ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 534.11

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДВИЖУЩИМИСЯ ГРАНИЦАМИ ПРИ ПОМОЩИ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Л. Литвинов

Задача о колебаниях объектов с движущимися границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, является неклассическим обобщением задачи гиперболического типа. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора формы решения строятся эквивалентные интегро-дифференциальные уравнения с симметричными и зависящими от времени ядрами и изменяющимися во времени пределами интегрирования. Преимущества метода интегро-дифференциальных уравнений обнаруживаются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющиеся под действием подвижных нагрузок. Метод распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость, сопротивление внешней среды и жесткость основания колеблющегося объекта. Особое внимание уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на границах. Решение производится в безразмерных переменных с точностью до величин второго порядка малости относительно малых параметров, характеризующих скорость движения границы. Находится приближенное решение задачи о поперечных колебаниях каната грузоподъемной установки, обладающего изгибной жесткостью, один конец которого наматывается на барабан, а на втором закреплен груз. Приводятся результаты, полученные для амплитуды колебаний, соответствующих n-й динамической моде. Исследуется явление установившегося резонанса и прохождения через резонанс с применением численных методов.

Ключевые слова: резонансные свойства, колебания систем с движущимися границами, законы движения границ, интегро-дифференциальные уравнения, амплитуда колебаний.

V. L. Litvinov. Solution of boundary value problems with moving boundaries by an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations.

The problem of oscillations of objects with moving boundaries formulated as a differential equation with boundary and initial conditions is a nonclassical generalization of the hyperbolic type problem. To facilitate the construction of a solution to this problem and justify the choice of the solution form, we construct equivalent integro-differential equations with symmetric time-dependent kernels and time-varying integration limits. The advantages of the method of integro-differential equations are found in the transition to more complex dynamic systems that carry concentrated masses oscillating under mobile loads. The method is extended to a broader class of model boundary value problems that take into account the bending stiffness, environmental resistance, and stiffness of the base of the oscillating object. Special attention is paid to the analysis of the most common applied case when the boundaries are subject to external perturbations. The problem is solved in dimensionless variables up to the values of the second order of smallness relative to the small parameters that characterize the speed of the boundary movement. We find an approximate solution of a problem on transverse vibrations of a rope with bending stiffness in a lifting device; one end of the rope is wound on a drum and the other is fixed to a load. The results obtained for the oscillation amplitude corresponding to the nth dynamic mode are presented. The phenomena of steady-state resonance and passage through the resonance are studied by numerical methods.

Keywords: resonance properties, oscillations in systems with moving boundaries, laws of motion of the boundaries, integro-differential equations, amplitude of oscillations.

MSC: 74H45, 74K05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-188-199

Введение

Среди всего множества проблем динамики упругих систем с точки зрения технических приложений весьма актуальны задачи о колебаниях в системах с изменяющимися во времени геометрическими размерами. Системы, границы которых движутся, широко распространены в технике (канаты грузоподъемных установок [1–8], гибкие звенья передач [4; 6; 9], стержни твердого топлива [10; 11], бурильные колонны [10] и т. д.) Исследования многих авторов по динамике подъемных канатов привели к необходимости постановки новых задач механики, касающихся динамики одномерных объектов переменных длин. В математической формулировке это сводится к новым задачам математической физики — к исследованию соответствующих уравнений гиперболического типа в переменных областях изменения обоих аргументов. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому здесь в основном используются приближенные методы решения [1–18].

Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [19; 20], который заключается в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих волновое уравнение инвариантным. В [21] решение ищется в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, используемый в [22] и заключающийся в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного. Однако точные методы решения ограничены волновым уравнением и сравнительно простыми граничными условиями.

Из приближенных методов наиболее эффективен метод Канторовича — Галеркина [10; 14], а так же метод построения решений интегро-дифференциальных уравнений, описанный в данной работе. Задача о колебаниях объектов с движущимися границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, является неклассическим обобщением задачи гиперболического типа. Для облегчения построения решения этой задачи и обоснования выбора формы решения строятся эквивалентные интегро-дифференциальные уравнения с симметричными и зависящими от времени ядрами и изменяющимися во времени пределами интегрирования. В основу построения интегро-дифференциальных уравнений движения объектов переменной длины положено непосредственное интегрирование дифференциальных уравнений в сочетании со стандартной заменой искомой функции новой переменной.

В тривиальных случаях методы интегральных уравнений не имеют преимущества перед методом дифференциальных уравнений в применении к исследованию колебаний системы с бесконечным числом степеней свободы [4; 6]. Преимущества метода интегро-дифференциальных уравнений обнаруживаются при переходе к более сложным динамическим системам, несущим сосредоточенные массы, колеблющиеся под действием подвижных нагрузок и т. д. Данные методы могут оказаться весьма плодотворными в применении к динамике нитей переменных длин и других механических объектов с изменяющимися границами.

