ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.983.23

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ РЯДОВ

Л. Ф. Коркина, М. А. Рекант

В банаховом пространстве заданы линейный плотно определенный оператор и некоторая область, лежащая в его регулярном множестве и содержащая неположительную полуось вещественной оси. По скалярным аналитическим функциям из определенного класса строятся (на базе интегральной формулы Коши) операторные функции. Рассматривается вопрос об умножении (слева, справа) таких функций, в частности, комплексных степеней оператора, на степенной операторный ряд, исследуется связь области определения этого произведения с областью определения степенного операторного ряда. Результаты уточняются в случае, когда не только сама скалярная функция, но и функция, представляющая ее обратную величину, лежат в данном классе. Отдельно изучается случай непрерывной операторной функции и операторной функции, обратной к непрерывной.

Ключевые слова: линейный замкнутый оператор, функции от оператора, степенные операторные ряды.

L. F. Korkina, M. A. Rekant. Some properties of power operator series.

A linear densely defined operator and a domain lying in its regular set and containing the nonpositive real semiaxis are given in a Banach space. A power bound for the norm of the resolvent of the operator at infinity is assumed to be known. We consider the question of (left, right) multiplication of a function of an operator, in particular, a complex degree of an operator, by a power operator series and the connection between the domain of this product and the domain of the power operator series. The case of the continuity of the operator function or its inverse and the possibility of taking the function under the series sign are considered separately. In some of the statements proved, certain constraints are imposed on the coefficients of the power series. Examples connected with these constraints and the constraints on the scalar function generating the operator function are analyzed.

Keywords: linear closed operator, functions of an operator, power operator series.

MSC: 47A05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-161-172

Пусть X — комплексное банахово пространство, A — линейный оператор, действующий в X. При ряде предположений на пространство X и оператор A различными способами вводились, изучались и находили применение при решении различных математических задач функции от оператора A (см., например, [1–9]). Один из способов такого введения — построение операторных функций по соответствующим скалярным аналитическим функциям на базе интегральной формулы Коши (см., например, [1;4–6]). В русле этих исследований находятся и работы авторов [10;11]. В работе [12] изучались операторные экспоненты e^B — степенные операторные ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{B^n}{n!}$. В данной работе продолжено изучение степенных операторных рядов, в том числе устанавливаются равенства, связанные с произведением (слева, справа) функции от оператора, в частности, степенной операторной функции, на степенной операторный ряд с определенными ограничениями на его коэффициенты. (Заметим, что операторные ряды и ряды элементов банахова пространства рассматривались в [2]).

Введем некоторые обозначения и предложения, которые понадобятся нам в дальнейшем. Для $\varphi\in(0,\pi)$ обозначим через $\Delta(\varphi)$ область в $\mathbb{C}$, содержащую отрицательную вещественную полуось с границей $L(\varphi)=L_1(\varphi)\cup L_2(\varphi)$, где

$$L_1(\varphi)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \lambda=te^{i\varphi},\ t\ge 0\},\quad L_2(\varphi)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \lambda=te^{-i\varphi},\ t\ge 0\}.$$

Полагаем $\Omega(a,\varphi)=\Delta(\varphi)\cup B(0,a)$ $(a>0,\ \varphi\in(0,\pi),$ $B(0,a)$ — открытый круг с центром в нуле радиуса $a)$, $\Gamma(a,\varphi)=\partial\Omega(a,\varphi)$ обходится так, что $\Omega(a,\varphi)$ остается справа.

Предполагается, что A — плотно определенный в X линейный оператор с областью определения $\mathcal{D}(A)$ и множеством значений $\operatorname{Im} A \subset X$. Известна оценка нормы резольвенты $R(\lambda) = R_A(\lambda) = (A - \lambda E)^{-1}$ оператора A в $\overline{\Omega(a_0, \varphi_0)}$ ($a_0 > 0,\ \varphi_0 \in (0, \pi)$): при некоторых $C_0 > 0,\ \gamma \leq 1$ и всех $\lambda \in \overline{\Omega(a_0, \varphi_0)}$

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{C_0}{(|\lambda| + 1)^{\gamma}}.$$

Пусть $a \in (0, a_0),\ \varphi \in (\varphi_0, \pi),\ C \in (0, +\infty),\ \sigma \in \mathbb{R}$, через $F(a, \varphi, C, \sigma)$ обозначим множество функций f, непрерывных в $\mathbb{C} \backslash \Omega(a, \varphi)$, аналитических в $\mathbb{C} \backslash \overline{\Omega(a, \varphi)}$, для каждой из которых при всех $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \Omega(a, \varphi)$ справедливо неравенство

$$|f(\lambda)| \leq C|\lambda|^{\sigma}.$$

Через $\mathcal{F}$ обозначим объединение всех таких множеств.

