид (1.2), то нетрудно получить представление

$$\mathcal{J}h(z)=\int\limits_{\Omega_2}(\mathcal{J}h,K_{H_2}(\cdot,\tau))_{H_2}K_{H_2}(z,\tau)\,d\mu_2(\tau)$$

$$=\int\limits_{\Omega_2}(\mathcal{Q}_2^{-1}\mathcal{J}h,K_{H_2}(\cdot,\tau))_{H_2}\mathcal{Q}_2K_{H_2}(z,\tau)\,d\mu_2(\tau)\quad\forall z\in\Omega_2,\quad\forall h\in\overline{H}_1. \tag{2.20}$$

Подействуем на обе части равенства (2.20) оператором, обратным к оператору $\mathcal{J}$. Учитывая теорему из [10, с. 128] и соотношение (2.17), выводим

$$h(\xi)=\int\limits_{\Omega_2}(\mathcal{Q}_2^{-1}\mathcal{J}h,K_{H_2}(\cdot,\tau))_{H_2}\overline{E(\xi,\tau)}\,d\mu_2(\tau)\quad\forall\xi\in\Omega_1,\quad\forall h\in\overline{H}_1. \tag{2.21}$$

Пусть h_1,h_2 — произвольные функции из пространства $\overline{H}_1$. Поскольку норма в пространстве $\overline{H}_1$ имеет интегральный вид, в силу равенств (2.18), (2.19), (2.21), соотношений (2.16), (2.17) и теоремы из [10, с. 128] имеем

$$(h_1,h_2)_{\overline{H}_1}=\Bigg(\int\limits_{\Omega_1}(h_1,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta))_{\overline{H}_1}K_{\overline{H}_1}(\xi,\eta)\,d\mu_1(\eta),\int\limits_{\Omega_2}(\mathcal{Q}_2^{-1}\mathcal{J}h_2,K_{H_2}(\cdot,\tau))_{H_2}\overline{E(\xi,\tau)}\,d\mu_2(\tau)\Bigg)_{\overline{H}_1}$$

$$=\int\limits_{\Omega_2}\int\limits_{\Omega_1}(h_1,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta))_{\overline{H}_1}(K_{\overline{H}_1}(\xi,\eta),\overline{E(\xi,\tau)})_{\overline{H}_1}\cdot(K_{H_2}(\cdot,\tau),\mathcal{Q}_2^{-1}\mathcal{J}h_2)_{H_2}\,d\mu_1(\eta)d\mu_2(\tau)$$

$$=\int\limits_{\Omega_2}\int\limits_{\Omega_1}(h_1,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta))_{\overline{H}_1}(E(\eta,z),K_{H_2}(z,\tau))_{H_2}\cdot(K_{H_2}(\cdot,\tau),\mathcal{Q}_2^{-1}\mathcal{J}h_2)_{H_2}\,d\mu_1(\eta)d\mu_2(\tau)$$

$$=\int\limits_{\Omega_2}\int\limits_{\Omega_1}(h_1,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta))_{\overline{H}_1}(\mathcal{Q}_2^{-1}E(\eta,z),K_{H_2}(z,\tau))_{H_2}\cdot(K_{H_2}(\cdot,\tau),\mathcal{J}h_2)_{H_2}\,d\mu_1(\eta)d\mu_2(\tau)$$

$$=\Bigg(\int\limits_{\Omega_1}(h_1,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta))_{\overline{H}_1}\mathcal{Q}_2^{-1}E(\eta,z)\,d\mu_1(\eta),\int\limits_{\Omega_2}(\mathcal{J}h_2,K_{H_2}(\cdot,\tau))_{H_2}K_{H_2}(z,\tau)\,d\mu_2(\tau)\Bigg)_{H_2}$$

$$=(\mathcal{J}h_1,\mathcal{J}h_2)_{H_2}\quad\forall h_1,h_2\in\overline{H}_1. \tag{2.22}$$

Опишем действия в последней выкладке. Воспользовавшись равенствами (2.18) и (2.21), мы выписываем интегральные представления элементов h_1 и h_2; подставляем эти выражения в скалярное произведение в пространстве $\overline{H}_1$. Заметим, что скалярное произведение записывается также с помощью интеграла. Применяя теорему Фубини, выносим знаки интегралов за скобки скалярного произведения. Далее, воспользовавшись равенством (которое нетрудно проверить)

$$(K_{\overline{H}_1}(\cdot,\eta), \overline{E(\cdot,\tau)})_{\overline{H}_1} = (E(\eta,\cdot), K_{H_2}(\cdot,\tau))_{H_2} \quad \forall \eta \in \Omega_1, \quad \forall \tau \in \Omega_2,$$