В данной работе метод построения решений интегро-дифференциальных уравнений распространен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость колеблющегося объекта [5; 7; 11], сопротивление внешней среды [10] и жесткость основания (подложки) объекта [4; 6]. Особое внимание уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на границах. При фиксированной длине объекта построенные интегро-дифференциальные уравнения переходят в классические уравнения Фредгольма II рода.

1. Постановка задачи

Дифференциальное уравнение движения механических объектов переменной длины имеет вид [10]

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) + L[U(\xi,\tau)] = \phi(\xi,\tau). \tag{1.1}$$

Граничные условия:

$$Y_{ji}\left[U\left(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau\right)\right] = F_{ji}(\tau); \tag{1.2}$$

$$i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,2}.$$

Начальные условия:

$$U(\xi,0)=\Phi_0(\xi),\quad U_\tau(\xi,0)=\Phi_1(\xi). \tag{1.3}$$

Здесь

$U(\xi,\tau)$ — функция продольного или поперечного смещения объекта от положения равновесия;

τ — безразмерное время;

ξ — безразмерная пространственная координата;

L — линейный однородный дифференциальный оператор по ξ второго либо четвертого порядка;

Y_{ji} — линейные однородные дифференциальные операторы по ξ до второго порядка включительно;

$\phi(\xi,\tau)$ — заданные функции класса C;

$\Phi_0(\xi),\Phi_1(\xi),F_{ji}(\tau)$ — заданные функции класса C^2;

$\ell_j(\varepsilon\tau)=1+\varepsilon\tau$ — равномерный закон движения границы;

ε — малый параметр ($\varepsilon=V/a$, V и a — заданные скорости движения границы и распространения колебаний, соответственно).

Движение границ по закону $\ell_j(\varepsilon\tau)$ соответствует режиму медленного движения.

Дифференциальное уравнение (1.1) и граничные условия (1.2) описывают широкий ряд математических моделей для анализа одномерных краевых задач с движущимися границами с учетом действия сил сопротивления внешней среды, жесткости подложки и изгибной жесткости объекта, когда внешние возмущения действуют на границах.

Для исключения неоднородностей в граничных условиях в уравнение (1.1) вводится новая функция

$$U(\xi,\tau)=V(\xi,\tau)+H(\xi,\tau), \tag{1.4}$$

где

$$H(\xi,\tau)=\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m}D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)F_{kr}(\tau); \tag{1.5}$$

при этом функция $D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$L[D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)]=0 \tag{1.6}$$

и условиям

$$Y_{ji}[D_{kr}(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau)]=\begin{cases}1, & k=j\ \wedge\ r=i;\\ 0, & k\neq j\ \vee\ r\neq i.\end{cases}$$

При подстановке (1.4) в уравнение (1.1) с учетом (1.5), (1.6) функция $V(\xi,\tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)+L[V(\xi,\tau)]=\phi(\xi,\tau)-H_{\tau\tau}(\xi,\tau) \tag{1.7}$$

$$Y_{ji}[V(\ell_j(\varepsilon\tau),\tau)]=0. \tag{1.8}$$

В работе [6] получено интегро-дифференциальное уравнение, соответствующее задаче (1.7), (1.8), в виде

$$V(\xi,\tau)=-\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau)-\phi(\zeta,\tau)+H_{\tau\tau}(\zeta,\tau)\right]d\zeta, \tag{1.9}$$

где $K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)$ — симметричное по ξ и ζ ядро, зависящее от времени через параметр $\varepsilon\tau$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *В интервале времени $\Delta\tau$, соизмеримом с единицей, уравнение колебаний объекта с фиксированным параметром $l = l(\tau_0) = \text{const}$ отличается от соответствующего уравнения колебаний объекта с переменным параметром $l = l(\tau)$ членами, пропорциональными множителю ε при условии ограниченности производной ядра $K(x, s, l)$ по параметру $l(\tau)$.*

Доказательство. Разложим правую часть уравнения

$$V(\xi,\tau) = -\int\limits_0^{l(\tau)} K(\xi,\zeta,l(\tau))\,[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau) - \phi(\zeta,\tau)]\,d\zeta \tag{1.10}$$

по параметру $l(\tau)$ в окрестности некоторого фиксированного значения безразмерной длины $l(\tau_0)$ в ряд Тейлора.