Пусть $f \in \mathcal{F}$ и числа $a \in (0, a_0),\ \varphi \in (\varphi_0, \pi),\ \sigma \in \mathbb{R},\ C \in (0, +\infty)$ таковы, что $f \in F(a, \varphi, C, \sigma)$. В [11] изучались операторные функции

$$f(A) = -\frac{1}{2\pi i} A^m \int\limits_{\Gamma(a,\varphi)} \frac{f(\lambda)}{\lambda^m} R(\lambda)\, d\lambda, \tag{1}$$

$$\widetilde{f}(A) = -\frac{1}{2\pi i} \overline{\int\limits_{\Gamma(a,\varphi)} \frac{f(\lambda)}{\lambda^m} R(\lambda)\, d\lambda A^m}, \tag{2}$$

где

$$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \sigma - m - \gamma < -1. \tag{3}$$

Эти функции не зависят от a, φ, C, σ, m с оговоренными ограничениями, они плотно определены, $\widetilde{f}(A) \subset f(A)$, и в случае непрерывности одной из этих функций они совпадают, в частности, при $\sigma < \gamma - 1$ они непрерывны, и в (1), (2) можно взять $m = 0$.

Если $f \in \mathcal{F}$ и $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$, то существует оператор $(f(A))^{-1}$, равный $\left(\dfrac{1}{f}\right)(A)$, и существует оператор $(\widetilde{f}(A))^{-1}$, равный $\widetilde{\left(\dfrac{1}{f}\right)}(A)$ (теорема 2 и замечание к ней из [11]). Если $f(\lambda) = \lambda^n$ ($n \in \mathbb{Z}$), то $f(A) = A^n$ [10, теорема 4].

В этой статье мы используем ряды элементов банахова пространства и операторные ряды. Сходимость ряда элементов банахова пространства понимается в смысле сходимости по норме последовательности его частичных сумм [2, гл. 2, § 2]. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ операторов A_n, действующих в X, под его суммой понимается оператор A с

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}(A_n) \colon \sum_{n=1}^{\infty} A_n x \ \text{— сходящийся ряд} \ \right\}$$

и $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} A_n x$ для $x \in \mathcal{D}(A)$.

Лемма 1. *Пусть $f, g \in \mathcal{F}$. Если оператор $f(A)$ непрерывен, то*

$$f(A)g(A) \subset g(A)f(A), \quad f(A)\widetilde{g}(A) \subset \widetilde{g}(A)f(A).$$

Если $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и $(f(A))^{-1}$ — непрерывный оператор, то

$$g(A)f(A) \subset f(A)g(A), \quad \widetilde{g}(A)f(A) \subset f(A)\widetilde{g}(A).$$

Доказательство. Если оператор $f(A)$ непрерывен, то по теоремам 1 и 3 из [11] имеем

$$f(A)g(A) \subset (fg)(A) = g(A)f(A),$$
$$f(A)\widetilde{g}(A) \subset \overline{f(A)\widetilde{g}(A)} = (\widetilde{fg})(A) \subset \overline{\widetilde{g}(A)f(A)} = \widetilde{g}(A)f(A).$$

Если $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и $(f(A))^{-1}$ — непрерывный оператор, то по тем же теоремам

$$g(A)f(A) \subset (fg)(A) = f(A)g(A).$$

Кроме того, с учетом доказанного

$$f^{-1}(A)\widetilde{g}(A)f(A) \subset \widetilde{g}(A)f^{-1}(A)f(A) \subset \widetilde{g}(A),$$

откуда получаем, что

$$\widetilde{g}(A)f(A) = f(A)f^{-1}(A)\widetilde{g}(A)f(A) \subset f(A)\widetilde{g}(A).$$

Лемма доказана. □

Следствие 1. *Если f, $\dfrac{1}{f}$, $g \in \mathcal{F}$, оба оператора $f(A)$ и $[f(A)]^{-1}$ непрерывны, то*

$$f(A)g(A) = g(A)f(A), \quad f(A)\widetilde{g}(A) = \widetilde{g}(A)f(A).$$

Утверждение 1. *Пусть $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{F}$. Тогда в случае непрерывности $f(A)$*

$$f(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^n f)(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n f(A), \tag{4}$$

а в случае, когда $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и $(f(A))^{-1}$ — непрерывный оператор,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n f(A) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^n f)(A) \subset f(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n. \tag{5}$$

Доказательство. Если оператор $f(A)$ непрерывен, то

$$f(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n f(A)A^n.$$

В силу леммы 1 $f(A)A^n \subset A^n f(A)$, а по теореме 3 из [11] $A^n f(A) = (\lambda^n f)(A)$, т. е. справедливы соотношения (4).