мы заменяем в выкладке скалярное произведение в пространстве $\overline{H}_1$ на скалярное произведение в пространстве H_2. Используя то, что в пространстве H_2 скалярное произведение записывается тоже с помощью интеграла, и то, что $\mathcal{Q}_2^{-1}$ — самосопряженный оператор, а также используя теорему Фубини, мы переносим знаки интегралов под скобки скалярного произведения. Таким образом, мы получаем равенство (2.22). Далее из равенств (2.15), (2.22) и того, что $\mathcal{J} = \mathcal{B}_2 \circ Inv$, следует

$$(f_2, f_1)_{H_1} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2)_{\overline{H}_1} = (\mathcal{J}\overline{f}_1, \mathcal{J}\overline{f}_2)_{H_2} = (\mathcal{B}_2 f_1, \mathcal{B}_2 f_2)_{H_2} \quad \forall\, f_1,\ f_2 \in H_1.$$

Тем самым мы показали, что $\mathcal{B}_2$ — антиунитарный, антилинейный оператор, действующий из пространства H_1 на пространство H_2; при этом из соотношений (2.16), (2.17) следует (2.4). Пусть операторы $\mathcal{Q}_3, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_2$ определены, как в (2.7). Нетрудно показать, что из (2.4) вытекают условия (2.5) и (2.6). Таким образом, из условия 4 следует условие 5.

Далее докажем, что из условия 5 следует условие 6. Положим $\mathcal{S}_1 \overset{def}{=} \mathcal{S}_2^{-1} \circ \mathcal{S}_2^{-1}$. Оператор $\mathcal{S}_1$ — линейный непрерывный самосопряженный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_1. Оператор $\mathcal{B'}_3 \overset{def}{=} \mathcal{B}_2 \circ \mathcal{S}_2$ является антилинейным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства H_1 на пространство H_2, и $\|\mathcal{B'}_3 f\|_{H_2} \asymp \|f\|_{H_1}\ \forall f \in H_1$. Из соотношений (2.6) вытекает

$$\mathcal{B'}_3 E(\cdot,z) = \mathcal{B}_2 \circ \mathcal{S}_2 E(\cdot,z) = K_{H_2}(\cdot,z) \quad \forall z \in \Omega_2, \tag{2.23}$$

и

$$\mathcal{B}'_3 \mathcal{S}_1 K_{H_1}(\cdot,\xi) = \mathcal{B}_2 \circ \mathcal{S}_2 \circ \mathcal{S}_2^{-1} \circ \mathcal{S}_2^{-1} K_{H_1}(\cdot,\xi) = \mathcal{B}_2 \circ \mathcal{S}_2^{-1} K_{H_1}(\cdot,\xi) = E(\xi,\cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1. \tag{2.24}$$

Положим $\mathcal{B}_3 \overset{def}{=} \mathcal{B'}_3^{-1}$ — обратный оператор к оператору $\mathcal{B'}_3$. Тогда в силу (2.23), (2.24) справедливы соотношения (2.8). Тем самым выполнение условия 5 влечет условие 6.

Докажем, что из условия 6 следует условие 7. Положим $\mathcal{C}_1 \overset{def}{=} \mathcal{B}_3 \circ Inv$. Оператор $\mathcal{C}_1$ линеен как композиция двух антилинейных операторов (см. [8, с. 41]). Оператор комплексной инверсии Inv действует взаимно-однозначно из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_1; при этом $\|\overline{g}\|_{H_1} = \|g\|_{\overline{H}_1}\ \forall g \in H_1$. Докажем непрерывность оператора $\mathcal{C}_1$. Для любого элемента $g \in \overline{H}_1$

$$\|\mathcal{C}_1 g\|_{H_2} = \|[\mathcal{B}_3 \circ Inv]g\|_{H_2} = \|\mathcal{B}_3 \overline{g}\|_{H_2} \asymp \|\overline{g}\|_{H_1} = \|g\|_{\overline{H}_1}.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{C}_1$ является линейным непрерывным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2. Учитывая равенство $\overline{K_{H_2}(z,\tau)} \equiv K_{\overline{H}_2}(z,\tau)$, $z, \tau \in \Omega_2$, приходим к соотношению (2.9). Значит, условие 7 выполняется.

Доказательство импликации $7 \Rightarrow 8$ аналогично доказательству импликации $2 \Rightarrow 3$. Поэтому мы приведем здесь лишь схему доказательства и некоторые формулы.

$$\mathcal{C}_1 q(\eta) = \int\limits_{\Omega_2} (q, K_{\overline{H}_2}(\cdot,\tau))_{\overline{H}_2} E(\eta,\tau)\, d\mu_2(\tau) \quad \forall \eta \in \Omega_1,$$

$$\mathcal{C}_1^* f(z) = \int\limits_{\Omega_1} (f, K_{H_1}(\cdot,t))_{H_1} \overline{E(t,z)}\, d\mu_1(t) \quad \forall z \in \Omega_2, \quad \forall f \in H_1.$$

Обозначим $\mathcal{T}_0 \overset{def}{=} \mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1^*$. Для любой функции $f \in H_1$ и произвольного $\xi \in \Omega_1$ выполнено соотношение

$$f(\xi) = (f, \mathcal{T}_0^{-1} \mathcal{C}_1 \overline{E(\xi,\cdot)})_{H_1}, \quad \mathcal{T}_0^{-1} \circ \mathcal{C}_1 \overline{E(\xi,\cdot)} = K_{H_1}(\xi,\cdot).$$