Полагая $l(\tau_0 + \Delta\tau) = l(\tau_0) + \Delta l(\tau) + \ldots$, получим

$$V(\xi,\tau) = -\int\limits_0^{l(\tau_0)} K(\xi,\zeta,l(\tau_0))\big[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau) - \phi(\zeta,\tau)\big]d\zeta$$
$$-\,\Delta l(\tau)\bigg\{K(\xi,l(\tau_0),l(\tau_0))\big[V_{\tau\tau}(l(\tau_0),\tau) - \phi(l(\tau_0),\tau)\big]$$
$$+\int\limits_0^{l(\tau_0)} \frac{\partial K(\xi,\zeta,l(\tau_0))}{\partial l(\tau)}\big[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau) - \phi(\zeta,\tau)\big]d\zeta\bigg\} - \frac{(\Delta l(\tau))^2}{2!}\Big[\frac{\partial K(\xi,l(\tau_0),l(\tau_0))}{\partial l(\tau)}\ldots\Big]. \tag{1.11}$$

Будем считать, что функция $l(\tau)$ является функцией медленного времени $l = l(\tau_1)$, $\tau_1 = \varepsilon\tau$, т. е. является функцией времени, производная которой по времени пропорциональна некоторому малому параметру ε. Дифференциал длины объекта $\Delta l(\tau_1)$ в соответствии с правилом дифференцирования функции медленного времени [4; 6] вычисляется по формуле $\Delta l(\tau_1) = \varepsilon\dfrac{d\,l(\tau_1)}{d\tau_1}\Delta\tau$.

Выберем интервал времени $\Delta\tau$ в виде

$$\Delta\tau = \theta(\tau), \tag{1.12}$$

где $\theta(\tau)$ — некоторая функция порядка единицы.

Подставляя (1.12) в (1.11), найдем, что в интервале времени $\Delta\tau$,имеющем порядок единицы, разложение (1.11) имеет вид

$$V(\xi,\tau) = -\int\limits_0^{l(\tau_0)} K(\xi,\zeta,l(\tau_0))\big[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau) - \phi(\zeta,\tau)\big]d\zeta$$
$$-\,\varepsilon l'(\tau)\theta(\tau)\bigg\{K(\xi,l(\tau_0),l(\tau_0))\big[V_{\tau\tau}(l(\tau_0),\tau) - \phi(l(\tau_0),\tau)\big]$$
$$+\int\limits_0^{l(\tau_0)} \frac{\partial K(\xi,\zeta,l(\tau_0))}{\partial l(\tau)}\big[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau) - \phi(\zeta,\tau)\big]d\zeta\bigg\} - \varepsilon^2 l'^2(\tau)\frac{\theta(\tau)}{2!}\Big[\frac{\partial K(\xi,l(\tau_0),l(\tau_0))}{\partial l(\tau)}\ldots\Big]. \tag{1.13}$$

Принимая во внимание условие теоремы об ограниченности производной ядра $K(x, s, l)$ по параметру $l(\tau)$ и сравнивая (1.13) и (1.10), найдем, что уравнение с фиксированным параметром $l = l(\tau_0) = \text{const}$ отличается от уравнения с переменным параметром в интервале $\Delta\tau \sim 1$ членами, пропорциональными множителю ε. Тем самым теорема доказана.

2. Решение задачи

Решение задачи (1.9) будем искать в виде ряда

$$V(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau), \tag{2.1}$$

где $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ — собственные функции, в качестве которых выбраны формально построенные решения интегрального уравнения

$$X_n(\xi,\varepsilon\tau)=\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)X_n(\zeta,\varepsilon\tau)d\zeta,$$

где $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр; $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ — собственные частоты задачи.

Решение (2.1) является точным в случае, если границы неподвижны.

Собственные функции $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (1.8) и играют в данном случае роль динамических мод.

Используя результаты [6], разложим симметричное по ξ и ζ ядро в ряд по собственным функциям $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$:

$$K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\zeta,\varepsilon\tau)}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}, \tag{2.2}$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ определяется по формуле

$$\frac{1}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}=\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)}\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\zeta,\varepsilon\tau)d\xi d\zeta.$$

Продифференцируем ряд (2.1) по времени:

$$V_\tau(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}[f_n'(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)+\varepsilon X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)f_n(\tau)].$$

После повторного дифференцирования получим

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n''(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)+2\varepsilon X_{n_\tau}(\xi,\varepsilon\tau)f_n'(\tau)+\varepsilon^2X_{n_{\tau\tau}}(\xi,\varepsilon\tau)f_n(\tau)\right]. \tag{2.3}$$

Подставим ряды (2.1), (2.2), (2.3) в (1.9) с учетом ортогональности функций $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ на интервале $[\ell_1(\varepsilon\tau);\ \ell_2(\varepsilon\tau)]$с весом $g(\xi)$ и замены

$$f_n(\tau)=\mu_n(\tau)+\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m}Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)F_{kr}(\tau), \tag{2.4}$$