Если $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и оператор $(f(A))^{-1}$ непрерывен, то с учетом леммы 1

$$(f(A))^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n f(A) \subset \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n (f(A))^{-1}A^n f(A) \subset \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n (f(A))^{-1}f(A)A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n f(A) \subset f(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n.$$

Так как оператор A^{-n} непрерывен, то по теореме 3 из [11]

$$A^n f(A) = (\lambda^n f)(A),$$

т. е. имеет место (5). Утверждение доказано. □

Следствие 2. *Пусть $t > 0$. Если $f(A)$ — непрерывный оператор, то $f(A)e^{tA} \subset e^{tA} f(A)$. Если $f, \dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и $(f(A))^{-1}$ — непрерывный оператор, то $e^{tA} f(A) \subset f(A)e^{tA}$.*

Будем считать, что $\lambda^z = e^{z \ln \lambda}$, где $\ln \lambda = \ln |\lambda| + i \arg \lambda$ с $|\arg \lambda| < \pi$. В этом случае, если $f(\lambda) = \lambda^z$, то $f(A) = A^z$, $\widetilde{f}(A) = \widetilde{A^z}$ (формулы для $f(A)$ и A^z, $\widetilde{f}(A)$ и $\widetilde{A^z}$ соответственно совпадают).

Следствие 3. *Пусть $z \in \mathbb{C}$, $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. Если оператор A^z непрерывен, то*

$$A^z \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \subset \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{z+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n A^z.$$

Если оператор A^{-z} непрерывен, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n A^z = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{n+z} \subset A^z \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n.$$

Утверждение 2. *Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\widetilde{\lambda^n f})(A)), \tag{6}$$

причем, если $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$, то

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\lambda^n f)(A)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\widetilde{\lambda^n f})(A)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n). \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$ и числа $a_1 \in (0, a_0)$, $\varphi_1 \in (\varphi_0, \pi)$, $C_1 \in (0, +\infty)$, $\sigma_1 \in \mathbb{R}$ таковы, что $f \in F(a_1, \varphi_1, C_1, \sigma_1)$. Возьмем произвольно такое число m_1, что выполнено (3) с $m = m_1$, $\sigma = \sigma_1$. Тогда операторы $(\lambda^{-m_1} f)(A)$ и $(\widetilde{\lambda^{-m_1} f})(A)$ непрерывны и совпадают, и при любом $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ в соответствии с определением (2) операторной функции

$$(\widetilde{\lambda^n f})(A) = \overline{(\lambda^{-m_1} f)(A) A^{m_1+n}}. \tag{8}$$

В силу того что $x \in \mathcal{D}(A^{m_1+n})$ при произвольном $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получаем, что $x \in \mathcal{D}((\widetilde{\lambda^n f})(A))$, т. е. имеет место (6).

Предполагаем далее, что и $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$ и числа $a_2 \in (0, a_0)$, $\varphi_2 \in (\varphi_0, \pi)$, $C_2 \in (0, +\infty)$, $\sigma_2 \in \mathbb{R}$ таковы, что $\dfrac{1}{f} \in F(a_2, \varphi_2, C_2, \sigma_2)$. Возьмем произвольно такое число m_2, что выполнено (3) для функции $\dfrac{1}{f}$ с $C = C_2$, $\sigma = \sigma_2$. Пусть $x \in \mathcal{D}((\lambda^n f)(A))$. Тогда оператор $\Big(\dfrac{1}{\lambda^{m_2} f}\Big)(A)$ непрерывен и при любом $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(\lambda^{m_2+n} f)(A)$ — оператор, обратный к непрерывному, т. е. по теореме 3 из [9] следует

$$A^n = \overline{\Big(\frac{1}{\lambda^{m_2} f}\Big)(A)(\lambda^{m_2+n} f)(A)}.$$

Поскольку $x \in \mathcal{D}((\lambda^{m_2+n} f)(A))$ $(n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$, то $x \in \mathcal{D}(A^n)$. Таким образом, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$, т. е.

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\widetilde{\lambda^n f})(A)) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}((\lambda^n f)(A)) \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n),$$

и с учетом (6) получаем (7). Утверждение доказано. □

Следствие 4. *Пусть $z \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^{z+n}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(\widetilde{A^{z+n}}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n).$$

Следствие 4 получается из (7) для $f(\lambda) = \lambda^z$.

Следствие 5.

$$\bigcap_{z\in\mathbb{C}} \mathcal{D}(A^z) = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} \mathcal{D}(\widetilde{A^z}) = \bigcap_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathcal{D}(A^\sigma) = \bigcap_{\sigma\in\mathbb{R}} \mathcal{D}(\widetilde{A^\sigma}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n). \tag{9}$$

Справедливость (9) вытекает в силу следствия 4 из соотношений

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^{z+n}) = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(\widetilde{A^{z+n}}) = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} \mathcal{D}(A^z) = \bigcap_{z\in\mathbb{C}} \mathcal{D}(\widetilde{A^z}),$$

в которых $\mathbb{C}$ можно заменить на $\mathbb{R}$.

