ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ГРУППАХ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЛИЕВА ТИПА НАД ПОЛЯМИ РАЗНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК, ГРАФЫ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ КОТОРЫХ СОВПАДАЮТ[1]

М. Р. Зиновьева

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s из $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля*, или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$. В "Коуровской тетради" А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга — Кегеля. М. Хаги (2003) и М. А. Звездина (2013) получили такое описание в случае, когда одна из этих групп является спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор (2014) решил этот вопрос для пар конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики. В данной работе доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть G — конечная простая группа исключительного лиева типа над полем из q элементов и G_1 — неизоморфная группе G конечная простая группа лиева типа над полем из q_1 элементов, где q и q_1 взаимно просты. Если $GK(G) = GK(G_1)$, то выполнено одно из следующих утверждений:

(1) $\{G, G_1\} = \{G_2(3), A_1(13)\}$;
(2) $\{G, G_1\} = \{{}^2F_4(2)', A_3(3)\}$;
(3) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_2(q_1)\}$, где $(q_1 - 1)_3 \neq 3$, $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$;
(4) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_4^{\pm}(q_1)\}$, где $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$;
(5) $\{G, G_1\} = \{G_2(q), G_2(q_1)\}$, где q и q_1 не являются степенями числа 3;
(6) $\{G, G_1\}$ — одна из пар $\{F_4(q), F_4(q_1)\}$, $\{{}^3D_4(q), {}^3D_4(q_1)\}$, $\{E_8(q), E_8(q_1)\}$.

Существование пар групп в пп. (3)–(6) неизвестно.

Ключевые слова: конечная простая группа исключительного лиева типа, спектр, граф простых чисел.

M. R. Zinov'eva. On finite simple groups of exceptional Lie type over fields of different characteristics with coinciding prime graphs.

Suppose that G is a finite group, $\pi(G)$ is the set of prime divisors of its order, and $\omega(G)$ is the set of orders of its elements. A graph with the following adjacency relation is defined on $\pi(G)$: different vertices r and s from $\pi(G)$ are adjacent if and only if $rs \in \omega(G)$. This graph is called the *Gruenberg–Kegel graph* or the *prime graph* of G and is denoted by $GK(G)$. In A. V. Vasil'ev's Question 16.26 from the "Kourovka Notebook," it is required to describe all pairs of nonisomorphic finite simple nonabelian groups with identical Gruenberg–Kegel graphs. M. Hagie (2003) and M. A. Zvezdina (2013) gave such a description in the case where one of the groups coincides with a sporadic group and an alternating group, respectively. The author (2014) solved this question for pairs finite simple groups of Lie type over fields of the same characteristic. In the present paper we prove the following theorem.

Theorem. Let G be a finite simple group of exceptional Lie type over a field with q elements, and let G_1 be a finite simple group of Lie type over a field with q elements nonisomorphic to G, where q and q_1 are coprime. If $GK(G) = GK(G_1)$, then one of the following statements holds:

(1) $\{G, G_1\} = \{G_2(3), A_1(13)\}$;
(2) $\{G, G_1\} = \{{}^2F_4(2)', A_3(3)\}$;
(3) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_2(q_1)\}$, where $(q_1 - 1)_3 \neq 3$ and $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$;
(4) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_4^{\pm}(q_1)\}$, where $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$;
(5) $\{G, G_1\} = \{G_2(q), G_2(q_1)\}$, where q and q_1 are not powers of the number 3;
(6) $\{G, G_1\}$ is one of the pairs $\{F_4(q), F_4(q_1)\}$, $\{{}^3D_4(q), {}^3D_4(q_1)\}$, and $\{E_8(q), E_8(q_1)\}$.
The existence of pairs of groups in statements (3)–(6) is unknown.

Keywords: finite simple exceptional group of Lie type, spectrum, prime graph.

MSC: 05C25,20D05,20D06

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-147-160

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-01-00456) и в рамках проекта повышения конкурентоспособности, Соглашение между Министерством образования и науки Российской Федерации и Уральским федеральным университетом от 27.08.2013, №02.A03.21.0006.

Введение

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля*, или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

В "Коуровской тетради" [1] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга — Кегеля. М. Хаги [2] и М. А. Звездина [3] получили такое описание в случае, когда одна из групп пары совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно.

Автор в [4] решил этот вопрос для пар конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики.

В случае конечных простых групп лиева типа разных характеристик в 2016 г. доказана теорема редукции, описывающая равенство графов классических групп лиева типа достаточно большого ранга (см. [5]). В 2017 г. автор исследовал две конечные простые группы G и G_1 лиева типа над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \geq 5$, причем одна из этих групп является линейной группой. Тем самым уточнен первый пункт теоремы редукции.

В публикации 2018 г. (М. Р. Зиновьева. О конечных простых линейных и унитарных группах малых размерностей над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 73–90) рассмотрены две конечные простые группы G и G_1 лиева типа над полями разных характеристик с $t(G) = t(G_1) \leq 3$, причем одна из этих групп является линейной или унитарной группой. Далее будем ссылаться на эту работу как *на статью автора* 2018 г.

В настоящем исследовании автор продолжает изучать новые случаи проблемы. Мы рассматриваем две конечные простые группы лиева типа над полями разных характеристик, одна из которых является группой исключительного лиева типа.

Далее $q = p^f$ и $q_1 = {p_1}^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа. Для $\varepsilon \in \{+,-\}$ через $A^{\varepsilon}_{n-1}(q)$ обозначается $A_{n-1}(q) = L_n(q) = PSL_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2A_{n-1}(q) = U_n(q) = PSU_n(q)$ при $\varepsilon = -$, через $E^{\varepsilon}_6(q)$ обозначается $E_6(q)$ при $\varepsilon = +$ и ${}^2E_6(q)$ при $\varepsilon = -$.

Под группой исключительного лиева типа понимается одна из групп $G_2(q)$, $F_4(q)$, ${}^3D_4(q)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^2F_4(q)$, где $q > 2$, ${}^2F_4(2)'$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$.

Используя сведения о графах простых чисел конечных простых групп из [6–9], мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть G — конечная простая группа исключительного лиева типа над полем из q элементов и G_1 — неизоморфная группе G конечная простая группа лиева типа над полем из q_1 элементов, где q и q_1 взаимно просты. Если $GK(G) = GK(G_1)$, то выполнено одно из следующих утверждений*:

(1) $\{G, G_1\} = \{G_2(3), A_1(13)\}$;

(2) $\{G, G_1\} = \{{}^2F_4(2)', A_3(3)\}$;

(3) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A_2(q_1)\}$, *где* $(q_1 - 1)_3 \neq 3$, $q_1 + 1 \neq 2^{k_1}$;

(4) $\{G, G_1\} = \{{}^3D_4(q), A^{\pm}_4(q_1)\}$, *где* $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$;

(5) $\{G, G_1\} = \{G_2(q), G_2(q_1)\}$, *где q и q_1 не являются степенями числа* 3;

(6) $\{G, G_1\}$ *— одна из пар* $\{F_4(q), F_4(q_1)\}$, $\{{}^3D_4(q), {}^3D_4(q_1)\}$, $\{E_8(q), E_8(q_1)\}$.

Существование пар групп в пп. (3)–(6) *неизвестно.*

З а м е ч а н и е. Автору известны только следующие пары неизоморфных конечных простых групп лиева типа над полями разных характеристик с одинаковым графом простых чисел: $\{A_1(9), A_1(4)\}$, $\{A_1(9), A_1(5)\}$, $\{A_1(7), A_1(8)\}$, $\{{}^2A_3(3), A_1(49)\}$, $\{A_3(3), {}^2F_4(2)'\}$, $\{G_2(3), A_1(13)\}$.

Г и п о т е з а. Указанные в замечании пары исчерпывают все пары неизоморфных конечных простых групп лиева типа, заданные над полями разных характеристик с одинаковым графом простых чисел.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть G — конечная группа. Через $\pi(n)$ обозначается множество простых делителей натурального числа n. Для натурального n через n_p обозначается p-часть числа n. Обозначим $\pi(|G|)$ через $\pi(G)$.

Обозначим множество связных компонент графа $GK(G)$ через $\{\pi_i \mid i = 1, \ldots, s(G)\}$, где $s(G)$ — число связных компонент графа $GK(G)$; если порядок G четен, считаем $2 \in \pi_1$. В [6; 7] описаны связные компоненты графов простых чисел всех конечных простых групп. В [8; 9] был получен арифметический критерий смежности двух вершин в графе простых чисел для каждой конечной простой неабелевой группы.