где

$$Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)=-\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi \Big/ \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi. \tag{2.5}$$

Заметим, что если разложить функцию $H(\xi,\tau)$ в ряд Фурье $H(\xi,\tau)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\phi_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)$, где

$$\phi_n(\tau)=\int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} H(\xi,\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi \Big/ \int\limits_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi,\varepsilon\tau)g(\xi)d\xi.$$

Здесь $g(\xi)$ — весовая функция; замену можно произвести в более простом виде

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) - \phi_n(\tau).$$

При резонансных явлениях амплитуды всех динамических мод, за исключением резонансной, малы. Поэтому нерезонансными членами рядов (2.1), (2.3) в связи с их малостью пренебрегают. В этом случае получим расщепленную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [10]

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \tag{2.6}$$

где

$$\theta_n(\tau) = E_n(\tau) - 2\varepsilon \sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m} B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)F_{kr}'(\tau) - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m} C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)\, F_{kr}(\varepsilon\tau)$$
$$- \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)\sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m} Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)F_{kr}(\varepsilon\tau).$$

Здесь $A_{1n}(\varepsilon\tau)$, $A_{2n}(\varepsilon\tau)$, $A_{3n}(\varepsilon\tau)$, $B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$, $C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$, $E_n(\tau)$ определены в работе [10].

Коэффициенты взаимовлияния между отдельными уравнениями входят в систему (2.6) с малым параметром. В дальнейшем под точностью порядка ε^2 будем понимать точность, имеющую место после пренебрежения членами с ε^2 и членами вида $\varepsilon F_{ji}'(\varepsilon\tau)$, которые, несмотря на малость порядка ε, на резонансные свойства влияют как члены порядка ε^2. Система (2.6) с точностью до величин порядка малости ε^2 будет иметь вид

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \tag{2.7}$$

где

$$\theta_n(\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)\phi_n(\tau) + E_n(\tau).$$

С учетом (1.5), (2.1), (2.4) решение (1.4) запишем следующим образом:

$$U(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X(\xi,\varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^{2}\sum_{r=1}^{m}F_{kr}(\tau)[D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau)]. \tag{2.8}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Решение задачи* (1.1)–(1.3) *может быть представлено в виде*

$$U(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau). \tag{2.9}$$

Доказательство. Величины $Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)$, определяемые выражением (2.5), являются для функции $-D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau)$ коэффициентами разложения в ряд Фурье по системе ортогональных с весом $g(\xi)$ собственных функций$X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ на интервале $[\ell_1(\varepsilon\tau),\ \ell_2(\varepsilon\tau)]$, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty}Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau)X_n(\xi,\varepsilon\tau) = -D_{kr}(\xi,\varepsilon\tau).$$

Следовательно, выражение в квадратных скобках равенства (2.8) равно нулю.

Теорема доказана.

Для упрощения введем в уравнение (2.9) новую функцию $\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau)$, где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp\left(-\int_0^{\tau}\frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)}d\tau\right).$$

Тогда уравнение (2.7) не будет содержать член с $y'(\tau)$:

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = \frac{\theta_n(\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)}.$$

Начальные условия для функций $y_n(\tau)$ находятся из условий (1.3) как решения уравнений

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} y_n(0)X_n(\xi,\ell_j(0)) = \Phi_0(\xi),\\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left\{y_n'(0)X_n(\xi,\ell_j(0)) + \varepsilon X_{n_\tau}(\xi,\ell_j(0))\ell_j'(0)y_n(0)\right\} = \Phi_1(\xi). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Если в начальный момент движения скорость изменения длины объекта $\ell_j'(0)$ равна нулю, то из (2.10) получим

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} y_n(0)X_n(\xi,\ell_j(0)) = \Phi_0(\xi),\\ &\sum_{n=1}^{\infty} y_n'(0)X_n(\xi,\ell_j(0)) = \Phi_1(\xi). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Принимая во внимание, что $X_n(\xi,\varepsilon\tau)$ образуют ортогональную с весом $g(\xi)$ систему функций, из (2.11) выводим для функций $y_n(0)$, $y_n'(0)$ выражения

$$\begin{aligned} y_n(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\ell_1(0)}^{\ell_2(0)} X_n(\xi,\ell_j(0))\Phi_0(\xi)g(\xi)d\xi,\\ y_n'(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\ell_1(0)}^{\ell_2(0)} X_n(\xi,\ell_j(0))\Phi_1(\xi)g(\xi)d\xi. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Из (2.12) следует, что $y_n(0)$ и $y_n'(0)$являются коэффициентами разложения в ряд Фурье по функциям $X_n(\xi,\ell_j(0))$ начальных условий (1.3).