З а м е ч а н и е 1. Если $f \in \mathcal{F}$, $\dfrac{1}{f} \notin \mathcal{F}$, то включение в (6) может быть строгим. Для примера можно взять функцию $f(\lambda) = e^{-\lambda}$. В этом случае $(\lambda^{-n} e^{-\lambda})(A)$ — непрерывный на X оператор и правая часть в (6) равна X. В случае неограниченного оператора A в (6) — строгое включение.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n) \subset \mathcal{D}(\widetilde{f}(A)).$$

Замечание вытекает из того факта, что при достаточно большом $m \in \mathbb{N}$ справедливо, что $\mathcal{D}(A^m) \subset \mathcal{D}(\widetilde{f}(A))$.

Утверждение 3. *Пусть $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$. Тогда $x \in \mathcal{D}(\widetilde{f_1(A) f_2(A)})$ и*

$$\widetilde{f}_1(A) f_2(A) x = f_1(A) f_2(A) x = (f_1 f_2)(A) x. \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$, числа $a_i \in (0, a_0)$, $\varphi_i \in (\varphi_0, \pi)$, $C_i \in (0, +\infty)$, $\sigma_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ таковы, что $f_i \in F(a_i, \varphi_i, C_i, \sigma_i)$, числа $m = m_i$ удовлетворяют (3) при $\sigma = \sigma_i$, $y = A^{m_2} x$. По теореме 3 из [11]

$$(f_1 f_2)(A) x = (f_1 f_2) A^{-m_2} y = (\lambda^{-m_2} f_1 f_2)(A) y$$

$$= f_1(A)(\lambda^{-m_2} f_2)(A) y = f_1(A) f_2(A) A^{-m_2} y = f_1(A) f_2(A) x,$$

т. е. второе из равенств (10) имеет место.

Покажем, что имеет место первое из них. Так как выполнено (3) с $\sigma = \sigma_i$, $m = m_i$, то $\sigma_1 + \sigma_2 - m_1 - m_2 < 2(\gamma - 1) \le \gamma - 1$. Тогда с учетом включения $f_1 f_2 \in \mathcal{F}$, замечания 2 и леммы 1 имеем

$$(f_1 f_2)(A) x = (\widetilde{f_1 f_2})(A) x = \overline{(\lambda^{-m_1 - m_2} f_1 f_2)(A) A^{m_1 + m_2}} x$$

$$= (\lambda^{-m_1 - m_2} f_1 f_2)(A) A^{m_1 + m_2} x = (\lambda^{-m_1} f_1)(A)(\lambda^{-m_2} f_2)(A) A^{m_1} A^{m_2} x$$

$$= (\lambda^{-m_1} f_1)(A) A^{m_1} (\lambda^{-m_2} f_2)(A) A^{m_2} x = \widetilde{f}_1(A) \widetilde{f}_2(A) x = \widetilde{f}_1(A) f_2(A) x.$$

Итак, (10) имеет место. Утверждение доказано. □

Следствие 6. *Пусть* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}(A^n)$. *Тогда* $x \in \mathcal{D}(\widetilde{A^{z_1}} A^{z_2})$ *и*

$$\widetilde{A^{z_1}} A^{z_2} x = A^{z_1} A^{z_2} x = A^{z_1+z_2} x. \tag{11}$$

З а м е ч а н и е 3. Если числа $a_i, \varphi_i, C_i, \sigma_i, m_i$ $(i = 1,2)$ такие, как при доказательстве утверждения 3, то $\mathcal{D}(A^{m_1+m_2}) \subset \mathcal{D}((\widetilde{f_1 f_2})(A))$ и для $x \in \mathcal{D}(A^{m_1+m_2})$ имеет место (10). В частности, если $z_i \in \mathbb{C}$, $m_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таковы, что $\operatorname{Re} z_i - m_i < \gamma - 1$ $(i = 1,2)$, то $\mathcal{D}(A^{m_1+m_2}) \subset \mathcal{D}(\widetilde{A^{z_1+z_2}})$ и для $x \in \mathcal{D}(A^{m_1+m_2})$ справедливо (11).

Утверждение 4. *Пусть* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, *последовательность* $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}}\right\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *монотонна и ограничена,* $x \in X$, $f \in \mathcal{F}$. *Если ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x$ *сходится, то справедливы неравенства*

$$\widetilde{f}(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \widetilde{f}(A) A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\widetilde{\lambda^n f})(A) x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \widetilde{f}(A) x \tag{12}$$

(в них все части имеют смысл).

Если в дополнение к сформулированным условиям $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$, *то имеют место соотношения*

$$\widetilde{f}(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n = f(A) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \widetilde{f}(A) A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f(A) A^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\widetilde{\lambda^n f})(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f)(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \widetilde{f}(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A), \tag{13}$$

причем области определения всех частей равенств совпадают с $\mathcal{D}\big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть числа $a \in (0, a_0)$, $\varphi \in (\varphi_0, \pi)$, $C \in (0, +\infty)$, $\sigma \in \mathbb{R}$ таковы, что $f \in F(a, \varphi, C, \sigma)$. Найдем такое число $k \in \mathbb{N}$, что $\sigma - km < \gamma - 1$. Последовательность $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+km}}\right\}_{n=0}^{\infty}$ (как и последовательность $\left\{\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}}\right\}_{n=0}^{\infty}$) будет ограничена и с некоторого номера монотонна в силу равенства

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+km}} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \times \frac{\alpha_{n+m}}{\alpha_{n+2m}} \times \cdots \times \frac{\alpha_{n+(k-1)m}}{\alpha_{n+km}}.$$

Для простоты обозначений считаем, что $k = 1$, т. е. выполнено (3).