Отсюда $\mathcal{C}_1\overline{E(\xi,\cdot)} = \mathcal{T}_0 K_{H_1}(\xi,\cdot)\ \forall\xi\in\Omega_1$. Тогда оператор $\mathcal{C}_2 \overset{def}{=} \mathcal{T}_0^{-1}\circ\mathcal{C}_1$ действует линейно, непрерывно, взаимно-однозначно из пространства $\overline{H}_2$ на пространство H_1; при этом

$$\mathcal{C}_2\overline{E(\xi,\cdot)} = \mathcal{T}_0^{-1}\circ\mathcal{C}_1\overline{E(\xi,\cdot)} = \mathcal{T}_0^{-1}\circ\mathcal{T}_0 K_{H_1}(\xi,\cdot) = K_{H_1}(\xi,\cdot)\quad \forall\xi\in\Omega_1.$$

Таким образом, справедливо соотношение (2.10) и условие 7 влечет условие 8.

Осталось доказать, что из условия 8 вытекает условие 9. Действительно, система функций $\{K_{H_1}(\cdot,\eta)\}_{\eta\in\Omega_1}$, очевидно, полна в пространстве H_1; из (2.10) следует

$$(q,\overline{E(\eta,\cdot)})_{\overline{H}_2} = ((\mathcal{C}_2\circ\mathcal{C}_2^*)^{-1}\mathcal{C}_2 q, K_{H_1}(\cdot,\eta))_{H_1}\quad \forall\eta\in\Omega_1,\quad \forall q\in\overline{H}_2;$$

отсюда в силу взаимно-однозначности оператора $\mathcal{C}_2$ система функций $\{\overline{E(\eta,\cdot)}\}_{\eta\in\Omega_1}$ полна в пространстве $\overline{H}_2$. Значит, система функций $\{E(\eta,\cdot)\}_{\eta\in\Omega_1}$ полна в пространстве H_2. Каждому линейному непрерывному функционалу над H_2, порождаемому функцией $g\in H_2$, поставим в соответствие функцию

$$\check{g}(\eta) \overset{def}{=} (E(\eta,\cdot),g)_{H_2}\quad \forall\eta\in\Omega_1.$$

Совокупность функций $\{\check{g},\ g\in H_2\}$ образует гильбертово пространство $\check{H}_2$ со скалярным произведением

$$(\check{g},\check{h})_{\check{H}_2} \overset{def}{=} (h,g)_{H_2}\quad \forall h,g\in H_2,$$

и нормой $\|\check{g}\|_{\check{H}_2} = \|g\|_{H_2}$, $g\in H_2$. Ввиду теоремы 1 из работы [9] воспроизводящее ядро пространства $\check{H}_2$ имеет вид

$$K_{\check{H}_2}(\eta,\xi) = \int\limits_{\Omega_2} E(\eta,\tau)\overline{E(\xi,\tau)}\,d\mu_2(\tau)\quad \forall\,\eta,\,\xi\in\Omega_1. \tag{2.25}$$

Обозначим через $\mathcal{T}_1 \overset{def}{=} \mathcal{C}_2\circ\mathcal{C}_2^*$ линейный непрерывный самосопряженный взаимно-однозначный оператор, осуществляющий автоморфизм пространства H_1. В силу взаимно-однозначности оператора $\mathcal{C}_2$ и соотношений (2.10),(2.25) получаем

$$\begin{aligned} K_{\check{H}_2}(\eta,\xi) &= \int\limits_{\Omega_2} E(\eta,\tau)\overline{E(\xi,\tau)}\,d\mu_2(\tau) = (\overline{E(\xi,\cdot)},\overline{E(\eta,\cdot)})_{\overline{H}_2} \\ &= ((\mathcal{C}_2\circ\mathcal{C}_2^*)^{-1}\circ\mathcal{C}_2[\overline{E(\xi,\cdot)}],\mathcal{C}_2[\overline{E(\eta,\cdot)}])_{H_1} = (\mathcal{T}_1^{-1}K_{H_1}(\cdot,\xi),K_{H_1}(\cdot,\eta))_{H_1} \\ &= \mathcal{T}_1^{-1}K_{H_1}(\eta,\xi)\quad \forall\,\eta,\,\xi\in\Omega_1. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Так как $\mathcal{T}_1$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор, то величина $\|f\|_{H_1'} \overset{def}{=} \sqrt{(\mathcal{T}_1 f,f)_{H_1}}$, $f\in H_1$, является нормой в пространстве H_1, которая эквивалентна норме $\|\cdot\|_{H_1}$. Гильбертово пространство, которое состоит из тех же функций, что и пространство H_1, и имеет норму $\|\cdot\|_{H_1'}$, обозначим через H_1'. Пространство H_1' эквивалентно пространству H_1, поскольку $\mathcal{T}_1$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный самосопряженный оператор. Скалярное произведение в пространстве H_1' имеет вид

$$(f,g)_{H_1'} = (\mathcal{T}_1 f,g)_{H_1},\quad f,g\in H_1'.$$

Для произвольной функции $f\in H_1$ и произвольного значения $\xi\in\Omega_1$ справедливо равенство

$$(f,\mathcal{T}_1^{-1}K_{H_1}(\cdot,\xi))_{H_1'} = (\mathcal{T}_1 f,\mathcal{T}_1^{-1}K_{H_1}(\cdot,\xi))_{H_1} = (f,K_{H_1}(\cdot,\xi))_{H_1} = f(\xi).$$