Вопрос о сходимости рядов (2.3), (2.9), по крайней мере, в моменты времени, близкие к начальному, может быть разрешен на основании быстроты сходимости разложений (25), т. е. быстроты убывания коэффициентов $y_n(0)$ и $y_n'(0)$. Из теории рядов Фурье известно, что порядок убывания коэффициентов разложения зависит от гладкости функций, разлагаемых в ряды. Поэтому при достаточной гладкости функций $\Phi_0(\xi)$, $\Phi_1(\xi)$, определяющих начальные условия, вопрос о сходимости рядов (2.3), (2.9) решается положительно.

Заметим, что начальные условия не влияют на резонансные свойства линейных систем, поэтому принимаются в виде $y_n(0) = 0$, $y_n'(0) = 0$.

Пусть

$$\phi(\xi,\tau) = B_0(\xi)\cos W_0(\tau), \tag{2.13}$$

$$F_{ji}(\tau) = B_{ji}\cos W_{ji}(\tau), \quad j = \overline{1,2}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2.14}$$

где B_{ji} — постоянные величины; $W_0(\tau), W_{ji}(\tau)$ — монотонно возрастающие функции; $B_0(\xi)$ — функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки.

Равенства (2.13), (2.14) можно принять в следующих случаях:

1) все внешние возмущения $\varphi(\xi,\tau), F_{ji}(\tau)$ равны нулю, кроме какого-то одного;

2) производные функций $W_0(\tau)$, $W_{ji}(\tau)$ равны между собой, т.е. сами функции отличаются на постоянную величину;

3) резонансные области нагрузок φ, F_{ji} не пересекаются, тогда при рассмотрении резонанса от одной нагрузки действием других можно пренебречь.

Используя математические выкладки, изложенные в работе [10], получим следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующей n-й динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int\limits_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos\Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int\limits_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin\Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}}; \quad F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)}; \quad w_n(\tau) = \int\limits_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau;$$

$$M_{nji}(\varepsilon\tau) = \frac{-B_{ji}\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) Q_{nji}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta).$$

3. Поперечные колебания каната грузоподъемной установки

В качестве примера рассмотрим поперечные колебания каната грузоподъемной установки, один конец которого наматывается на барабан, а на втором шарнирно закреплен груз. С помощью приведенной модели можно рассчитывать резонансные свойства несущих звеньев широкого круга грузоподъемных машин.

Уравнение, учитывающее изгибную жесткость и натяжение колеблющегося звена, имеет вид [10]

$$U_{tt}(x,t) + \frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0. \tag{3.1}$$

Граничные условия:

$$U(0,t) = 0, \quad U_{xx}(0,t) = 0, \tag{3.2}$$

$$U(l_0(t),t) = B\cos W_0(\omega_0 t), \quad U_x(l_0(t),t) = 0. \tag{3.3}$$

В задаче (3.1)–(3.3) используются следующие обозначения: $U(x,t)$ — поперечное смещение точки звена с координатой x в момент времени t; I — осевой момент инерции сечения каната; ρ — линейная плотность массы; $a = \sqrt{T/\rho}$ — минимальная скорость распространения волн; T — сила натяжения; $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ — закон движения границы каната; L_0 — первоначальная длина каната; v_0 — скорость движения границы; $W_0(z)$ — функция класса C^2; B, ω_0 — постоянные величины; E — модуль упругости материала каната.

Введем в задачу (3.1)–(3.3) безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\omega_0 x}{a}, \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}, \quad U(x,t) = BV(\xi,\tau).$$

Тогда задача примет вид

$$V_{\tau\tau}(\xi,\tau) + \beta^2 V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) - V_{\xi\xi}(\xi,\tau) = 0, \tag{3.4}$$

$$V(0,\tau) = 0, \quad V_{\xi\xi}(0,\tau) = 0, \tag{3.5}$$

$$V\left(l(\varepsilon\tau),\tau\right) = \cos\, W(\tau), \quad V_\xi\left(l(\varepsilon\tau),\tau\right) = 0, \tag{3.6}$$

где

$$\beta^2 = \frac{EI}{\rho}\frac{\omega_0^2}{a^4}; \quad l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad W(\tau) = W_0\left(\tau - \gamma_0\right); \quad \gamma_0 = \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad \varepsilon = \frac{-v_0}{a}.$$

Заметим, что значение величины β в технических задачах обычно не превосходит 0. 25.