Кокликой графа называется его индуцированный подграф с попарно не смежными вершинами. Мощность (размер) коклики называется ее *порядком. Максимальной кокликой* называется коклика, которая не содержится в другой коклике. Пусть $t(G)$ — наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$. Через $t(r, G)$ обозначается наибольшее число вершин в кокликах графа $GK(G)$, содержащих простое число r.

Для любой неединичной конечной группы G положим $\mathcal{T}(G) = \{t(r, G) \mid r \in \pi(G)\}$ и будем рассматривать $\mathcal{T}(G)$ как строго убывающую последовательность $(t(r_1, G), t(r_2, G), \ldots)$, где r_i — некоторые числа из $\pi(G)$. В статье [5, леммы 8–14] вычислены $\mathcal{T}(G)$ для простых классических групп G.

Согласно [9, определения 3.3–3.8], определяются подмножества $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ множества $\pi(G)$. Если G — одна из групп ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ или $A_2^{\varepsilon}(q)$, то $\Theta(G)$ и $\Theta'(G)$ определяются согласно [9, определения 3.3–3.7]. Если G не является одной из групп ${}^2B_2(2^{2m+1})$, ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$ или $A_2^{\varepsilon}(q)$, то согласно [9, определение 3.8] через $\theta(G)$ обозначается пересечение всех коклик максимального порядка графа $GK(G)$, а через $\Theta(G)$ — множество $\{\theta(G)\}$. Множество $\Theta'(G)$ состоит из всех подмножеств $\theta'(G)$ из $\pi(G) \setminus \theta(G)$, для которых $\theta(G) \cup \theta'(G)$ — коклика максимального порядка в графе $GK(G)$.

Лемма 1 (теорема Жигмонди [10]). *Пусть q и n — неединичные натуральные числа. Тогда существует простое число r, делящее $q^n - 1$ и не делящее $q^i - 1$ при $1 \le i < n$, причем $r \equiv 1 \pmod n$, кроме следующих случаев: $q = 2$ и $n = 6$; $q = 2^k - 1$ для некоторого простого числа k и $n = 2$.*

Согласно [8], если q — натуральное число, r — нечетное простое число и $(r, q) = 1$, то через $e(r, q)$ обозначается минимальное натуральное число n с $q^n \equiv 1 \pmod r$. Если q нечетно, то $e(2, q)$ равно 1 при $q \equiv 1 \pmod 4$ и 2 при $q \equiv -1 \pmod 4$. Говорят, что простое число r с $e(r, q) = n$ является *примитивным простым делителем* числа $q^n - 1$. Через $r_n(q)$ обозначается некоторый примитивный простой делитель числа $q^n - 1$, а через $R_n(q)$ множество всех таких делителей. По лемме 1 примитивный простой делитель $r_n(q)$ существует за исключением указанных в лемме 1 случаев. Если q фиксировано, то $r_n(q)$ обозначается через r_n.

Пусть n — натуральное число. Следуя [8; 9], положим $m_1(B, n) = 2^{2n+1} - 1$, $m_2(B, n) = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $m_3(B, n) = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$, $m_1(G, n) = 3^{2n+1} - 1$, $m_2(G, n) = 3^{2n+1} + 1$, $m_3(G, n) = 3^{2n+1} - 3^{n+1} + 1$, $m_4(G, n) = 3^{2n+1} + 3^{n+1} + 1$, $m_1(F, n) = 2^{2n+1} - 1$, $m_2(F, n) = 2^{2n+1} + 1$, $m_3(F, n) = 2^{4n+2} + 1$, $m_4(F, n) = 2^{4n+2} - 2^{2n+1} + 1$, $m_5(F, n) = 2^{4n+2} - 2^{3n+2} + 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$, $m_6(F, n) = 2^{4n+2} + 2^{3n+2} + 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1$.

Через $S_i(G)$ обозначается множество $\pi(m_i(F, n)) \setminus \{3\}$ для $G = {}^2F_4(2^{2n+1})$ и $i = 1, \ldots, 6$ и $\pi(m_i(G, n)) \setminus \{2\}$ для $G = {}^2G_2(3^{2n+1})$ и $i = 1, \ldots, 4$. Если группа G фиксирована, то положим $S_i = S_i(G)$ и обозначим через s_i любой элемент из S_i.

Конечные простые группы G лиева типа над полем нечетной характеристики p с $t(G) = 5$

G	условия на G	$t(2,G)$	$t(G)$	$s(G)$	$\Theta(G)$	элементы $\Theta'(G)$
$A_8(q)$		2	5	1	$\{r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{\varnothing\}$
${}^2A_8(q)$		2	5	1	$\{r_3, r_8, r_{10}, r_{14}, r_{18}\}$	$\{\varnothing\}$
$B_5(q)$, $C_5(q)$	$q \neq 3$	2	5	1	$\{r_3, r_5, r_6, r_8, r_{10}\}$	$\{\varnothing\}$
$A_9(q)$		2	5	1	$\{r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{r_5\}$,$\{r_{10}\}$
${}^2A_9(q)$		2	5	1	$\{r_3, r_8, r_{14}, r_{18}\}$	$\{r_5\}$,$\{r_{10}\}$
$B_6(q)$, $C_6(q)$		2	5	1	$\{r_5, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_6\}$
${}^2D_6(q)$		2	5	1	$\{r_5, r_8, r_{10}, r_{12}\}$	$\{r_3\}$,$\{r_4\}$,$\{r_6\}$
$F_4(q)$		2	5	2	$\{r_3, r_4, r_6, r_8, r_{12}\}$	$\{\varnothing\}$
$B_5(3)$, $C_5(3)$		2	5	2	$\{7, 11, 13, 41, 61\}$	$\{\varnothing\}$
$E_6(q)$		3	5	2	$\{r_5, r_8, r_9\}$	$\{r_3, r_4\}, \{r_4, r_{12}\}, \{r_6, r_{12}\}$
${}^2E_6(q)$		3	5	2	$\{r_8, r_{10}, r_{18}\}$	$\{r_3, r_{12}\}, \{r_4, r_6\}, \{r_4, r_{12}\}$
${}^2G_2(3^{2n+1})$	$n \geq 1$	3	5	3	$\{3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$	$\{\varnothing\}$

С использованием результатов [6–9] в статье [4] были составлены таблицы, в которых описаны некоторые числовые характеристики и максимальные коклики графов простых чисел конечных простых групп G лиева типа над полем порядка q с $t(G) \leq 6$ для четного q и с $t(G) \leq 4$ для нечетного q. Мы дополним эти таблицы, приведя все конечные простые группы G лиева типа для нечетного q с $t(G) = 5$ (см. таблицу выше).

Лемма 2 (Героно [11]). *Пусть p, q — простые числа такие, что $p^a - q^b = 1$ для некоторых натуральных чисел a, b. Тогда пара $(p^a,\ q^b)$ равна $(3^2,\ 2^3)$, $(p,\ 2^b)$ или $(2^a,\ q)$.*

Лемма 3 [12]. *Диофантово уравнение $(x^n - 1)/(x - 1) = y^q$ для целых чисел $x > 1$, $y > 1$, $n > 2$, $q \geq 2$ кроме решений $(3, 11, 5, 2)$, $(7, 20, 4, 2)$, $(18, 7, 3, 3)$ не имеет других решений (x, y, n, q), если выполнено одно из следующих условий: (i) $q = 2$, (ii) $3 \mid n$, (iii) $4 \mid n$, (iv) $q = 3$ и $n \neq 6k + 5$ для некоторого $k \geq 0$.*

Лемма 4 [6, лемма 3; 13, лемма 6(iii)]. *Пусть a, s, t — натуральные числа. Тогда*
(a) $(a^s - 1, a^t - 1) = a^{(s,t)} - 1$;
(b) $(a^s - 1, a^t + 1) = \begin{cases} a^{(s,t)} + 1, & \text{\textit{если} } s/(s,t) \text{\textit{четно и} } t/(s,t) \text{ \textit{нечетно},} \\ (2, a+1), & \text{\textit{иначе.}} \end{cases}$

Лемма 5. *Пусть p — простое нечетное число, m и n — натуральные числа. Тогда*
(1) *если $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n - 1)$, то либо m делит n, либо $m = 2$, n нечетно и $p = 2^s - 1$, где s — простое число*;
(2) *если $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n + 1)$, то либо $m = 1$ и $p = 2$, либо $m = 2$, $p = 2$ и n нечетно, либо $m = 1$ и $p = 2^{2^l} + 1$, либо $m = 2$, $p = 2^{2^l} + 1$, n нечетно, либо $m = 2$, $p = 3$ и n четно, либо $m = 4$, $p = 3$ и n — удвоенное нечетное число.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Пусть $\pi(p^m - 1) \subseteq \pi(p^n + 1)$. Предположим,что утверждение (1) неверно. Тогда $m \geq 2$ и $(m, p) \neq (2, 2^s - 1)$ для простого числа s. По лемме 1 существует $t \in R_m(p)$. По условию $t \in \pi(p^n - 1)$ и, следовательно, по п. (a) леммы 4 $t \in \pi(p^{(m,n)} - 1)$. Примитивность числа t влечет, что $(m, n) = m$, т. е. m делит n; противоречие.