Возьмем произвольно $x \in \mathcal{D}\big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n\big)$, т. е. такой элемент, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x$ сходится. Тогда согласно сформулированному в утверждении 1 из [12] для рядов элементов банахова пространства аналогу признака Абеля сходимости числовых рядов сходится в X ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}} \alpha_{n+m} A^{n+m} x,$$

т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{n+m} x$. В силу замкнутости оператора A^m имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x \in \mathcal{D}(A^m) \quad \text{и} \quad A^m \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{n+m} x.$$

Отсюда по определению (2) функции $\widetilde{f}(A) = \overline{(\lambda^{-m} f)(A) A^m}$ выводим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x \in \mathcal{D}(\widetilde{f}(A));$$

$$\widetilde{f}(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n x = (\lambda^{-m}f)(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^{n+m}x = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^{-m}f)(A)A^{m+n}x = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\widetilde{f}(A)A^n x$$

(использована непрерывность оператора $(\lambda^{-m}f)(A)$, которая имеет место в силу (3)). По теореме 3 из [11] $\widetilde{f}(A)A^n x = (\widetilde{\lambda^n f})(A)x$, откуда следует справедливость второго из равенств (12). Кроме того, с учетом леммы 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\widetilde{f}(A)A^n x = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^{-m}f)(A)A^{m+n}x = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^{-m}f)(A)A^n A^m x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n(\lambda^{-m}f)(A)A^m x = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n\widetilde{f}(A)x.$$

Равенства (12) (включая существование их частей) установлены.

Пусть в дополнение к сформулированным условиям выполнено $\dfrac{1}{f}\in\mathcal{F}$. Предполагаем, что числа $a_1\in(0,a_0)$, $\varphi_1\in(\varphi_0,\pi)$, $C_1\in(0,+\infty)$, $\sigma_1\in\mathbb{R}$ таковы, что $\dfrac{1}{f}\in F(a_1,\varphi_1,C_1,\sigma_1)$. Найдем такое число $k_1\in\mathbb{N}$, что $\sigma_1-k_1m<\gamma-1$, и считаем без ограничения общности что $k_1=1$, т. е. выполнено (3) с заменой σ на σ_1.

Для доказательства равенств (13) достаточно установить, что область определения любой из частей равенств лежит в $\mathcal{D}\big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n\big)$.

Прежде всего заметим, что

$$\mathcal{D}\Big(\widetilde{f}(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n\Big)\subset\mathcal{D}\Big(f(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n\Big)\subset\mathcal{D}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n\Big),$$

и с учетом теоремы 1 из [11]

$$\mathcal{D}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\widetilde{f}(A)A^n\Big)\subset\mathcal{D}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n f(A)A^n\Big)\subset\mathcal{D}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^n f)(A)\Big),$$

$$\mathcal{D}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\widetilde{\lambda^n f})(A)\Big)\subset\mathcal{D}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^n f)(A)\Big).$$

Пусть $x\in X$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^n f)(A)x$ сходится. Тогда по ранее применявшемуся аналогу признака Абеля сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^{m+n}f)(A)x$. В силу непрерывности оператора $\big(\dfrac{1}{\lambda^m f}\big)(A)$ делаем вывод о сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\Big(\frac{1}{\lambda^m f}\Big)(A)(\lambda^{m+n}f)(A)x,$$

и ввиду теоремы 1 из [11] — и ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n x$.

Далее,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n\widetilde{f}(A)\subset\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n f(A).$$

Пусть $x\in X$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n f(A)x$ сходится. Тогда аналогично предыдущему заключаем сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^{m+n}f(A)x$. Так как $A^m f(A)\subset(\lambda^m f)(A)$ [11, теорема 1], то сходится ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n(\lambda^m f)(A)x$, а в силу непрерывности оператора $\big(\dfrac{1}{\lambda^m f}\big)(A)$ — и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\Big(\frac{1}{\lambda^m f}\Big)(A)A^n(\lambda^m f)(A)x.$$

Поэтому по лемме 1 будет сходиться ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \Big(\frac{1}{\lambda^m f}\Big)(A)(\lambda^m f)(A)x,$$

т. е. и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x$. Утверждение доказано. □

Замечание 4. В условиях утверждения 4 без предположения, что $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$, для $x \in \mathcal{D}\big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n\big)$ справедливы равенства

$$f(A)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f(A) A^n x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\lambda^n f)(A)x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n f(A)x.$$

Следствие 7. *Пусть* $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, *последовательность* $\big\{\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}}\big\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *монотонна и ограничена,* $z \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\widetilde{A^z}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n = A^z\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \widetilde{A^z} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^z A^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \widetilde{A^{z+n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^{z+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n \widetilde{A^z} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n A^z,$$

причем области определения всех частей равенств совпадают с $\mathcal{D}\big(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n\big)$.