Таким образом, при любом $\xi\in\Omega_1$ функция $\mathcal{T}_1^{-1}K_{H_1}(\cdot,\xi)$ обладает воспроизводящим свойством. В силу единственности воспроизводящего ядра

$$K_{H_1'}(\eta,\xi) = \mathcal{T}_1^{-1}K_{H_1}(\eta,\xi)\quad \forall\,\eta,\,\xi\in\Omega_1.$$

Равенство (2.26) означает, что $K_{\check{H}_2}(\eta,\xi) \equiv K_{H_1'}(\eta,\xi)$, $\eta,\,\xi \in \Omega_1$; отсюда вытекает, что гильбертовы пространства с воспроизводящим ядром $\check{H}_2$ и H_1' совпадают. Пространства H_1' и H_1 эквивалентны, поэтому пространства $\check{H}_2$ и H_1 эквивалентны. Таким образом, мы доказали, что условие 8 влечет условие 9. Доказательство импликаций $9 \Rightarrow 8 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ проводится аналогично.

Теорема 1 доказана.

Предложение 1. *Выполнение хотя бы одного из* 9 *условий теоремы* 1 *влечет существование всех приведенных в формулировке и в доказательстве этой теоремы операторов, которые имеют конкретный явный вид и связаны друг с другом следующими соотношениями*:

$$\mathcal{A}_1\colon \overline{H}_1 \longrightarrow H_2, \quad \mathcal{A}_1 g(z) = \int\limits_{\Omega_1} (g, K_{\overline{H}_1}(\cdot,t))_{\overline{H}_1} E(t,z)\,d\mu_1(t), \quad z\in\Omega_2, \quad g\in\overline{H}_1,$$

$$\mathcal{A}_1^*\colon H_2 \longrightarrow \overline{H}_1, \quad \mathcal{A}_1^* h(\xi) = \int\limits_{\Omega_2} (h, K_{H_2}(\cdot,\tau))_{H_2} \overline{E(\xi,\tau)}\,d\mu_2(\tau), \quad \xi\in\Omega_1, \quad h\in H_2,$$

$$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_1^*, \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{A}_1^*\circ\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_2 = \mathcal{Q}_1^{-1}\circ\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_1^*)^{-1}.$$

Антилинейный оператор $\mathcal{B}_1$ действует из пространства H_1 на пространство H_2 и имеет вид

$$\mathcal{B}_1 f(z) = \int\limits_{\Omega_1} \overline{(f, K_{H_1}(\cdot,t))}_{H_1} E(t,z)\,d\mu_1(t) = (E(\cdot,z), f)_{H_1}, \quad z\in\Omega_2, \quad f\in H_1,$$

т. е. $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}_1\circ Inv$. Также справедливы выражения

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1, \quad \mathcal{Q}_2 = \sqrt{\mathcal{Q}_1}, \quad \mathcal{Q}_3 = \sqrt{\mathcal{Q}_2}, \quad \mathcal{B}_2 = \mathcal{Q}_2^{-1}\circ\mathcal{B}_1,$$

$$\mathcal{S}_3 = \mathcal{B}_2^{-1}\circ\mathcal{Q}_3^{-1}\circ\mathcal{B}_2, \quad \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3\circ\mathcal{S}_3 = \mathcal{B}_2^{-1}\circ\mathcal{Q}_2^{-1}\circ\mathcal{B}_2,$$

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2^{-1}\circ\mathcal{S}_2^{-1} = \mathcal{B}_2^{-1}\circ\mathcal{Q}_1\circ\mathcal{B}_2, \quad \mathcal{B}_3 = \mathcal{S}_2^{-1}\circ\mathcal{B}_2^{-1}, \quad \mathcal{S}_1 = Inv\circ\mathcal{R}_1\circ Inv,$$

$$\mathcal{C}_1\colon \overline{H}_2 \longrightarrow H_1, \quad \mathcal{C}_1 q(\xi) = \int\limits_{\Omega_2} (q, K_{\overline{H}_2}(\cdot,\tau))_{\overline{H}_2} E(\xi,\tau)\,d\mu_2(\tau) \quad \forall\xi\in\Omega_1, \quad \forall q\in\overline{H}_2,$$

$$\mathcal{C}_1^*\colon H_1 \longrightarrow \overline{H}_2, \quad \mathcal{C}_1^* f(z) = \int\limits_{\Omega_1} (f, K_{H_1}(\cdot,t))_{H_1} \overline{E(t,z)}\,d\mu_1(t) \quad \forall z\in\Omega_2, \quad \forall f\in H_1,$$

