ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 2 2020

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ПЕРЕВОДА ОБЪЕКТА НА МНОЖЕСТВО[1]

А. Р. Данилин, О. О. Коврижных

Настоящая работа посвящена задаче оптимального быстродействия для сингулярно возмущенной линейной автономной системы с гладкими геометрическими ограничениями на управление и неограниченным целевым множеством:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + B_1u, & x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^m,\ u \in \mathbb{R}^r, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + B_2u, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^m, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min. \end{cases}$$

Доказана единственность представления оптимального управления с нормированным определяющим вектором в предельной задаче. Доказана разрешимость исходной задачи, получены предельные соотношения для времени быстродействия и вектора, определяющего оптимальное управление. Доказан асимптотический аналог теоремы о функции, заданной неявно. С помощью этой теоремы получена полная асимптотика решения задачи по степеням малого параметра ε.

Ключевые слова: оптимальное управление, задача быстродействия, асимптотическое разложение, сингулярно возмущенная задача, малый параметр.

A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to a singularly perturbed time-optimal control problem of transferring an object to a set.

The present work is devoted to a time-optimal control problem for a singularly perturbed linear autonomous system with smooth geometric constraints on the control and an unbounded target set:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + B_1u, & x \in \mathbb{R}^n,\, y \in \mathbb{R}^m,\, u \in \mathbb{R}^r, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + B_2u, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^m, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min. \end{cases}$$

The uniqueness of the representation of the optimal control with a normalized defining vector in the limit problem is proved. The solvability of the problem is established. The limit relations for the optimal time and the vector determining the optimal control are obtained. An asymptotic analog of the implicit function theorem is proved and used to derive a complete asymptotics of the solution to the problem in powers of the small parameter ε.

Keywords: optimal control, time-optimal control problem, asymptotic expansion, singularly perturbed problem, small parameter.

MSC: 93C70, 49N05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-132-146

[1]Исследование О. О. Коврижных выполнено при поддержке Программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов РФ (Соглашение с Минобрнауки РФ 02.A03.21.0006 от 27 августа 2013 г.).

1. Постановка задачи

В работе рассматривается одна из задач о быстродействии оптимального управления (см. [1]) для линейной автономной системы с быстрыми и медленными переменными (см. обзоры [2; 3]) в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями в виде шара:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + B_1u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + B_2u, & u \in U = \{u\colon \|u\| \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^r, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}^m, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь и далее $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном пространстве.

Задача (1.1) есть задача наискорейшего перевода точки (x_0, y_0) на целевое множество

$$G := \{\, (0, y)\colon y \in \mathbb{R}^m \,\}.$$

Ранее в работе [4] были получены основные соотношения для системы общего вида с многоугольником в качестве ограничивающего множества, в работах [5; 6] рассмотрено поведение областей достижимости при стремлении малого параметра к нулю. В статьях [7; 8] исследованы линейно-квадратичные задачи оптимального управления для сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и неограниченным многомерным управлением. Работы [9; 10] (задача о быстродействии), [11] (терминальный критерий качества), [12] (интегральный выпуклый критерий качества) посвящены получению полной асимптотики решения в задачах управления для линейных систем с быстрыми и медленными переменными и ограничивающим множеством в виде шара в евклидовом пространстве.

Отличительная особенность рассматриваемой задачи заключается в том, что целевое множество не ограничено. В настоящей работе используются методы статьи [9] и общие соотношения, полученные в [13–15].

Условие I. $\mathrm{Re}\,\sigma(A_{22}) \leqslant -\alpha < 0$, где $\sigma(A_{22})$ — спектр матрицы A_{22}.