Заметим, что условие ограниченности последовательности $\big\{\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}}\big\}_{n=0}^{\infty}$ в утверждении 4 существенно для справедливости (12), а включение $\dfrac{1}{f} \in \mathcal{F}$ — для справедливости (13). Это демонстрируют следующие далее примеры, для рассмотрения которых нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $f:\ \mathbb{R} \to m$ *(m — пространство комплексных ограниченных последовательностей с* sup*-нормой),* $f(\lambda) = \{f_n(\lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, f *непрерывна и интегрируема в несобственном смысле на* $\mathbb{R}$. *Тогда при любом* n *функция* $f_n(\lambda)$ *интегрируема на* $\mathbb{R}$ *и*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,d\lambda = \bigg\{\int\limits_{\mathbb{R}} f_n(\lambda)\,d\lambda\bigg\}_{n=1}^{\infty}$$

(*значение интеграла слева предполагается элементом* m).

Доказательство. Сначала заметим, что для любого отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ при всех $n \in \mathbb{N}$ функции f_n интегрируемы по Риману на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b f(\lambda)\,d\lambda = \bigg\{\int\limits_a^b f_n(\lambda)\,d\lambda\bigg\}_{n=1}^{\infty}.$$

Это вытекает из определения $\displaystyle\int_a^b f(\lambda)\,d\lambda$ как предела интегральных сумм функции f в m, т. е. равномерного предела по n интегральных сумм функций f_n (разбиение отрезка $[a,b]$ и выбор точек, соответствующий разбиению, для всех f_n одинаковы).

Взяв такие последовательности $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, что $a_k \to -\infty$, $b_k \to +\infty$, и учитывая, что $\displaystyle\int_{a_k}^{b_k} f(\lambda)\,d\lambda \xrightarrow[k\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,d\lambda$ (в m), по тем же соображениям получаем заключение леммы. Лемма доказана. □

З а м е ч а н и е 5. Лемма остается справедливой при аналогичном доказательстве, если $\mathbb{R}$ заменить на $\Gamma(a,\varphi)$ $(a>0,\ \varphi\in(0,\pi))$.

П р и м е р 1. Пусть $X=c_0$, для $x=\{\xi_s\}_{s=1}^{\infty}\in c_0$ таких, что $y=\{s\xi_s\}_{s=1}^{\infty}\in c_0$, определим оператор A формулой $Ax=y$. Оператор A плотно определен, линеен, его спектр $\sigma(A)$ равен $\mathbb{N}$, для $y=\{\eta_s\}_{s=1}^{\infty}\in c_0,\ \lambda\in\rho(A)$ справедливо равенство $R(\lambda)y=\bigl\{\dfrac{\eta_s}{s-\lambda}\bigr\}_{s=1}^{\infty}$. При этом для $\lambda\in\mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\lambda\le\dfrac12$ выполнено $\|R(\lambda)\|=\dfrac{1}{|\lambda-1|}$.

Взяв $z\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{N}$, причем $k>\operatorname{Re}z$, а также $x=\{\xi_s\}_{s=1}^{\infty}\in\mathcal{D}(A^z)\subset c_0$, в силу формулы (1) и леммы 2 имеем

$$A^zx=-\frac{A^k}{2\pi i}\Biggl\{\int\limits_{\Gamma(\frac12,\frac{\pi}{2})}\frac{\lambda^{z-k}}{s-\lambda}\xi_s\,d\lambda\Biggr\}_{s=1}^{\infty}=A^k\bigl\{s^{z-k}\xi_s\bigr\}_{s=1}^{\infty}=\bigl\{s^z\xi_s\bigr\}_{s=1}^{\infty}.$$

Докажем теперь, что $\widetilde{A^z}=A^z$.

Пусть $x=\bigl\{\xi_s\bigr\}_{s=1}^{\infty}\in\mathcal{D}(A^z)$ и $x_s=(\xi_1,\dots,\xi_s,0,0,\dots)$ $(s\in\mathbb{N})$. Тогда (в силу (2)) при всех s выполняется, что $x_s\in\mathcal{D}(\widetilde{A^z}),\ x_s\xrightarrow[s\to\infty]{}x$ и

$$\widetilde{A^z}x_s=A^zx_s=(\xi_1,\dots,s^z\xi_s,0,0,\dots)\xrightarrow[s\to\infty]{}\bigl\{s^z\xi_s\bigr\}_{s=1}^{\infty}=A^zx.$$

С учетом замкнутости оператора $\widetilde{A^z}$ справедливо, что $x\in\mathcal{D}(\widetilde{A^z})$, т.е. $\mathcal{D}(A^z)\subset\mathcal{D}(\widetilde{A^z})$, а так как $\widetilde{A^z}\subset A^z$, то эти операторы совпадают.