$$\mathcal{C}_1 = Inv\circ\mathcal{A}_2^{-1}\circ Inv, \quad \mathcal{C}_2 = Inv\circ\mathcal{A}_1^{-1}\circ Inv,$$

$$\mathcal{T}_0 = \mathcal{C}_1\circ\mathcal{C}_1^*, \quad \mathcal{T}_0 = \mathcal{S}_1, \quad \mathcal{C}_2 = \mathcal{T}_0^{-1}\circ\mathcal{C}_1 = (\mathcal{C}_1^*)^{-1}, \quad \mathcal{T}_1 = \mathcal{C}_2\circ\mathcal{C}_2^* = \mathcal{T}_0^{-1}.$$

Антилинейный оператор $\mathcal{B}_3$ действует из пространства H_2 на пространство H_1 и имеет вид

$$\mathcal{B}_3 h(\xi) = \int\limits_{\Omega_2} \overline{(h, K_{H_2}(\cdot,\tau))}_{H_2} E(\xi,\tau)\,d\mu_2(\tau) = (E(\xi,\cdot), h)_{H_2} \quad \forall\xi\in\Omega_1, \quad \forall h\in H_2,$$

т. е. $\mathcal{B}_3 = \mathcal{C}_1\circ Inv$. Воспроизводящие ядра пространств $\widetilde{H}_1$ и H_2, а также пространств $\check{H}_2$ и H_1 связаны соотношениями

$$K_{\widetilde{H}_1}(z,\tau) = \mathcal{Q}_1 K_{H_2}(z,\tau) \quad \forall\, z,\,\tau\in\Omega_2, \quad K_{\check{H}_2}(\xi,\eta) = \mathcal{S}_1 K_{H_1}(\xi,\eta) \quad \forall\,\eta,\,\xi\in\Omega_1. \tag{2.27}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о формул фактически приведено в доказательстве теоремы 1. В процессе доказательства указывается явный вид операторов. Например, соотношения (2.27) вытекают из леммы 1 работы 2019 г., указанной на с. 203, и условий 4, 6 теоремы 1. □

3. Условие эквивалентности пространств H_1 и H_2

Далее мы получим условие, при котором пространства H_1 и H_2 эквивалентны. В этом случае нужно предполагать, что $\Omega_1 = \Omega_2$, поскольку эквивалентность пространств означает, что функции, входящие в эти пространства, имеют одинаковую область определения.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1 *и* $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega \subset \mathbb{C}^n$. *Пространства* H_1 *и* H_2 *эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор* $\mathcal{E}$, *действующий из пространства* H_1 *на пространство* H_2 *и такой, что*

$$\mathcal{E}\colon E(\cdot,\xi) \mapsto E(\xi,\cdot) \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку выполнены условия теоремы 1, мы используем обозначения из доказательства и формулировки этой теоремы. Из теоремы 1 следует, что $\widetilde{H}_1 \asymp H_2$, $\check{H}_2 \asymp H_1$. Поэтому пространства H_1 и H_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны пространства $\widetilde{H}_1$ и $\check{H}_2$. Покажем, что в пространстве H_1 система функций $\{\mathcal{S}_2 E(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2. Действительно, оператор

$$\mathcal{C}_1^* f(z) = (f, E(\cdot,z))_{H_1}, \quad z \in \Omega, \quad f \in H_1,$$

действует линейно, непрерывно, взаимно-однозначно из пространства H_1 на пространство $\overline{H}_2$. Оператор

$$\mathcal{C}_1 q(\xi) = (q, \overline{E(\xi,\cdot)})_{\overline{H}_2}, \quad \xi \in \Omega_1, \quad q \in \overline{H}_2,$$

действует из пространства $\overline{H}_2$ на пространство H_1. Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1^* f(\xi) = \int\limits_{\Omega} (f, E(\cdot,z))_{H_1} E(\xi,z)\, d\mu_2(z) \quad \forall f \in H_1. \tag{3.1}$$

Заметим, что (см. предложение 1)

$$\mathcal{C}_1 \circ \mathcal{C}_1^* = \mathcal{T}_0 = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2^{-1} \circ \mathcal{S}_2^{-1}.$$

Отсюда и из соотношения (3.1) получаем

$$f(\xi) = \int\limits_{\Omega} (f, \mathcal{S}_2 E(\cdot,z))_{H_1} \mathcal{S}_2 E(\xi,z)\, d\mu_2(z) \quad \forall f \in H_1. \tag{3.2}$$

Последнее означает, что в пространстве H_1 система функций $\{\mathcal{S}_2 E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2. Аналогично доказывается, что в пространстве H_2 система функций $\{\mathcal{Q}_2^{-1} E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 в пространстве H_2. Применим теорему 1 из работы [12]. Согласно этой теореме пространства $\widetilde{H}_1$ и $\check{H}_2$ эквивалентны тогда и только тогда, когда найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{E}'$, действующий из пространства H_1 на пространство H_2 и такой, что

$$\mathcal{E}'\colon \mathcal{S}_2 E(\cdot,\xi) \mapsto \mathcal{Q}_2^{-1} E(\xi,\cdot) \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Отсюда вытекает, что оператор

$$\mathcal{E} \stackrel{def}{=} \mathcal{Q}_2 \circ \mathcal{E}' \circ \mathcal{S}_2$$

является линейным непрерывным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства H_1 на пространство H_2 и

$$\mathcal{E}\colon E(\cdot,\xi) \mapsto E(\xi,\cdot) \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что случай, когда пространства H_1 и H_2 совпадают, рассмотрен в статье авторов 2019 г.