(2) Пусть $\pi(p^m-1)\subseteq\pi(p^n+1)$. Предположим, что $p=2$. Если $(2^m-1,2^n+1)=1$, то $m=1$ и п. (2) леммы выполняется. Поэтому можно считать, что $(2^m-1,2^n+1)>1$. По п. (b) леммы 4 имеем $(2^m-1,2^n+1)=2^{(m,n)}+1$, $m/(m,n)$ четно и $n/(m,n)$ нечетно. Поскольку $(2^n-1,2^n+1)=1$ и $\pi(p^m-1)\subseteq\pi(p^n+1)$, то $(2^m-1,2^n-1)=1$. Но п. (a) леммы 4 имеем $(2^m-1,2^n-1)=2^{(m,n)}-1$ и, следовательно, $(m,n)=1$ и n нечетно. Поскольку $\pi(p^m-1)\subseteq\pi(p^n+1)\subseteq\pi(p^{2n}-1)$, то по п. (1) m делит $2n$, откуда $m=2$ и п. (2) леммы выполняется.

Предположим, что $p>2$. Поскольку $p-1$ делит p^m-1, имеем $\pi(p-1)\subseteq\pi(p^n+1)$. Но $(p-1,p^n+1)=2$, следовательно, ввиду леммы 2 имеем $p=2^{2^l}+1$. Можно считать, что $m\geq 2$.

Пусть $m=2$. Тогда $\pi(p+1)\subseteq\pi(p^n+1)$. Если n нечетно, то п. (2) выполняется. Если n четно, то $(p+1,p^n+1)=(p+1,p^n-1+2)=(p+1,2)=2$, откуда $\pi(p+1)$ и, следовательно, $\pi(p^2-1)=\{2\}$, т. е. $p=3$ и п. (2) леммы выполняется.

Пусть $m\geq 3$. По лемме 1 существует $t\in\pi(p^m-1)\setminus\{2\}$. По условию $t\in\pi(p^n+1)$, следовательно, $t\in\pi(p^{(m,n)}+1)$. По п. (b) леммы 4 имеем $(p^m-1,p^n+1)=p^{(m,n)}+1$, $m/(m,n)$ четно и $n/(m,n)$ нечетно. Так как $\pi(p^m-1)\subseteq\pi(p^{(m,n)}+1)\subseteq\pi(p^{2(m,n)}-1)$, то по п. (1) леммы m делит $2(m,n)$, откуда $m=2(m,n)$. Таким образом, $\pi(p^m-1)\subseteq\pi(p^{m/2}+1)$. Так как $(p^{m/2}-1,p^{m/2}+1)=2$, то $\pi(p^{m/2}-1)=\{2\}$. Так как $m\geq 3$, то по лемме 2 имеем $m/2=2$, $p=3$ и n — удвоенное нечетное число, т. е. п. (2) леммы выполняется. □

Лемма 6. *Пусть α — натуральное число. Тогда*
(a) $\pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+2)\neq\{2,7\}$ *при* $\alpha\equiv 4\pmod 6$;
(b) *если* $\pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+2)=\{2,7\}$ *и* $\alpha\equiv 1\pmod 6$, *то* $\alpha=1$.

Доказательство. (a) От противного. Предположим, что $\alpha\equiv 4\pmod 6$ и $\pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+2)=\{2,7\}$. Тогда $\alpha=4+6t$ для некоторого целого числа t, поэтому $3^{6t}=(735-6)^t\equiv(-6)^t\pmod{49}$, $3^\alpha\equiv 32(-6)^t\pmod{49}$ и $3^{2\alpha}\equiv 44(36)^t\pmod{49}$. Если

$$t\equiv 0,1,2,3,4,5,6\pmod 7,$$

то $3^\alpha\equiv 32,4,25,46,18,39,11\pmod{49}$и $3^{2\alpha}\equiv 44,16,37,9,30,2,23\pmod{49}$ соответственно. По предположению $3^{2\alpha}-3^\alpha+2\equiv 14\pmod{49}$ и, следовательно, $3^{2\alpha}-3^\alpha+2=7\cdot 2^\beta$ для некоторого натурального числа β. Так как α четно, то $3^\alpha\equiv 1\pmod 4$, поэтому $7\cdot 2^\beta\equiv 2\pmod 4$. Отсюда $\beta=1$. Но уравнение $3^{2\alpha}-3^\alpha+2=14$ не имеет решений; противоречие.

(b) Пусть $\alpha\equiv 1\pmod 6$ и $\pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+2)=\{2,7\}$. Можно считать, что $\alpha=1+6t$ для некоторого целого неотрицательного числа t, поэтому $3^{6t}=(735-6)^t\equiv(-6)^t\pmod{49}$, $3^\alpha\equiv 3(-6)^t\pmod{49}$ и $3^{2\alpha}\equiv 9(36)^t\pmod{49}$. Если

$$t\equiv 0,1,2,3,4,5,6\pmod 7,$$

то $3^\alpha\equiv 3,31,10,38,17,45,24\pmod{49}$ и $3^{2\alpha}\equiv 9,30,2,23,44,16,37\pmod{49}$ соответственно. По предположению $3^{2\alpha}+3^\alpha+2\equiv 14\pmod{49}$, и, следовательно, $3^{2\alpha}+3^\alpha+2=7\cdot 2^\beta$ для некоторого натурального числа β. Так как α нечетно, то $3^\alpha\equiv 3\pmod 4$, поэтому $7\cdot 2^\beta\equiv 2\pmod 4$. Отсюда $\beta=1$. Уравнение $3^{2\alpha}+3^\alpha+2=14$ имеет единственное решение $\alpha=1$. □

Лемма 7. *Пусть α — натуральное число. Тогда*

(a) $(3^{2\alpha}+3^\alpha+2,3^{2\alpha}-3^\alpha+1)=\begin{cases}7, \alpha\equiv 1\pmod 6,\\ 1, & \textit{иначе};\end{cases}$

(b) $(3^{2\alpha}-3^\alpha+2,3^{2\alpha}+3^\alpha+1)=\begin{cases}7, \alpha\equiv 4\pmod 6,\\ 1, & \textit{иначе}.\end{cases}$

Доказательство. (a) Положим $x=3^\alpha$. Тогда x нечетно и $x\geq 3$. Вычислим (x^2+x+2,x^2-x+1). По алгоритму Евклида

$$x^2+x+2=(x^2-x+1)+2x+1,\quad x^2-x+1=(2x+1)\cdot(x-3)/2+3x/2+5/2.$$

Получаем, что
$$(x^2+x+2, x^2-x+1) = (2x+1, 3x/2+5/2).$$
Положим $x_1 = (x-1)/2$. Тогда $x_1 \geq 1$, $2x+1 = 4x_1+3$ и $3x/2+5/2 = 3x_1+4$. По алгоритму Евклида
$$(2x+1, 3x/2+5/2) = (4x_1+3, 3x_1+4) = (3x_1+4, x_1-1) = (7, x_1-1).$$
Пусть 7 делит x_1-1, т. е. 7 делит $3^{\alpha-1}-1$. Тогда 6 делит $\alpha-1$, т. е. $\alpha \equiv 1 \pmod 6$. Пункт (a) доказан.