Интегрируя уравнение (3.4) по ξ и освобождаясь от неоднородностей в граничных условиях по аналогии с (1.4)–(1.6), получим интегро-дифференциальное уравнение поперечных колебаний каната переменной длины в виде

$$V(\xi,\tau) = -\int\limits_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau)\left[V_{\tau\tau}(\zeta,\tau)+H_{\tau\tau}(\zeta,\tau)\right]d\zeta. \tag{3.7}$$

Ядро уравнения (3.7) в рассматриваемом случае будет определяться функцией

$$K(\xi,\zeta,\varepsilon\tau) = \begin{cases} \left(\dfrac{l(\varepsilon\tau)-\xi}{\beta}\right)^2\left(\dfrac{l(\varepsilon\tau)-\xi}{3}+\dfrac{\xi-\zeta}{2}\right), & \zeta\le\xi, \\ \left(\dfrac{l(\varepsilon\tau)-\zeta}{\beta}\right)^2\left(\dfrac{l(\varepsilon\tau)-\zeta}{3}+\dfrac{\zeta-\xi}{2}\right), & \zeta\ge\xi. \end{cases} \tag{3.8}$$

Функция (3.8) также симметрична относительно аргументов ξ и ζ и зависит от времени через содержащийся в ней параметр $\varepsilon\tau$. При фиксированном $l(\varepsilon\tau)=\mathrm{const}$ функция (3.8) совпадает с функцией влияния прогибов каната постоянной длины.

Таким образом, задача (3.4)–(3.6) сводится к интегро-дифференциальному уравнению (3.7) с симметричным, изменяющимся во времени ядром (3.8) и переменными во времени пределами интегрирования.

Решение задачи (3.7) будем вести в безразмерных переменных в соответствии с методикой, изложенной выше.

В результате для амплитуды колебаний, соответствующих n-й динамической моде, получим выражение

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)\left\{\left[\int\limits_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int\limits_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau)=\frac{1}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)};\quad \Phi_n(\zeta)=w_n(\zeta)-W_n(\zeta);\quad F_n(\varepsilon\zeta)=Q_{n_{21}}(\varepsilon\zeta)\sqrt{\omega_{0n}^3(\varepsilon\zeta)A_{1n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если $W_n(\tau)=w_n(\tau)+\gamma$, где γ — постоянная величина.

При действии на систему гармонического возмущения с частотой ω_0, когда $W(\tau)=\tau$, на любой из динамических мод может возникнуть явление прохождения через резонанс. Точка резонансной области τ_0, в которой $\Phi_n'(\tau_0)=0$, приближенно определяется по формуле

$$\tau_0=\frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{\frac{2\beta^2}{-1+\sqrt{1+4\beta^2}}}\cdot\pi n-1\right].$$

Для исследования явления прохождения через резонанс необходимо найти значения τ_1 и τ_2, при которых квадрат амплитуды

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2)=E_n^2(\varepsilon\tau_2)\left\{\left[\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2+\left[\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}$$

имеет максимум.

С помощью разработанного программного комплекса численно исследована зависимость максимальной амплитуды поперечных колебаний каната при прохождении через резонанс на

Зависимость амплитуды колебаний A_n от ε и β при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах

	$\beta\backslash\varepsilon$	0.02	0.04	0.06	0.08
1 мода	0.01	17.3	10.7	8.8	6.7
	0.2	14.1	9.2	7.3	5.4
2 мода	0.01	12.5	7.7	5.1	4.2
	0.2	9.3	5.4	4.3	3.7

первой и второй динамических модах от относительной скорости движения границы при различных значениях безразмерного коэффициента, характеризующего жесткость объекта, которая представлена в таблице выше.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

– при уменьшении ε амплитуда колебаний увеличивается;

– при $\varepsilon \to 0$ амплитуда колебаний стремится к бесконечности;

– с увеличением номера моды и изгибной жесткости объекта максимальная амплитуда колебаний уменьшается.