4. Задача описания сопряженного пространства и вопрос существования специальных ортоподобных систем разложения

Теорема 3. *Пусть H_1 — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из измеримых функций, заданных на некотором множестве $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$. Норма в пространстве H_1 имеет интегральный вид*

$$\|f\|_{H_1} = \sqrt{\int\limits_{\Omega_1} |f(z)|^2 \, d\mu_1(z)}, \quad f \in H_1.$$

Допустим, что система функций $\{E(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_2}$ полна в пространстве H_1. Предположим, что при любом фиксированном $\xi \in \Omega_1$ функция $E(\xi, \omega)$, $\omega \in \Omega_2$, измерима как функция от переменной $\omega \in \Omega_2$. Определим антилинейный оператор $\mathcal{B}$ равенством

$$\mathcal{B}f(z) = (E(\cdot, z), f)_{H_1} \quad \forall f \in H_1, \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Тогда следующие условия эквивалентны.

1. *Найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{S}$, действующий из H_1 на H_1, такой, что система функций $\{\mathcal{S}E(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с некоторой мерой μ_2, заданной на Ω_2 в пространстве H_1, т. е. любая функция f из пространства H_1 может быть представлена в виде*

$$f(\eta) = \int\limits_{\Omega_2} (f, \mathcal{S}E(\cdot, z))_{H_1} \mathcal{S}E(\eta, z) \, d\mu_2(z) \quad \forall \eta \in \Omega_1. \tag{4.1}$$

2. *Система функций $\{E(\eta, \cdot)\}_{\eta\in\Omega_1}$ обладает свойством*

$$\int\limits_{\Omega_2} |E(\eta, \tau)|^2 \, d\mu_2(\tau) < \infty \quad \forall \eta \in \Omega_1.$$

Замыкание по норме

$$\|q\|_{H_2} \stackrel{def}{=} \sqrt{\int\limits_{\Omega_2} |q(\tau)|^2 \, d\mu_2(\tau)}$$

линейной оболочки системы функций $\{E(\eta, \cdot)\}_{\eta\in\Omega_1}$ образует гильбертово пространство с воспроизводящим ядром H_2, состоящее из функций, заданных на множестве Ω_2. Пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 эквивалентны.

3. *Пространства $\check{H}_2$ и H_1 эквивалентны.*

4. *Найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный оператор $\mathcal{Q}$, действующий из H_2 на H_2, такой, что в пространстве H_2 система функций $\{\mathcal{Q}E(\xi, \cdot)\}_{\xi\in\Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 на Ω_1, т. е. любая функция q из пространства H_2 представляется в виде*

$$q(z) = \int\limits_{\Omega_1} (q, \mathcal{Q}E(\xi, \cdot))_{H_2} \mathcal{Q}E(\xi, z) \, d\mu_1(\xi) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Операторы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{Q}$ связаны соотношением

$$\mathcal{S} = \mathcal{B}^{-1} \circ \mathcal{Q} \circ \mathcal{B}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Докажем, что из условия 1 вытекает условие 2. Если в гильбертовом пространстве H_1 система функций $\{SE(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2, т. е. любой элемент из пространства H_1 представляется в виде (4.1), то нетрудно показать, что

$$f(\eta)=\int\limits_{\Omega_2}(f,\mathcal{S}E(\cdot,z))_{H_1}\mathcal{S}E(\eta,z)\,d\mu_2(z)=\int\limits_{\Omega_2}(\mathcal{S}\circ\mathcal{S}f,E(\cdot,z))_{H_1}E(\eta,z)\,d\mu_2(z)$$

$$=\int\limits_{\Omega_2}(f,E(\cdot,z))_{H_1'}E(\eta,z)\,d\mu_2(z)\quad\forall\eta\in\Omega_1. \tag{4.3}$$

Таким образом, система функций $\{E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения в пространстве H_1', которое эквивалентно пространству H_1, т. е. состоит из тех же функций, что и пространство H_1; при этом норма пространства H_1' эквивалентна норме пространства H_1 и

$$(f_1,f_2)_{H_1'}=(\mathcal{S}\circ\mathcal{S}f_1,f_2)_{H_1}\quad\forall\, f_1,\ f_2\in H_1. \tag{4.4}$$