Условие II. Пара $(A_{22};\, B_2)$ вполне управляема, что эквивалентно вследствие критерия Калмана (см. [16, с. 91, теорема 5]) условию

$$\operatorname{rank}\,[B_2, A_{22}B_2, \ldots, A_{22}^{m-1}B_2] = m.$$

Введем обозначения

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad z_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1}A_{21} & \varepsilon^{-1}A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} B_1 \\ \varepsilon^{-1}B_2 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

В силу этих обозначений задача (1.1) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{z} = \mathcal{A}_\varepsilon z + \mathcal{B}_\varepsilon u, & z \in \mathbb{R}^{n+m}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \\ z(0) = z_0 \notin G, & \|u\| \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ z(T_\varepsilon) \in G, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min. \end{cases} \tag{1.3}$$

Предельная задача (при $\varepsilon = 0$):

$$\dot{x} = A_0x + B_0u, \qquad x(0) = x_0 \neq 0, \tag{1.4}$$

$$x(T_0) = 0, \qquad T_0 \longrightarrow \min, \tag{1.5}$$

где
$$A_0 = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}, \quad B_0 = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2, \quad u(t) \in U. \tag{1.6}$$

Условие III. Пусть пара $(A_0;\, B_0)$ такова, что если $B_0^*\, e^{A_0^* t} r_1 \parallel B_0^*\, e^{A_0^* t} r_2$ на некотором промежутке, то и $r_1 \parallel r_2$.

Отметим, что из условия III следует, что пара $(A_0;\, B_0)$ вполне управляема. Кроме этого, если оператор B_0^* инъективен, то условие III заведомо выполнено.

Условие IV. Начальный вектор $x_0 \neq 0$ выбран так, что задача (1.4), (1.5) разрешима.

Отметим, что при выполнении условий I–III найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ пара $(A_\varepsilon, B_\varepsilon)$ вполне управляема (см. [4]).

Утверждение 1. *Пусть выполнены условия* I–III. *Если существует $t_1 > 0$ такое, что $z(t_1) \in G$, то задача* (1.3) *разрешима и $T_\varepsilon \leqslant t_1$, где T_ε — время быстродействия.*

Доказательство. В силу формулы Коши выполняется
$$z(t) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} z_0 + \int\limits_0^t e^{\mathcal{A}_\varepsilon (t-\tau)} \mathcal{B}_\varepsilon u(\tau)\, d\tau. \tag{1.7}$$

Поскольку
$$\left\| e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \right\| \leqslant e^{\|\mathcal{A}_\varepsilon\| t},$$
то существует такое $K_{1,\varepsilon} > 0$, что при всех $t \in [0; t_1]$ справедливо неравенство
$$\left\| e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \right\| \leqslant K_{1,\varepsilon}.$$

Тогда из (1.7) получим, что
$$\|z(t)\| \leqslant K_{1,\varepsilon}\|z_0\| + K_{1,\varepsilon}\|\mathcal{B}_\varepsilon\| t_1 \;=:\; K_{2,\varepsilon}. \tag{1.8}$$

Рассмотрим целевое множество $G_\varepsilon := \{\, (0; y)\colon \|y\| \leqslant K_{2,\varepsilon} \,\} \subset G$. Это множество выпукло и компактно. В силу теоремы 17 из [16, гл. 3, п. 2.5] задача быстродействия для системы из (1.3) с таким целевым множеством разрешима и $T_\varepsilon \leqslant t_1$, где T_ε — время быстродействия.

Покажем, что решение этой задачи есть решение и задачи (1.1). Если $0 < t < T_\varepsilon$, то множество достижимости системы из (1.1) не пересекается с G_ε, а в силу (1.8) это множество не пересекается и с G. □

Утверждение 2. *Пусть выполнены условия* I–IV. *Тогда задача* (1.1) *разрешима при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и*
$$0 \leqslant \liminf T_\varepsilon \leqslant \limsup T_\varepsilon \leqslant T_0$$
при $\varepsilon \to +0$, где T_0 — время быстродействия в задаче (1.4), (1.5).

Доказательство. При выполнении условий доказываемой теоремы в силу теоремы 2 из [13] разрешима задача быстродействия для системы из (1.1) с целевым множеством $G_0 := \{(0;0)\}$ и $\widetilde{T}_\varepsilon \to T_0$ при $\varepsilon \to +0$, где $\widetilde{T}_\varepsilon$ — время быстродействия для задачи с целевым множеством G_0. Таким образом, в силу утверждения 1 разрешима и исходная задача и $0 < T_\varepsilon \leqslant \widetilde{T}_\varepsilon$. Поэтому $0 \leqslant \liminf T_\varepsilon \leqslant \limsup T_\varepsilon \leqslant T_0$ при $\varepsilon \to +0$. □