(b) Доказательство аналогично доказательству п. (a). □

Лемма 8. *Пусть α — натуральное число. Тогда*

(a) *Если $\pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+2) = \{2\}$, то либо $3^\alpha = 3$, либо $3^{2\alpha}-3^\alpha+2 = 2^{2t}$ для некоторого натурального числа t;*

(b) $\pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+2) \neq \{2\}$.

Доказательство. (a) Можно предполагать, что $3^{2\alpha}-3^\alpha+2 = 2^{2t+1}$ для некоторого натурального числа t. Тогда $3^\alpha(3^\alpha-1) = 2(2^t-1)(2^t+1)$. Значит, 3^α делит либо 2^t-1, либо 2^t+1. Отсюда либо $3^\alpha = 2^t+1$, либо $3^\alpha \leq 2^t-1$. Если $2^t+1 = 3^\alpha$, то по лемме 2 имеем $(t,\alpha) \in \{(1,1);(3,2)\}$. При $(t,\alpha) = (1,1)$ имеем $3^\alpha = 3$. При $(t,\alpha) = (3,2)$ имеем $3^\alpha = 9$ и $9^2-9+2 \neq 2^7$; противоречие. Если $3^\alpha \leq 2^t-1$, то
$$3^\alpha(3^\alpha-1) = 2(2^t-1)(2^t+1) \geq 2\cdot 3^\alpha(3^\alpha+2)$$
и $3^\alpha \leq -5$; противоречие.

(b) Предположим, что $3^{2\alpha}+3^\alpha+2 = 2^{2t+1}$ для некоторого натурального числа t. Тогда $3^\alpha(3^\alpha+1) = 2(2^t-1)(2^t+1)$. Значит, 3^α делит либо 2^t-1, либо 2^t+1. Отсюда либо $3^\alpha = 2^t+1$, либо $3^\alpha \leq 2^t-1$. Если $2^t+1 = 3^\alpha$, то по лемме 2 имеем $(t,\alpha) \in \{(1,1);(3,2)\}$. При $(t,\alpha) = (1,1)$ имеем $3^\alpha = 3$ и $9+3+2 \neq 8$; противоречие. При $(t,\alpha) = (3,2)$ имеем $3^\alpha = 9$ и $9^2+9+2 \neq 2^7$; противоречие. Если $3^\alpha \leq 2^t-1$, то $3^\alpha(3^\alpha+1) = 2(2^t-1)(2^t+1) \geq 2\cdot 3^\alpha(3^\alpha+2)$ и $3^\alpha \leq -3$; противоречие.

Предположим, что $3^{2\alpha}+3^\alpha+2 = 2^{2t}$ для некоторого натурального числа t. При $3^\alpha = 3$ имеем $3^{2\alpha}+3^\alpha+2 = 14 \neq 2^t$. Значит, $3^\alpha \geq 9$. Отсюда $2^{2t} = 3^{2\alpha}+3^\alpha+2 \geq 92$, поэтому $t \geq 4$. Имеем $3^{2\alpha}+3^\alpha+2 = 2^{2t} \equiv 0 \pmod{256}$. Пусть α нечетно. Тогда $3^\alpha \equiv 3 \pmod 4$ и $3^{2\alpha} \equiv 1 \pmod 4$, поэтому $3^{2\alpha}+3^\alpha+2 \equiv 2 \pmod 4$; противоречие. Значит, α четно. Пусть $\alpha = 4k$, где k — натуральное число. Тогда $3^\alpha = 3^{4k} = 81^k \equiv 1 \pmod{16}$ и $3^{2\alpha} \equiv 1 \pmod{16}$, поэтому $3^{2\alpha}+3^\alpha+2 \equiv 4 \pmod{16}$; противоречие. Пусть $\alpha = 4k+2$, где k — натуральное число. Тогда $3^\alpha = 3^{4k}\cdot 3^2 = 81^k\cdot 9 \equiv 9 \pmod{16}$ и $3^{2\alpha} \equiv 1 \pmod{16}$, поэтому $3^{2\alpha}+3^\alpha+2 \equiv 12 \pmod{16}$; противоречие. □

Лемма 9. (a) *Пусть α и n — натуральные числа и p — простое число. Тогда система уравнений (относительно (α,p,n))*
$$\begin{cases} \pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+1) = \{p\}, \\ \pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+1) = \pi((p^n+1)/2), \\ \pi(3(3^{2\alpha}-1)) = \pi(p^n-1) \end{cases}$$
имеет единственное решение $(\alpha,p,n) = (1,13,1)$;

(b) *система уравнений (относительно (α,p,n))*
$$\begin{cases} \pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+1) = \{p\}, \\ \pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+1) = \pi((p^n+1)/2), \\ \pi(3(3^{2\alpha}-1)) = \pi(p^n-1) \end{cases}$$
не имеет решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (a) Из первого уравнения системы следует, что $3^{2\alpha}+3^\alpha+1=p^m$, где m — натуральное число, т. е. $\dfrac{(3^\alpha)^3-1}{3^\alpha-1}=p^m$. По лемме 3 $m=1$ и $3^{2\alpha}+3^\alpha+2=p+1$.

Пусть n нечетно. Тогда $\pi((p+1)/2)\subseteq\pi((p^n+1)/2)=\pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+1)$, поэтому

$$\pi((3^{2\alpha}+3^\alpha+2)/2)\subseteq\pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+1).$$

По п. (a) леммы 7 имеем $\pi((3^{2\alpha}+3^\alpha+2)/2)=\{7\}$ и $\alpha\equiv 1 \pmod 6$, т. е. $\pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+2)=\{2,7\}$. По п. (b) леммы 6 имеем $\alpha=1$ и $p=13$. Отсюда $\pi(13^n-1)=\pi(3(3^{2\alpha}-1))=\{2,3\}$. Теперь из леммы 1 получаем, что $(\alpha,p,n)=(1,13,1)$.

Пусть n четно. Тогда $\pi(p^2-1)\subseteq\pi(p^n-1)=\pi(3^\alpha-1)\cup\pi(3(3^\alpha+1))=\pi(3^\alpha-1)\cup\pi(p-1)$. Отсюда $\pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+2)=\pi(p+1)\subseteq\pi(3^\alpha-1)$. По алгоритму Евклида

$$3^{2\alpha}+3^\alpha+2=(3^\alpha-1)(3^\alpha+2)+4,$$

$(3^{2\alpha}+3^\alpha+2,3^\alpha-1)=(4,3^\alpha-1)$ делит 4. Значит, $\pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+2)=\{2\}$. Противоречие с п. (b) леммы 8.

(b) Из первого уравнения системы следует, что $3^{2\alpha}-3^\alpha=p^m-1$, где m — натуральное число, поэтому

$$\pi(p^m-1)=\pi(3^\alpha(3^\alpha-1))\subseteq\pi(3(3^{2\alpha}-1))=\pi(p^n-1).$$

По п. (1) леммы 5 либо m делит n, либо $m=2$ и $p=2^s-1$.

Предположим, что $m=2$ и $p=2^s-1$. Тогда $3^\alpha(3^\alpha-1)=2^{s+1}(2^{s-1}-1)$. Так как 3^α делит $2^{s-1}-1$, то $3^\alpha\le 2^{s-1}-1$. Имеем $2^{s+1}(2^{s-1}-1)=3^\alpha(3^\alpha-1)\le 2(2^{s-1}-1)(2^{s-2}-1)$. Поэтому $2^s\le 2^{s-2}-1$; противоречие.

Предположим, что $n=mt$, где t — четное число. Тогда

$$\pi(p^m+1)\setminus\{2\}=\pi(p^{2m}-1)\setminus\pi(p^m-1)\subseteq\pi(p^{mt}-1)\setminus\pi(p^m-1)=\pi(3^\alpha+1)\setminus\{2\}.$$

Итак, $\pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+2)=\pi(p^m+1)\subseteq\pi(3^\alpha+1)$. По алгоритму Евклида

$$3^{2\alpha}-3^\alpha+2=(3^\alpha+1)(3^\alpha-2)+4,$$

$(3^{2\alpha}-3^\alpha+2,3^\alpha+1)=(4,3^\alpha+1)$ делит 4. Значит, $\pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+2)=\{2\}$. По п. (a) леммы 8 либо $3^\alpha=3$, либо $3^{2\alpha}-3^\alpha+2=2^{2t}$.

Пусть $3^{2\alpha}-3^\alpha+2=2^{2t}$. Тогда $p^m+1=2^{2t}$. По лемме 2 число $2t$ простое, поэтому $2t=2$. Отсюда $3^\alpha(3^\alpha-1)=2$; противоречие.