Пусть $\mathcal{S}_0\overset{def}{=}\mathcal{S}\circ\mathcal{S}$. Поскольку $\mathcal{S}_0$ — взаимно-однозначный оператор, то равенство (4.4) влечет соотношение $(\mathcal{S}_0^{-1}f_1,f_2)_{H_1'}=(f_1,f_2)_{H_1}\quad\forall\, f_1,\ f_2\in H_1$. В силу аналога равенства Парсеваля для ортоподобных систем разложения (см. [7]) из (4.3), (4.4) следует, что

$$\|\mathcal{S}_0^{-1}f\|^2_{H_1'}=\int\limits_{\Omega_1}|(\mathcal{S}_0^{-1}f,E(\cdot,\tau))_{H_1'}|^2\,d\mu_2(\tau)$$

$$=\int\limits_{\Omega_1}|(f,E(\cdot,\tau))_{H_1}|^2\,d\mu_2(\tau)=\int\limits_{\Omega_1}|\widetilde{f}(\tau)|^2\,d\mu_2(\tau)\overset{ob}{=}\|\widetilde{f}\|^2_{\mu_2}\quad\forall f\in H_1. \tag{4.5}$$

Очевидно, $\|\mathcal{S}_0^{-1}f\|_{H_1'}\asymp\|f\|_{H_1'}$, $\|f\|_{H_1'}\asymp\|f\|_{H_1}$ и $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}_1}=\|f\|_{H_1}$. Поэтому, в силу равенства (4.5) нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{H}_1}$ и $\|\cdot\|_{\mu_2}$ эквивалентны. Нетрудно увидеть, что система функций $\{E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_1$, и, следовательно, замыкание по норме $\|\cdot\|_{\mu_2}$ системы функций $\{E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$ образует гильбертово пространство H_2, которое эквивалентно пространству $\widetilde{H}_1$. Мы доказали, что из условия 1 следует условие 2.

Докажем, что $2\Rightarrow 3$. Допустим, что выполнено условие 2. Каждому линейному непрерывному функционалу над H_2, порождаемому функцией $q\in H_2$, поставим в соответствие функцию $\check{q}(t)=(E(t,\cdot),q)_{H_2}$, $t\in\Omega_1$. Совокупность $\{\check{q},\ q\in H_2\}$ образует пространство $\check{H}_2$ со скалярным произведением

$$(\check{q}_1,\check{q}_2)_{\check{H}_2}\overset{def}{=}(q_2,q_1)_{H_2}\quad\forall\,\check{q}_1,\ \check{q}_2\in\check{H}_2$$

и нормой $\|\check{q}\|_{\check{H}_2}=\|q\|_{H_2}$, $\check{q}\in\check{H}_2$. Так как пространство H_2 эквивалентно пространству $\widetilde{H}_1$, то по теореме 1 пространство $\check{H}_2$ эквивалентно пространству H_1. Таким образом, из условия 2 следует условие 3. Покажем, что условие 3 влечет условие 4. Так как пространства $\check{H}_2$ и H_1 эквивалентны, то, применяя рассуждения, подобные приведенным при доказательстве теоремы 2 (доказательство того, что из условия $\widetilde{H}_1\asymp H_2$ вытекает, что система $\{\mathcal{S}E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$ — ортоподобная система разложения в H_1 (см. (3.1), (3.2))), мы доказываем, что найдется оператор $\mathcal{Q}$, осуществляющий автоморфизм H_2, такой, что в пространстве H_2 система функций $\{\mathcal{Q}E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1.

Докажем соотношение (4.2). Поскольку выполнены условия теоремы 1, мы используем обозначения операторов и доказанные формулы из теоремы 1 (см. также предложение 1).

Из (2.27) вытекает, что

$$K_{H_2}(z,\tau) = \mathcal{Q}_1^{-1} K_{\widetilde{H}_1}(z,\tau) = \int\limits_{\Omega_1} \mathcal{Q}_2^{-1} E(\zeta, z) \mathcal{Q}_2^{-1} E(\zeta,\tau)\, d\mu_1(\zeta) \quad \forall\, z,\, \tau \in \Omega_2,$$

$$K_{H_1}(\xi,\eta) = \mathcal{S}_1^{-1} K_{\breve{H}_2}(\xi,\eta) = \int\limits_{\Omega_2} \mathcal{S}_2 E(\xi,\tau) \mathcal{S}_2 E(\eta,\tau)\, d\mu_2(\tau) \quad \forall\, \xi,\, \eta \in \Omega_1.$$

Здесь, например, оператор $\mathcal{Q}_2^{-1}$ действует на функцию $E(\zeta, z)$, $z \in \Omega_2$, по переменной z. Соответственно оператор $\mathcal{S}_2$ действует на функцию $E(\xi,\tau)$, $\xi \in \Omega_1$ по переменной ξ. Отсюда, применяя теорему 1 из [9], получаем, что система функций $\{\mathcal{Q}_2^{-1} E(\zeta,\cdot)\}_{\zeta\in\Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 в пространстве H_2. Также система функций $\{\mathcal{S}_2 E(\cdot,\tau)\}_{\tau\in\Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2 в пространстве H_1. Таким образом, справедливы равенства $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_2^{-1}$. Поэтому равенство $\mathcal{S}_2 = \mathcal{B}_2^{-1} \circ \mathcal{Q}_2^{-1} \circ \mathcal{B}_2$ (см. предложение 1) означает, что выполнено равенство (4.2). Импликации $4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ доказываются аналогично.