Заключение

Приближенный метод построения решений интегро-дифференциальных уравнений распространен на более широкий класс модельных краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами при линейной постановке, описываемых уравнениями гиперболического типа. Данный метод позволяет учитывать действие на систему сил сопротивления внешней среды, изгибную жесткость и жесткость подложки объекта. Решение задачи доведено до получения квадратурных формул амплитуды колебаний, соответствующих n-й динамической моде. Приведенные результаты позволяют на стадии проектирования предотвратить возможность возникновения колебаний большой амплитуды в механических объектах с движущимися границами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Колосов Л.В., Жигула Т.И.** Продольно–поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. вузов. Горный журнал. 1981. No. 3. С. 83–86.
2. **Zhu W.D., Chen Y.** Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // J. Vibr. Acoust. 2006. Vol. 128, no. 1. P. 66–78. doi: 10.1115/1.2128640.
3. **Shi Y., Wu. L., Wang Y.** Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы // J. Vibr. Eng. 2006. Vol. 19, no. 2. P.173–178.
4. **Горошко О.А., Савин Г.Н.** Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наук. думка, 1971. 290 с.
5. **Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.** Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Изв. Самар. науч. центра Российской академии наук. 2017. Т. 19, № 4. С. 161–165.
6. **Савин Г.Н., Горошко О.А**. Динамика нити переменной длины. Киев: Наук. думка, 1962. 332 с.
7. **Liu Z., Chen G.** Анализ плоских нелинейных свободных колебаний несущего каната с учетом влияния изгибной жесткости // J. Vibr. Eng. 2007. № 1. С. 57–60.
8. **Palm J. et al.** Simulation of mooring cable dynamics using a discontinuous Galerkin method // V Internat. Conf. on Computational Methods in Marine Engineering. 2013. P. 455–466. ISBN: 978-84-941407-4-7.
9. **Литвинов В.Л.** Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журн. Средневолж. мат. общества. 2014. Т. 16, № 1. С. 83–88.

10. **Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.** Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. 149 с.
11. **Лежнева А.А.** Свободные изгибные колебания балки переменной длины // Ученые записки. Пермь: Изд-во Перм. ун-та. 1966. № 156. С. 143–150.
12. **Wang L., Zhao Y.** Multiple internal resonances and non–planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // J. Sound Vibr. 2009. Vol. 319, no. 1-2. P. 1–14. doi: 10.1016/j.jsv.2008.08.020 .
13. **Zhao Y., Wang L.** On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three–to one internal resonance // J. Sound Vibr. 2006. Vol. 294, no. 4-5. P. 1073–1093. doi: 10.1016/j.jsv.2006.01.004 .
14. **Литвинов В.Л., Анисимов В.Н.** Применение метода Канторовича — Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Изв. Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.
15. **Berlioz A., Lamarque C.–H.**. A non–linear model for the dynamics of an inclined cable // J. of Sound and Vibration. 2005. Vol. 279, no. 3. P. 619–639. doi: 10.1016/j.jsv.2003.11.069 .
16. **Sandilo S.H., van Horssen W.T.** On variable length induced vibrations of a vertical string // J. of Sound and Vibratio. 2014. Vol. 333, no. 11. P. 2432–2449. doi: 10.1016/j.jsv.2014.01.011 .
17. **Zhang W., Tang Y.** Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations // Internat. J. of Non-Linear Mechanics. 2002. Vol. 37, no. 3. P. 505–526. doi: 10.1016/S0020-7462(01)00026-9 .
18. **Faravelli L.,Fuggini C., Ubertini F.** Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation // Struct. Control Health Monit. 2010. Vol. 17, no. 4. P. 386–403. doi: 10.1002/stc.313 .
19. **Весницкий А.И.** Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
20. **Анисимов В.Н., Литвинов В.Л., Корпен И.В.** Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. “Физико-мат. науки”. 2012. Вып. 3(28). С. 145–151. doi: 10.14498/vsgtu1079 .
21. **Весницкий А.И.** Обратная задача для одномерного резонатора, изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. № 10. С. 1538–1542.
22. **Барсуков К.А., Григорян Г.А.** К теории волновода с подвижными границами // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. № 2. С. 280–285.

Поступила 10.03.2020
После доработки 11.05.2020
Принята к публикации 18.05.2020

Владислав Львович Литвинов
канд. техн. наук, доцент
зав. кафедрой общетеоретических дисциплин
Сызранский филиал Самарского государственного технического университета
г. Сызрань;
докторант мех.-мат. факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: vladlitvinov@rambler.ru

REFERENCES

1. Kolosov L.B., Zhigula T.I. Longitudinal-transverse vibrations of a string of a rope of a lifting system. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Gorn. Zh.*, 1981, no. 3, pp. 83–86 (in Russian).
2. Zhu W.D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control. *J. Vibr. Acoust.*, 2006, vol. 128, no. 1, pp. 66–78. doi: 10.1115/1.2128640 .
3. Shi Y., Wu L., Wang Y. Analysis on nonlinear natural frequencies of cable net. *J. Vibr. Eng.*, 2006, vol. 19, no. 2, pp. 173–178.
4. Goroshko O.A., Savin G.N. *Vvedenie v mekhaniku deformiruemykh odnomernykh tel peremennoi dliny* [Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length]. Kiev: Naukova dumka Publ., 1971, 224 p.