Пусть $\alpha_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n^n}, & n\ge1,\\ 1, & n=0.\end{cases}$ Тогда для $x=\{\xi_s\}_{s=1}^{\infty}\in\mathcal{D}\bigl(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nA^n\bigr)$ верно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_nA^nx=\Bigl\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^n}{n^n}\xi_s\Bigr\}_{s=1}^{\infty}.$$

Рассмотрим вектор $x=\{\xi_s\}_{s=1}^{\infty}$ с $\xi_s=\dfrac{1}{s+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^{k+1}}{k^k}}$. Так как $\xi_s\xrightarrow[s\to\infty]{}0$, то $x\in c_0$. Кроме того, при любом $n\in\mathbb{N}$

$$s^n\xi_s\le\frac{s^n}{\frac{s^{n+1}}{n^n}}=\frac{n^n}{s}\xrightarrow[s\to\infty]{}0,$$

т.е. $x\in\mathcal{D}(A^n)$.

Покажем, что ряд $\bigl(s+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{s^n}{n^n}\bigr)\xi_s$ сходится равномерно по $s\in\mathbb{N}$. Для этого установим, что его остаток

$$r_N(s)=\Biggl(\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{s^n}{n^n}\Biggr)\Bigg/\Biggl(s+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^{k+1}}{k^k}\Biggr)$$

равномерно (по s) стремится к нулю при $N\to\infty$.

Возьмем произвольно $\varepsilon>0$. Так как при всех $s,\ N\in\mathbb{N}$ верно, что $r_N(s)\le\dfrac1s$, то $r_N(s)<\varepsilon$ при $s>\dfrac{1}{\varepsilon}$ и произвольном $N\in\mathbb{N}$. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{s^n}{n^n}$ при каждом фиксированном s вытекает, что $r_N(s)\xrightarrow[N\to\infty]{}0$. По числу ε найдем такой номер N_0, что при всех $s\le\dfrac{1}{\varepsilon},\ N>N_0$ выполняется неравенство $r_N(s)<\varepsilon$. Таким образом, $r_N(s)<\varepsilon$ при $N>N_0$ и всех $s\in\mathbb{N}$, что означает равномерную (по s) сходимость к нулю последовательности остатков $r_N(s)$ при $N\to\infty$.

Итак, ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n x$ сходится в c_0. В то же время при любом $s\in\mathbb{N}$ справедливо, что

$$\Big(s+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{n+1}}{n^n}\Big)\xi_s=1,$$

т. е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^{n+1}x$ расходится в c_0. Таким образом, несмотря на сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n x,$$

все части равенств (12) для $f(\lambda)=\lambda$ не имеют смысла в c_0 $\big($ в данном случае при любом $m\in\mathbb{N}$ последовательность $\big\{\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+m}}\big\}_{n=0}^{\infty}$ монотонна, но не является ограниченной $\big)$.

П р и м е р 2. Пусть $X=c_0$, A — оператор из примера 1, $f(\lambda)=\lambda-1$ $\Big($в этом случае $\dfrac{1}{f}\notin\mathcal{F}$, поскольку $1\in\sigma(A)\Big)$. При этом $f(A)=A-E$, т. е. для $x=\{\xi_s\}_{s=1}^{\infty}$ верно, что

$$f(A)x=\big\{(s-1)\xi_s\big\}_{s=1}^{\infty}=\big\{f(s)\xi_s\big\}_{s=1}^{\infty}.$$

Берем $x=(1,0,0,\ldots,0,\ldots)$, полагаем $\alpha_n=1$ при $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Тогда поскольку ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\xi_1$ (в данном случае $\xi_1=1$) расходится, то расходится и ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n x$ (по лемме 2). С другой стороны, поскольку

$$f(A)x=(0,\xi_2,2\xi_3,3\xi_4,\ldots)=0,$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n f(A)x$ сходится (к нулю). Итак, (13) не имеет места

$$\Big(x\notin\mathcal{D}\big(f(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n\big),\quad\text{хотя}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n f(A)x=0\Big).$$

З а м е ч а н и е 6. Без предположения, что $\dfrac{1}{f}\in\mathcal{F}$, имеют место соотношения

$$\widetilde{f}(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n=f(A)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n\subset\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\widetilde{f}(A)A^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n f(A)A^n$$

$$\subset\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(\lambda^n f)(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A^n f(A).$$

Справедливость замечания вытекает из утверждения 4, замечания 2 и теорем 1, 3 из [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Из-во иностр. лит., 1962. 896 с.
2. **Люстерник Л.А., Соболев С.Л.** Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 519 с.
3. **Рудин У.** Функциональный анализ. М.: Мир, 1975. 449 с.
4. **Balakrishnan A.V.** Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them // Pacific J. Math. Soc. 1960. Vol. 3. P. 419–437. doi: 10.2140/pjm.1960.10.419 .
5. **Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
6. **Крейн С.Г.** Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 494 с.