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aronszajn N.** Theory of reproducing kernels // Transactions of the AMS. 1950. Vol. 68, no. 3. P. 337–404. doi: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7 .
2. **Berlinet A., Thomas–Agnan C.** Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics. N Y: Kluwer Acad. Publ., 2001. 355 p. doi: 10.1007/978-1-4419-9096-9 .
3. **Bargmann V.** On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 1, no. 14. C. 187–214. doi: 10.1002/cpa.3160140303 .
4. **Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.** Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68, № 1. С. 5–42.
5. **Напалков В.В. (мл.), Юлмухаметов Р.С.** Весовые преобразования Фурье — Лапласа аналитических функционалов в круге // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 11. С. 139–144.
6. **Напалков В.В. (мл.), Юлмухаметов Р.С.** О преобразовании Гильберта в пространстве Бергмана // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 1. С. 68–78.
7. **Лукашенко Т.П.** О свойствах систем разложения подобных ортогональным // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 5. С. 187–206.
8. **Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.** Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1977. 616 с.
9. **Напалков В.В. (мл.)** Ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром // Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5, № 4. С. 91–104.
10. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. Москва: ИЛ, 1962. 896 с.
11. **Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. Москва: Мир. 1979. 588 с.
12. **Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.)** Об изоморфизме гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 6. С. 665–667.

Поступила 5.02.2020
После доработки 13.05.2020
Принята к публикации 18.05.2020

Напалков Валентин Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН, главный науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа
e-mail: vnap@matem.anrb.ru

Напалков Валерий Валентинович
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа
e-mail: vnap@mail.ru

REFERENCES

1. Aronszajn N. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the AMS*, 1950, vol. 68, no. 3, pp. 337–404. doi: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7 .
2. Berlinet A., Thomas–Agnan C. *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics.* N Y: Kluwer Acad. Publ., 2001, 355 p. doi: 10.1007/978-1-4419-9096-9 .
3. Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961, vol. 1, no. 14, pp. 187–214.
4. Isaev K.P., Yulmukhametov R.S. Laplace transforms of functionals on Bergman spaces. *Izv. Math.*, 2004, vol. 68, no. 1, pp. 3–41. doi: 10.1070/IM2004v068n01ABEH000465 .
5. Napalkov (Jr.) V.V., Yulmukhametov R.S. Weighted Fourier–Laplace transforms of analytic functionals on the disk. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1994, vol. 77, no. 2, pp. 385–390. doi: 10.1070/SM1994v077n02ABEH003447 .
6. Napalkov (Jr.) V.V., Yulmukhametov R.S. On the Hilbert Transform in Bergman Space. *Math. Notes*, 2001, vol. 70, no. 1, pp. 61–70. doi: 10.1023/A:1010221901553 .
7. Lukashenko T. P. Properties of expansion systems similar to orthogonal ones. *Izvestiya: Mathematics*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 1035–1054. doi: 10.1070/IM1998v062n05ABEH000215 .
8. Bogoliubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., Todorov I.T. *General Principles of Quantum Field Theory.* Dordrecht [Holland]; Boston: Kluwer Academic Publishers, 1990. ISBN: 0-7923-0540-X . Original Russian text published in Bogolyubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., Todorov I.T. *Obshchie printsipy kvantovoi teorii polya.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 616 p.
9. Napalkov (Jr.) V.V. Orthosimilar expansion systems in space with reproducing kernel. *Ufa Math. J.*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 88–100. doi: 10.13108/2013-5-4-88 .
10. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear Operators. I. General Theory.* N Y: Interscience Publ., 1958, 858 p. ISBN: 0470226056 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 896 p.
11. Riesz F., Sz.-Nagy B. *Leçcons d'analyse fonctionnelle.* Budapest: Akademiai Kiado, 1972. Translated to Russian under the title *Lektsii po funktsional'nomu analizu.* Moscow: Mir Publ., 1979, 588 p.
12. Napalkov V.V., Napalkov (Jr.) V.V. On isomorphism of reproducing kernel Hilbert spaces. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 95, no. 3, pp. 270–272. doi: 10.1134/S1064562417030243 .

Received February 5, 2020
Revised May 13, 2020
Accepted May 18, 2020

Valentin Vasilievich Napalkov. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, 450077 Russia,
e-mail: napalkov@matem.anrb.ru .

Valerii Valentinovich Napalkov Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre, RAS, Ufa, 450077 Russia, e-mail: vnap@mail.ru .

Cite this article as: V. V. Napalkov, V. V. Napalkov, Jr. On the equivalence of reproducing kernel Hilbert spaces connected by a special transform. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 200–215 .