5. Litvinov V.L., Anisimov V.N. Transverse vibrations rope moving in longitudinal direction. *Izvestiya Samarskogo Nauchnogo Tsentra Rossiiskoi Akademii Nauk*, 2017, vol. 19, no. 4, pp. 161–165 (in Russian).
6. Savin G.N., Goroshko O.A. *Dinamika niti peremennoi dliny* [Dynamics of a thread of variable length]. Kiev: Nauk. Dumka Publ., 1962, 332 p.
7. Liu Z., Chen G. Analysis of flat non-linear free oscillations of the supporting rope taking into account the effect of flexural rigidity. *J. Vibr. Eng.*, 2007, no. 1, pp. 57–60.
8. J. Palm et al. Simulation of mooring cable dynamics using a discontinuous Galerkin method. In: *V Internat. Conf. on Computational Methods in Marine Engineering*, 2013, pp. 455–466. ISBN: 978-84-941407-4-7 .
9. Litvinov V.L. The study of free vibrations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method. *Zhurn. Srednevolzh. Mat. Obshchestva.*, 2014, vol. 16, no. 1, pp. 83–88 (in Russian).
10. Litvinov V.L., Anisimov V.N. *Matematicheskoe modelirovanie i issledovanie kolebanii odnomernykh mekhanicheskikh sistem s dvizhushchimisya granitsami* [Mathematical modeling and study of oscillations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries]. Samara: Samar. Gos. Tekhn. Univ. Publ., 2017, 149 p. ISBN: 978-5-7964-4984-7 .
11. Lezhneva A.A. Free bending vibrations of a beam of variable length. In: *Uchenye zapiski Permskogo gosudarstvennogo universiteta. Mekhanika* [Scientific notes of Perm state University. Mechanics], no. 156. Perm: Perm State Univ. Publ., 1966, pp. 143–150.
12. Wang L., Zhao Y. Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations. *J. Sound Vibr.*, 2009, vol. 319, no. 1–2, pp. 1–14. doi: 10.1016/j.jsv.2008.08.020 .
13. Zhao Y., Wang L. On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to one internal resonance. *J. Sound Vibr.*, 2006, vol. 294, no. 4–5, pp. 1073–1093. doi: 10.1016/j.jsv.2006.01.004 .
14. Anisimov V.N., Korpen I.V., Litvinov V.L. Application of the Kantorovich–Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving borders. *Mech. Solids.*, 2018, vol. 53, no. 2, pp. 177–183. doi: 10.3103/S0025654418020085 .
15. Berlioz A., Lamarque C.-H. A non-linear model for the dynamics of an inclined cable. *J. Sound Vibr.*, 2005, vol. 279, no. 3, pp. 619–639. doi: 10.1016/j.jsv.2003.11.069 .
16. Sandilo S.H., van Horssen W.T. On variable length induced vibrations of a vertical string. *J. Sound Vibr.*, 2014, vol. 333, no. 11, pp. 2432–2449. doi: 10.1016/j.jsv.2014.01.011 .
17. Zhang W., Tang Y. Global dynamics of the cable under combined parametrical and external excitations. *Internat. J. of Non-Linear Mechanics*, 2002, vol. 37, no. 3, pp. 505–526. doi: 10.1016/S0020-7462(01)00026-9 .
18. Faravelli L., Fuggini C., Ubertini F. Toward a hybrid control solution for cable dynamics: Theoretical prediction and experimental validation. *Struct. Control Health Monit.*, 2010, vol. 17, no. 4, pp. 386–403. doi: 10.1002/stc.313 .
19. Vesnitskii A.I. *Volny v sistemakh s dvizhushimisya granitsami i nagruzkami* (Waves in Systems with Moving Boundaries and Loads). Moscow: Fizmatlit Publ., 2001, 320 p. ISBN: 5-9221-0172-2 .
20. Anisimov V.N., Litvinov V.L., Korpen I.V. On a method of analytical solution of wave equation describing the oscillations of systems with moving boundaries. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, vol. 3(28), pp. 145–151 (in Russian). doi: 10.14498/vsgtu1079 .
21. Vesnitskii A.I. The inverse problem for a one-dimensional resonator the dimensions of which vary with time. *Radiophys. Quantum Electron.*, 1971, vol. 14, no. 10, pp. 1209–1215. doi: 10.1007/BF01035071 .
22. Barsukov K.A., Grigoryan G.A. Theory of a waveguide with moving boundaries. *Radiophys. Quantum Electron.*, 1976, vol. 19, no. 2, pp. 194–200. doi: 10.1007/BF01038526 .

Received March 10, 2020
Revised May 11, 2020
Accepted May 18, 2020

Vladislav L'vovich Litvinov, Cand. Sci.(Tech.), Syzran Branch of Samara State Technical University, Syzran, 446001 Russia; Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: vladlitvinov@rambler.ru .

Cite this article as: V. L. Litvinov. Solution of boundary value problems with moving boundaries by an approximate method for constructing solutions of integro-differential equations*Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 188–199 .