Пусть $3^\alpha=3$. Тогда $p^m=7$, и, следовательно, $p=7$. Имеем $\pi(7^n-1)=\{2,3\}$ и $\pi((7^n+1)/2)=\{13\}$. Если $n\in\{1,2\}$, то $\pi(7^n-1)=\{2,3\}$. Если $n\ge 3$, то по лемме 1 $\pi(7^n-1)\ne\{2,3\}$. Значит, $n\in\{1,2\}$. При $n\in\{1,2\}$ и, следовательно, $\pi((7^n+1)/2)\ne\{13\}$; противоречие.

Предположим, что $n=mt$, где t — нечетное число. Тогда $\pi((p^m+1)/2)\subseteq\pi((p^{mt}+1)/2)=\pi((p^n+1)/2)$, поэтому $\pi((3^{2\alpha}-3^\alpha+2)/2)\subseteq\pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+1)$. Ввиду п. (b) леммы 7 имеем $\pi((3^{2\alpha}-3^\alpha+2)/2)=\{7\}$ и $\alpha\equiv 4 \pmod 6$. Это противоречит п. (a) леммы 6. $\square$

Лемма 10. *Пусть α и n — натуральные числа и p — простое число. Тогда системы уравнений (относительно (α,p,n))*

$$\text{(a)}\quad \begin{cases}\pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+1)=\{p\},\\ \pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+1)=\pi((p^n-1)/2),\\ \pi(3(3^{2\alpha}-1))=\pi(p^n+1),\end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \begin{cases}\pi(3^{2\alpha}+3^\alpha+1)=\{p\},\\ \pi(3^{2\alpha}-3^\alpha+1)=\pi((p^n-1)/2),\\ \pi(3(3^{2\alpha}-1))=\pi(p^n+1)\end{cases}$$

не имеют решений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (a) Из первого уравнения системы следует, что $3^{2\alpha}-3^{\alpha}+1=p^m$, где m — натуральное число, т. е. $3^{\alpha}(3^{\alpha}-1)=p^m-1$. Поэтому

$$\pi(p^m-1)=\pi(3^{\alpha}(3^{\alpha}-1))\subseteq\pi(3(3^{2\alpha}-1))=\pi(p^n+1),$$

т. е. $\pi(p^m-1)\subseteq\pi(p^n+1)$. Так как $p>3$, то по п. (2) леммы 5 получаем, что $p=2^{2^l}+1$, где l — натуральное число, и либо $m=1$, либо $m=2$ и n нечетно.

Если $m=1$, то $3^{\alpha}(3^{\alpha}-1)=p-1=2^{2^l}$; противоречие.

Предположим, что $m=2$. Тогда $3^{\alpha}(3^{\alpha}-1)=2^{2^l+1}(2^{2^l-1}+1)$. Так как 3^{α} делит $2^{2^l-1}+1$, то $3^{\alpha}\leq 2^{2^l-1}+1$. Имеем $2^{2^l+1}(2^{2^l-1}+1)=3^{\alpha}(3^{\alpha}-1)\leq 2^{2^l-1}(2^{2^l-1}+1)$. Отсюда $2\leq 1/2$; противоречие.

(b) Из первого уравнения системы следует, что $3^{2\alpha}+3^{\alpha}+1=p^m$, где m — натуральное число. Поэтому

$$\pi(p^m-1)=\pi(3^{\alpha}(3^{\alpha}+1))\subseteq\pi(3(3^{2\alpha}-1))=\pi(p^n+1).$$

По п. (2) леммы 5 имеем $p=2^{2^l}+1$, где l — натуральное число, и либо $m=1$, либо $m=2$ и n нечетно.

Если $m=1$, то $3^{\alpha}(3^{\alpha}+1)=2^{2^l}$; противоречие.

Предположим, что $m=2$. Тогда $3^{\alpha}(3^{\alpha}+1)=2^{2^l+1}(2^{2^l-1}+1)$. Так как 3^{α} делит $2^{2^l-1}+1$, то $3^{\alpha}\leq 2^{2^l-1}+1$. Имеем $2^{2^l+1}(2^{2^l-1}+1)=3^{\alpha}(3^{\alpha}+1)\leq(2^{2^l-1}+1)(2^{2^l-1}+2)$. Отсюда $2^{2^l}\leq 4/3$; противоречие. □

В последующих далее леммах $q=p^f$ и $q_1=p_1^{f_1}$, где p, p_1 — различные простые числа и f, f_1 — натуральные числа,G и G_1 — неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно. Будем предполагать также, что $GK(G)=GK(G_1)$.

Лемма 11. *Если G — одна из групп $G_2(4)$, $G_2(8)$, ${}^3D_4(2)$, ${}^3D_4(4)$, ${}^3D_4(8)$, $F_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, ${}^2F_4(8)$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(2)$, то $\{G,G_1\}=\{{}^2F_4(2)',A_3(3)\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — одна из групп ${}^3D_4(4)$, ${}^3D_4(8)$, $G_2(8)$, ${}^2F_4(8)$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(2)$. Тогда по [14] $\pi(G_1)\neq\pi(G)$, и, следовательно, $GK(G_1)\neq GK(G)$; противоречие.

Далее предполагаем, что для некоторой группы G_1 имеет место равенство $GK(G_1)=GK(G)$.

Пусть $G=G_2(4)$. Имеем $\pi(G)=\pi(G_1)=\{2,3,5,7,13\}$, и по [14]

$$G_1\in\{A_2(9),C_3(3),B_3(3),D_4(3),{}^2A_3(5)\}.$$

По [4, табл. 1, 2] $GK(G_1)\neq GK(G)$; противоречие.

Пусть $G=F_4(2)$. Имеем $\pi(G)=\pi(G_1)=\{2,3,5,7,13,17\}$, и по [14] $G_1\in\{A_1(169),C_2(13)\}$. По [4, табл. 1, 2] $GK(G)\neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G={}^2F_4(2)'$. Имеем $\pi(G)=\pi(G_1)=\{2,3,5,13\}$. По [14] $G_1\in\{A_1(25),A_3(3),C_2(5)\}$. По [4, табл. 1, 2] $G_1=A_3(3)$.

Пусть $G={}^3D_4(2)$. Имеем $\pi(G)=\pi(G_1)=\{2,3,7,13\}$. По [14] $G_1\in\{A_1(13),A_1(27),G_2(3)\}$. По [4, табл. 1, 2] $GK(G_1)\neq GK(G)$; противоречие. □

Из леммы 11 следует п. (2) теоремы. □

Лемма 12. *Если $G=G_2(q)$, где $q=3^f$, то $\{G,G_1\}=\{G_2(3),A_1(13)\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $GK(G)=GK(G_1)$. По [4, табл. 1, 2] либо $G_1=A_1(q_1)$, либо $G_1\in\{A_2(2),{}^2A_3(3),{}^2A_5(2)\}$. Если $G_1\in\{A_2(2),{}^2A_3(3),{}^2A_5(2)\}$, то по [5, лемма 6] $GK(G)\neq GK(G_1)$. Значит, $G_1=A_1(q_1)$. Рассмотрим компоненты связности графов $GK(G)$ и $GK(G_1)$, используя [6; 7]. Если q_1 четно, то $\pi(q(q^2-1))=\{2\}$; противоречие.

Если $q_1 \equiv 1 \pmod 4$, то из равенства компонент графов $GK(G)$ и $GK(G_1)$ получаем одну из систем

$$\begin{cases}\pi(3^{2f}+3^f+1)=\{p_1\},\\ \pi(3^{2f}-3^f+1)=\pi((q_1+1)/2),\\ \pi(3(3^{2f}-1))=\pi(q_1-1),\end{cases} \qquad \begin{cases}\pi(3^{2f}-3^f+1)=\{p_1\},\\ \pi(3^{2f}+3^f+1)=\pi((q_1+1)/2),\\ \pi(3(3^{2f}-1))=\pi(q_1-1).\end{cases}$$

По лемме 9 получаем $q=3$ и $q_1=13$, т. е. выполняется заключение леммы.