7. **Komatsu H.** Fractional powers of operators // Interpolation spaces. Pacific J. Math. 1967. Vol. 21, no 1. P. 89–111. doi: 10.2140/pjm.1967.21.89 .
8. **Репин О.А.** Об одной задаче для уравнения смешанного типа с дробной производной // Изв. вузов. Математика. 2018. № 8. С. 46–51.
9. **Костин В.А., Костин Д.В., Костин А.В.** Операторные косинус-функции и граничные задачи // Докл. АН. 2019. Т. 486, № 5. С. 531–536.
10. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Некоторые классы функций линейного замкнутого оператора // Тр. института математики и механики УрО РАН, 2011. Т. 17, № 3. С. 186–200.
11. **Коркина Л.Ф., Рекант М.А.** Свойства отображений скалярных функций в операторные линейного замкнутого оператора // Тр. института математики и механики УрО РАН, 2015. Т. 21, № 1. С. 153–165.
12. **Korkina L.F., Rekant M.A.** Some properties of operator exponent // Ural. Math. J. 2018. Vol. 4, no. 2. P. 33–42. doi: 10.15826/umj.2018.2.005 .

Поступила 9.12.2019
После доработки 25.01.2020
Принята к публикации 3.02.2020

Коркина Людмила Федоровна
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: L.F.Korkina@urfu.ru

Рекант Марк Александрович
канд. физ.-мат. наук
доцент
Уральский федеральный университет,
г. Екатеринбург
e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru

REFERENCES

1. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators. I. General theory.* N Y: Interscience Publ., 1958, 858 p. ISBN: 0470226056 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962, 896 p.
2. Lusternik L.A. Sobolev V.J. *Elements of functional analysis.* International monographs on advanced mathematics and physics. Delhi: Hindustan Publishing Corp., 1974, 360 p. ISBN: 0470556501 . Original Russian text published in Lyusternik L.A., Sobolev V.I. *Elementy funktsional'nogo analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1965, 520 p.
3. Rudin W. *Functional Analysis.* N Y: McGraw–Hill, 1973, 397 p. ISBN: 9780070542259 . Translated to Russian under the title *Funktsional'nyi analiz.* Moscow: Mir Publ., 1975, 449 p.
4. Balakrishnan A.V. Fractional powers of closed operators and semigroups generated by them. *Pacific J. Math. Soc.*, 1960, vol. 3, pp. 419–437. doi: 10.2140/pjm.1960.10.419 .
5. Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. *Integral operators in spaces of summable functions.* Netherlands: Springer, 1976, 536 p. ISBN: 978-94-010-1544-8 . Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii.* Moscow: Nauka Publ., 1966, 499 p.
6. Krein S. *Linear differential equations in Banach space.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 29. Providence: AMS, 1972, 390 p. ISBN: 978-1-4704-1628-7 . Original Russian text published in Krein S.G. *Lineinye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve.* Moscow: Nauka Publ., 1967, 494 p.
7. Komabsu H. Fractional powers of operators. II. Interpolation spaces. *Pacific J. Math.*, 1967, vol. 21, no 1, pp. 89–111. doi: 10.2140/pjm.1967.21.89 .
8. Repin O.A. On a problem for mixed-type equation with fractional derivative. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2018, vol. 62, no. 8, pp. 38–42. doi: 10.3103/S1066369X18080066 .

9. Kostin V.A., Kostin D.V., Kostin A.V. Operator Cosine Functions and Boundary Value Problems. *Dokl. Math.*., 2019, vol. 99, no. 3, pp. 303–307. doi: 10.1134/S1064562419030177 .
10. Korkina L.F., Rekant M.A. Some classes of functions of a linear closed operator. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. 121–135. doi: 10.1134/S0081543812050124 .
11. Korkina L.F., Rekant M.A. Properties of mappings of scalar functions to operator functions of a linear closed operator. *Tr. Inst. Math. Mekh. UrO RAN*, 2015, vol. 21, no 1, pp. 153–165 (in Russian).
12. Korkina L.F., Rekant M.A. Some properties of operator exponent. *Ural. Math. J.*, 2018, vol. 4, no. 2, pp. 33–42. doi: 10.15826/umj.2018.2.005 .

Received December 9, 2019
Revised January 25, 2020
Accepted February 3, 2020

Lyudmila Fedorovna Korkina, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: L.F.Korkina@urfu.ru .

Mark Aleksandrovich Rekant, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: M.A.Rekant@urfu.ru .

Cite this article as: L. F. Korkina, M. A. Rekant. Some properties of power operator series. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp.161–172 .