Если $q_1 \equiv 3 \pmod 4$, то из равенства компонент графов $GK(G)$ и $GK(G_1)$ получаем одну из систем

$$\begin{cases}\pi(3^{2f}-3^f+1)=\{p_1\},\\ \pi(3^{2f}+3^f+1)=\pi((q_1-1)/2),\\ \pi(3(3^{2f}-1))=\pi(q_1+1),\end{cases} \qquad \begin{cases}\pi(3^{2f}+3^f+1)=\{p_1\},\\ \pi(3^{2f}-3^f+1)=\pi((q_1-1)/2),\\ \pi(3(3^{2f}-1))=\pi(q_1+1).\end{cases}$$

По лемме 10 получаем противоречие. □

Из леммы 12 следует п. (1) теоремы. □

Лемма 13. *Если $G=G_2(q)$, где q — не степень 3, то $G_1=G_2(q_1)$, где q_1 нечетно и не степень 3.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть q четно. Если $q\in\{4,8\}$, то по лемме 11 $GK(G)\neq GK(G_1)$. Значит, $q\notin\{4,8\}$. По [4, табл. 1, 2] $G_1\in\{A_3(5),G_2(q_1)\}$, где q_1 — не степень 3. Если $G_1=A_3(5)$, то по [14] $GK(G)\neq GK(G_1)$. Если $G_1=G_2(q_1)$, то получаем заключение леммы.

Пусть q нечетно. По [4, табл. 1, 2] либо $G_1=G_2(q_1)$, где q_1 нечетно, либо

$$G_1\in\{A_2(8),A_3(2),A_3(5),A_5(4),A_7(2),{}^2A_2(8),{}^2A_4(2),{}^2D_4(2),{}^2D_5(2),G_2(4),G_2(8)\},$$

либо G_1 — одна из групп $A_2(q_1)$, где $8<q_1$ четно и $(q_1-1)_3\neq 3$; $A_4(q_1)$, где q_1 четно; ${}^2A_2(q_1)$, где $q_1\neq 8$ четно и $(q_1+1)_3\neq 3$; ${}^2A_4(q_1)$, где q_1 четно.

Если $G_1=G_2(q_1)$, то получаем заключение леммы. Если $G_1\in\{G_2(4),G_2(8)\}$, то по лемме 11 $GK(G)\neq GK(G_1)$. Если $G_1\in\{A_3(2),{}^2A_2(8),{}^2A_4(2)\}$, то по лемме 12 из работы автора 2018 г. $GK(G)\neq GK(G_1)$. Если $G_1\in\{A_7(2),{}^2D_4(2),{}^2D_5(2)\}$, то по [5, лемма 6] $GK(G)\neq GK(G_1)$. Если $G_1\in\{A_2(8),A_3(5),A_5(4)\}$, то по [14] $GK(G)\neq GK(G_1)$; противоречие.

Рассмотрим случай $G=G_2(q)$, где $q\equiv 1 \pmod 3$. По [9, табл. 4] все максимальные коклики в $GK(G)$ таковы:

$$\{p,r_3(q),r_6(q)\},\quad \{r_2(q),r_3(q),r_6(q)\}\ \text{ при }\ r_2(q)\neq 2,\quad \{r_1(q),r_3(q),r_6(q)\}\ \text{ при }\ r_1(q)\neq 2,3,$$

$$\{2,r_3(q),r_6(q)\},\quad \{3,r_6(q)\}.$$

Пусть $G_1=A_2(q_1)$, где $q_1>8$ и $(q_1-1)_3\neq 3$. В $GK(G)$ есть максимальные коклики $\{p,r_3(q),r_6(q)\}$, а в $GK(G_1)$ все максимальные коклики имеют вид $\{2,r_2(q_1),r_3(q_1)\}$; противоречие.

Пусть $G_1=A_4(q_1)$, где $(q_1-1)_5\neq 5$. По [9, табл. 2] все максимальные коклики в $GK(G)$ таковы:

$$\{2,r_4(q_1),r_5(q_1)\},\quad \{r_3(q_1),r_4(q_1),r_5(q_1)\},\quad \{r_1(q_1),r_5(q_1)\}\ \text{ при }\ r_1(q_1)\neq 2,$$

$$\{r_2(q_1),r_5(q_1)\}\ \text{ при }\ r_2(q)\neq 2.$$

Положим

$$A=\{\{3,r_6(q)\}\},B=\{\{r_1(q_1),r_5(q_1)\}\}\cup\{\{r_2(q_1),r_5(q_1)\}\}.$$

Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получаем, что

$$\{2, r_3(q), r_6(q)\} = \{2, r_4(q_1), r_5(q_1)\},$$

поэтому $R_6(q) \subseteq R_4(q_1) \cup R_5(q_1)$. Так как $A = B$, то $R_6(q) \subseteq R_1(q_1) \cup R_2(q_1) \cup R_5(q_1)$. Итак, $R_6(q) \subseteq R_5(q_1)$. Также из равенства $A = B$ следует, что $\pi(q_1^2 - 1) = \{3\}$. Имеем уравнение $2^{2f_1} - 3^t = 1$ для некоторого натурального числа t. По лемме 2 $t = 1$, $f_1 = 1$, $q_1 = 2$. Значит, $G_1 = A_4(2)$. По лемме 12 из работы автора 2018 г. $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $G_1 = A_4(q_1)$, где $(q_1-1)_5 = 5$. Как и в случае $G_1 = A_4(q_1)$, где $(q_1-1)_5 \neq 5$, получаем, что $q_1 = 2$, но $(2-1)_5 \neq 5$; противоречие.

В случаях $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $q_1 \neq 8$, $(q_1+1)_3 \neq 3$ и $G_1 = {}^2A_4(q_1)$ аналогично получаем противоречие.

В случае $G = G_2(q)$, где $q \equiv 2 \pmod 3$, получаем противоречие аналогично случаю $G = G_2(q)$, где $q \equiv 1 \pmod 3$. □

Из леммы 13 следует п. (5) теоремы. □

Лемма 14. *Если $G = {}^3D_4(q)$, то G_1 — одна из групп $A_2(q_1)$, где $(q_1-1)_3 \neq 3$ и $q_1+1 \neq 2^{k_1}$; $A_4^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$; ${}^3D_4(q_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что q четно. По [4, табл. 1, 2] G_1 — одна из групп ${}^3D_4(q_1)$; $A_2^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 = 3$ и $q_1 \pm 1 = 2^{k_1}$; $A_2^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 \neq 3$ и $q_1 \pm 1 \neq 2^{k_1}$; $A_4^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$; $A_4^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 = 5$; $A_3(3)$, $A_5(3)$, $A_5(7)$, ${}^2A_5(5)$, $B_3(3)$, $C_3(3)$, $D_4(3)$. По [9, табл. 4] все максимальные коклики в $GK(G)$ таковы:

$$\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}, \quad \{r_1(q), r_{12}(q)\} \text{ при } r_1(q) \neq 2, \quad \{r_2(q), r_{12}(q)\} \text{ при } r_2(q) \neq 2, \quad \{2, r_{12}(q)\}.$$

Если $G_1 \in \{A_3(3), A_5(7), {}^2A_5(5)\}$, то по лемме 12 из работы автора 2018 г. $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если $G_1 \in \{A_5(3), B_3(3), C_3(3), D_4(3)\}$, то по [14] $G \neq {}^3D_4(q)$; противоречие.

Пусть $G_1 = A_2(q_1)$, где $(q_1-1)_3 = 3$ и $q_1+1 = 2^{k_1}$. В $GK(G_1)$ есть максимальные коклики $\{3, p_1, r_3(q_1)\}$, а в $GK(G)$ все максимальные коклики имеют вид $\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}$; противоречие.

Пусть $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $(q_1+1)_3 = 3$ и $q_1-1 = 2^{k_1}$. В $GK(G_1)$ есть коклика $\{3, p_1, r_6(q_1)\}$, а в $GK(G)$ все коклики порядка 3 имеют вид $\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}$; противоречие.

Пусть $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $q_1 > 2$, $(q_1+1)_3 \neq 3$ и $q_1-1 \neq 2^{k_1}$. По [9, табл. 2] все максимальные коклики в $GK(G_1)$ таковы:

$$\{p_1, r_1(q_1), r_6(q_1)\} \text{ при } r_1(q_1) \neq 2, \quad \{r_2(q_1), r_6(q_1)\} \text{ при } r_2(q_1) \neq 2, 3,$$

$$\{3, r_6(q_1)\} \text{ при } (q_1+1)_3 > 3, \quad \{2, r_6(q_1)\}.$$

Так как $\{2, r_{12}(q)\} = \{2, r_6(q_1)\}$, то $R_{12}(q) = R_6(q_1)$. Из равенства

$$\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\} = \{p_1, r_1(q_1), r_6(q_1)\}$$

следует, что $p_1 \in R_3(q) \cup R_6(q)$, поэтому $p_1 \equiv 1 \pmod 3$, а значит, $q_1 \equiv 1 \pmod 3$, т. е. 3 делит $q_1 - 1$. В $GK(G_1)$ есть максимальная коклика, содержащая 3, а в $GK(G)$ ее нет; противоречие.

Пусть $G_1 = A_4(q_1)$, где $(q_1-1)_5 = 5$. В $GK(G_1)$ есть коклика $\{5, r_4(q_1), r_5(q_1)\}$, а в $GK(G)$ все коклики порядка 3 имеют вид $\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}$; противоречие.

Пусть $G_1 = {}^2A_2(q_1)$, где $(q_1+1)_5 = 5$. В $GK(G_1)$ есть коклика $\{5, r_4(q_1), r_{10}(q_1)\}$, а в $GK(G)$ все коклики порядка 3 имеют вид $\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}$; противоречие.

Предположим, что q нечетно. По [4, табл. 1, 2] G_1 — одна из групп ${}^3D_4(q_1)$; $A_2^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 = 3$ и $q_1 \pm 1 = 2^{k_1}$; $A_2^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 \neq 3$ и $q_1 \pm 1 \neq 2^{k_1}$; $A_4^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 \neq 5$;

$A_4^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 = 5$; $A_3(3)$, $A_5(3)$, $A_5(7)$, ${}^2A_5(5)$, $A_5(2)$, $A_6(2)$, $C_4(2)$, ${}^2F_4(2)'$, $B_3(3)$, $C_3(3)$, $D_4(3)$. По [9, табл. 4] все максимальные коклики в $GK(G)$ таковы:

$$\{r_3(q), r_6(q), r_{12}(q)\}, \quad \{r_1(q), r_{12}(q)\} \text{ при } r_1(q) \neq 2, \quad \{r_2(q), r_{12}(q)\} \text{ при } r_2(q) \neq 2,$$

$$\{p, r_{12}(q)\}, \quad \{2, r_{12}(q)\}.$$

Если $G_1 \in \{A_3(3), A_5(7), {}^2A_5(5), A_5(2)\}$, то по лемме 12 из работы автора 2018 г. $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 = A_6(2)$, то по [5, лемма 6] $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие. Если $G_1 \in \{A_5(3), C_4(2), B_3(3), C_3(3), D_4(3)\}$, то по [14] $G \neq {}^3D_4(q)$; противоречие. Если $G_1 = {}^2F_4(2)'$, то по лемме 11 $G \neq {}^3D_4(q)$; противоречие.

Группы G_1, равные $A_2^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_3 = 3$ и $q_1 \pm 1 = 2^{k_1}$; ${}^2A_2(q_1)$, где $(q_1+1)_3 \neq 3$ и $q_1 - 1 \neq 2^{k_1}$; $A_4^{\pm}(q_1)$, где $(q_1 \mp 1)_5 = 5$, рассматриваются аналогично случаю q четно. Получаем противоречие. □

Лемма 15. *Если $G = F_4(q)$, то $G_1 = F_4(q_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $G = F_4(2)$, то по лемме 11 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Пусть $q > 2$. По таблице на с. 150, [4, табл. 1] имеем $G_1 \in \{B_5(3), C_5(3), {}^2G_2(q_1), F_4(q_1)\}$. Если $G_1 = {}^2G_2(q_1)$, то по [9, табл. 4] коклики максимального порядка в графе $GK(G)$ имеют вид $\{r_3(q), r_4(q), r_6(q), r_8(q), r_{12}(q)\}$, а все коклики максимального порядка в графе $GK(G_1)$ имеют вид $\{3, s_1, s_2, s_3, s_4\}$; противоречие. Пусть $G_1 \in \{B_5(3), C_5(3)\}$. Тогда $\{r_3(q), r_4(q), r_6(q), r_8(q), r_{12}(q)\} = \{7, 11, 13, 41, 61\}$, т. е. $11 \equiv 1 \pmod{k}$, где $k \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$; противоречие. □

Лемма 16. $G \notin \{{}^2B_2(q),\ {}^2G_2(q),\ {}^2F_4(q)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы следует из леммы 15, табл., [4, табл. 1, 2]. □

Лемма 17. $G \neq E_6^{\pm}(q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $G \in \{E_6(2), {}^2E_6(2)\}$, то по лемме 11 $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Если qq_1 четно, то по таблице на с. 150, [4, табл. 1, 2] $GK(G) \neq GK(G_1)$; противоречие.

Предположим, что qq_1 нечетно. Тогда по таблице на с. 150, [4, табл. 1, 2] $G_1 = E_6^{\pm}(q_1)$.

Пусть $\{G, G_1\} = \{E_6(q), E_6(q_1)\}$. Тогда по [9, табл. 4] все коклики максимального порядка в $GK(G_1)$ имеют вид

$$\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_5(q_1), r_8(q_1), r_9(q_1)\}, \quad \{r_4(q_1), r_5(q_1), r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\},$$

$$\{r_6(q_1), r_5(q_1), r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}, \quad \{3, r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q)\} \text{ при } (q-1)_3 = 3,$$

$$\{p_1, r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}, \quad \{r_1(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}, \quad \{r_2(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}, \quad \{2, r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}.$$

Отсюда $t(r_i(q_1), E_6(q_1)) = 5$ при $i \in \{3, 4, 5, 6, 8, 9, 12\}$, $t(r_2(q_1), G_1) = 3$, $t(r_1(q_1), G_1) = 3$ при $r_1(q_1) \neq 3$ или $(q_1 - 1)_3 \neq 3$, $t(3, G_1) = 4$ при $(q_1 - 1)_3 = 3$.

Сравнивая максимальные коклики, содержащие 2, в графах $GK(G)$ и $GK(G_1)$, получим $\{2, r_9(q_1), r_{12}(q_1)\} = \{2, r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}$, т. е. $\{r_9(q_1), r_{12}(q_1)\} = \{r_9(q_1), r_{12}(q_1)\}$. Отсюда

$$\{r_3(q_1), r_4(q_1), r_5(q_1), r_8(q_1), r_9(q_1)\} = \{r_3(q), r_4(q), r_5(q), r_8(q), r_9(q)\}.$$

Поэтому $R_8(q_1) \subseteq R_3(q) \cup R_4(q) \cup R_5(q) \cup R_8(q)$. Пусть $(q-1)_3 \neq 3$. Тогда $\{p_1, r_8(q_1), r_9(q_1), r_{12}(q_1)\} = \{p, r_8(q), r_9(q), r_{12}(q)\}$, поэтому $R_8(q_1) \subseteq \{p\} \cup R_8(q)$. Итак, $R_8(q_1) \subseteq R_8(q)$ и $p_1 = p$; противоречие.

Пусть $(q-1)_3 = 3$. Так как $p = r_i(q_1)$, то $4 = t(p, G) = t(p, G_1) = t(r_i(q_1), G_1)$, поэтому $p = r_i(q_1) = 3$, но $(q-1)_3 = 3$; противоречие.

Если пара $\{G, G_1\}$ равна $\{E_6(q), {}^2E_6(q_1)\}$ или $\{{}^2E_6(q), E_6^{\pm}(q_1)\}$, получаем противоречие аналогично. □

Лемма 18. *$G \neq E_7(q)$, где $q > 3$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G = E_7(q)$, где $q > 3$. Так как $t(G) = t(G_1) = 8$, то по [9, табл. 2–4] G_1 — одна из групп $A^{\pm}_{14}(q_1)$, $A^{\pm}_{15}(q_1)$, $B_9(q_1)$, $B_{10}(q_1)$, $C_9(q_1)$, $C_{10}(q_1)$, ${}^2D_{10}(q_1)$, $E_7(q_1)$.

По [9, табл. 4] максимальные коклики в $GK(G)$ имеют вид

$$\{r_4(q), r_5(q), r_7(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{12}(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\},$$

$$\{r_8(q), r_5(q), r_7(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{12}(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\},$$

$$\{r_3(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\}, \quad \{r_6(q), r_5(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\},$$

$$\{p, r_7(q), r_9(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\}, \quad \{r_1(q), r_{14}(q), r_{18}(q)\}, \quad \{r_2(q), r_7(q), r_9(q)\},$$

$$\{2, r_{14}(q), r_{18}(q)\} \ \text{при} \ q \equiv 1 \pmod 4, \quad \{2, r_7(q), r_9(q)\} \ \text{при} \ q \equiv 3 \pmod 4.$$

Отсюда $t(r_i(q), G) = 8$ при $i \in \{4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 18\}$, $t(r_i(q), G) = 7$ при $i \in \{3, 6\}$, $t(p, G) = 5$, $t(r_1(q), G) = t(r_2(q), G) = 3$, $t(2, G) = 3$. Таким образом, $\mathcal{T}(G) = \{8, 7, 5, 3\}$. Так как $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(G_1)$, по [5, леммы 8, 10, 11] $G_1 = E_7(q_1)$. Из равенства $p_1 = r_i(q)$ следует, что $5 = t(p_1, G_1) = t(p_1, G) = t(r_i(q), G) \in \{3, 7, 8\}$; противоречие. □

Лемма 19. *Если $G = E_8(q)$, то $G_1 = E_8(q_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G = E_8(q)$. Так как $t(G) = t(G_1) = 12$, то по [9, табл. 2-4] G_1 — одна из групп $A^{\pm}_{22}(q_1)$, $A^{\pm}_{23}(q_1)$, $B_{15}(q_1)$, $C_{15}(q_1)$, $D_{15}(q_1)$, $D_{16}(q_1)$, ${}^2D_{15}(q_1)$, $E_8(q_1)$.

По [9, табл. 4] максимальные коклики графа $GK(G)$ имеют вид

$$\{r_5(q), r_7(q), r_8(q), r_9(q), r_{10}(q), r_{12}(q), r_{14}(q), r_{15}(q), r_{18}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\},$$

$$\{r_3(q), r_7(q), r_{10}(q), r_{14}(q), r_{18}(q), r_{20}(q), r_{15}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\},$$

$$\{r_4(q), r_7(q), r_{14}(q), r_9(q), r_{18}(q), r_{20}(q), r_{15}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\} \ \text{при} \ r_4(q) \neq 5,$$

$$\{r_4(q), r_7(q), r_{14}(q), r_9(q), r_{18}(q), r_{15}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\} \ \text{при} \ r_4(q) = 5,$$

$$\{r_6(q), r_5(q), r_7(q), r_9(q), r_{14}(q), r_{20}(q), r_{15}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\},$$

$$\{p, r_{15}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\}, \quad \{r_1(q), r_{15}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\},$$

$$\{2, r_{15}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\}, \quad \{r_2(q), r_{15}(q), r_{20}(q), r_{24}(q), r_{30}(q)\}$$

Отсюда $t(r_i(q), G) = 12$ при $i \in \{5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 18, 20, 24, 30\}$, $t(r_i(q), G) = 9$ при $i \in \{3, 4, 6\}$ и $r_4(q) \neq 5$, $t(r_i(q), G) = 8$ при $r_4(q) = 5$, $t(p, G) = 5$, $t(r_1(q), G) = t(r_2(q), G) = 5$, $t(2, G) = 5$. Таким образом, $\mathcal{T}(G)$ равно $\{12, 9, 5\}$ при $q \equiv 0, 1, 4 \pmod 5$ и $\{12, 9, 8, 5\}$ при $q \equiv 2, 3 \pmod 5$. Так как $\mathcal{T}(G) = \mathcal{T}(G_1)$, по [5, леммы 8–11] $G_1 = E_8(q_1)$. □

Из лемм 14–19 следует пп. (3), (4) и (6) теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп / ред. В.Д. Мазуров. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2014. Изд. 18-е, доп. 253 с.
2. **Hagie M.** The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. Vol. 31, no. 9. P. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800 .
3. **Звездина М.А.** О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 65–76.
4. **Зиновьева М.Р.** Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 168–183.

5. **Зиновьева М.Р.** О конечных простых классических группах над полями разных характеристик, графы простых чисел которых совпадают. Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 3. С. 101–116. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-101-116 .
6. **Кондратьев А.С.** О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
7. **Williams J. S.** Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. Vol. 69, no. 2. P. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .
8. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Критерий смежности в графе простых чисел // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
9. **Васильев А.В., Вдовин Е.П.** Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
10. **Zsigmondy K.** Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. vol. 3, no. 1, pp. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444 .
11. **Gerono G. C.** Note sur la r*é*solution en nombres entiers et positifs de l'*é*quation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. (2). 1870. Vol. 9. P. 469-471.
12. **Bugeaud Y., Mih*ă*ilescu P.** On the Nagell–Ljunggren equation $\dfrac{x^n-1}{x-1} = y^q$ // Math. Scand. 2007. Vol. 101, no. 2. P. 177–183. doi: 10.7146/math.scand.a-15038 .
13. **Zavarnitsine A.V.** Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders // J. Group Theory. 2004. Vol. 7, no. 1. P. 81–97. doi: 10.1515/jgth.2003.044 .
14. **Zavarnitsine A.V.** Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sib. Elec. Math. Rep. 2009. Vol. 6. P. 1–12.

Поступила 3.04.2020
После доработки 11.05.2020
Принята к публикации 25.05.2020

Зиновьева Марианна Рифхатовна
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru

REFERENCES

1. *Unsolved problems in group theory. The Kourovka notebook*, ed. V.D. Mazurov, 18th ed., Novosibirsk: Inst. Mat. SO RAN Publ., 2014, 253 p.
2. Hagie M. The prime graph of a sporadic simple group. *Comm. Algebra*, 2003, vol. 31, no. 9, pp. 4405–4424. doi: 10.1081/AGB-120022800 .
3. Zvezdina M. A. On nonabelian simple groups having the same prime graph as an alternating group. *Sib. Math. J.*, 2013, vol. 54, no. 1, pp. 47–55. doi: 10.1134/S0037446613010072 .
4. Zinov'eva M.R. Finite simple groups of Lie type over a field of the same characteristic with the same prime graph. *Tr. Inst. Mat. Mekh.*, 2014, vol. 20, no. 2, pp. 168–183 (in Russian).
5. Zinov'eva M.R. On finite simple classical groups over fields of different characteristics with coinciding prime graphs. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 297, suppl. 1, pp. 223–239. doi: 10.1134/S0081543817050248 .
6. Kondrat'ev A.S. Prime graph components of finite simple groups. *Math. USSR-Sb.*, 1990, vol. 67, no. 1, pp. 235–247. doi: 10.1070/SM1990v067n01ABEH001363 .
7. Williams J.S. Prime graph components of finite groups. *J. Algebra*, 1981, vol. 69, no. 2, pp. 487–513. doi: 10.1016/0021-8693(81)90218-0 .
8. Vasiliev A.V., Vdovin E.P. An adjacency criterion for the prime graph of a finite simple group. *Algebra and Logic*, 2005, vol. 44, no. 6, pp. 381–406. doi: 10.1007/s10469-005-0037-5 .
9. Vasiliev A.V., Vdovin E.P. Cocliques of maximal size in the prime graph of a finite simple group. *Algebra and Logic*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 291–322. doi: 10.1007/s10469-011-9143-8 .

10. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste. *Monatsh. Math. Phys.*, 1892, vol. 3, no. 1, pp. 265–284. doi: 10.1007/BF01692444 .
11. Gerono G.C. Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$. *Nouv. Ann. Math. (2)*, 1870, vol. 9, pp. 469–471.
12. Bugeaud Y., Mihăilescu P. On the Nagell-Ljunggren equation $\dfrac{x^n-1}{x-1} = y^q$. *Math. Scand.*, 2007, vol. 101, no. 2, pp. 177–183. doi: 10.7146/math.scand.a-15038 .
13. Zavarnitsine A.V. Recognition of the simple groups $L_3(q)$ by element orders. *J. Group Theory*, 2004, vol. 7, no. 1, pp. 81–97. doi: 10.1515/jgth.2003.044 .
14. Zavarnitsine A.V. Finite simple groups with narrow prime spectrum. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

Received April 3, 2020
Revised May 11, 2020
Accepted May 25, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00456) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Marianna Rifkhatovna Zinov'eva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Ekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: zinovieva-mr@yandex.ru .

Cite this article as: M. R. Zinov'eva. On finite simple groups of exceptional Lie type over fields of different characteristics with coinciding prime graphs, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 147–160 .