Рассмотрим единственность оптимального управления (в классе кусочно-непрерывных управлений) в задаче (1.3) с общих позиций
$$\begin{cases} \dot z = \mathcal{A}z + \mathcal{B}u, & z \in \mathbb{R}^{\widetilde{n}}, \quad u \in \mathbb{R}^r, \\ z(0) = z_0 \notin \widetilde{G}, & \|u\| \leqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \\ z(T) \in \widetilde{G}, \qquad T \longrightarrow \min. \end{cases} \tag{1.9}$$

Теорема 1. *Пусть пара* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *вполне управляема, а целевое множество* $\widetilde{G}$ *выпукло. Тогда, если задача* (1.9) *разрешима, то оптимальное управление единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. **1**. В силу вполне управляемости пары $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ функция $\mathcal{B}^*e^{-\mathcal{A}^*t}l$ при $l\neq 0$ может иметь лишь конечное число нулей на любом конечном отрезке. В противном случае в силу аналитичности этой функции выполняется $\mathcal{B}^*e^{-\mathcal{A}^*t}l\equiv 0$, откуда в силу вполне управляемости пары $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ следует $l=0$, что противоречит предположению $l\neq 0$.

2. Пусть $\widetilde{G}=\{z_1\}$, а $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — два оптимальных управления. Тогда из принципа максимума следует, что при $t\in[0;T]$ справедливы равенства

$$\|\mathcal{B}^*e^{-\mathcal{A}^*t}l_1\|=\langle u_1(t),\mathcal{B}^*e^{-\mathcal{A}^*t}l_1\rangle=\langle u_2(t),\mathcal{B}^*e^{-\mathcal{A}^*t}l_1\rangle,$$

где l_1 соответствует управлению $u_1(\cdot)$ (см., например, [1, гл. 3, теорема 11, следствие равенства (24)]). Поскольку $\|u_i(t)\|\leqslant 1$, $i=1,2$, то при $\mathcal{B}^*e^{-\mathcal{A}^*t}l_1\neq 0$ выполняется

$$u_1(t)=\frac{\mathcal{B}^*e^{-\mathcal{A}^*t}l_1}{\|\mathcal{B}^*e^{-\mathcal{A}^*t}l_1\|}=u_2(t).$$

3. Пусть $\Xi(T,z_0)$ — множество достижимости управляемой системы из (1.9) к моменту времени T. В силу теоремы 1 из [16, п. 2.1] это множество выпукло и компактно. Покажем, что множество $\Xi(T,z_0)$ строго выпукло (см. [16, гл. 2, приложение]), для этого докажем, что его граница $\partial\Xi(T,z_0)$ не содержит отрезок. Предположим противное, т. е. что некоторый отрезок $[z_1;z_2]\subset\partial\Xi(T,z_0)$. Пусть $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — оптимальные управления, переводящие z_0 в z_1 и z_2 соответственно. Поскольку точка $\widetilde{z}:=(z_1+z_2)/2\in\partial\Xi(T,z_0)$, то время быстродействия из z_0 в $\widetilde{z}$ также равно T. Пусть $\widetilde{u}(\cdot)$ — оптимальное управление, переводящее точку z_0 в точку $\widetilde{z}$ за время T. Поскольку управление $\overline{u}(\cdot):=(u_1(\cdot)+u_2(\cdot))/2$ тоже переводит точку z_0 в $\widetilde{z}$ за время T и $\|\overline{u}\|\leqslant 1$, то в силу п. 2 доказываемой теоремы $\widetilde{u}=\overline{u}$ за исключением конечного числа точек отрезка $[0;T]$. При этом, если $\|\widetilde{u}(t)\|=1$, а $u_1(t)\neq u_2(t)$, то

$$\|\widetilde{u}(t)\|=1>\|(u_1(t)+u_2(t))/2\|=\|\overline{u}(t)\|,$$

что противоречит равенству $\widetilde{u}=\overline{u}$.

4. Пусть теперь $\widetilde{G}$ — произвольное выпуклое множество, а T — время быстродействия в задаче (1.9). Пусть $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ — оптимальные управления в задаче (1.9), а $z_1\in\widetilde{G}$ и $z_2\in\widetilde{G}$ — точки, в которые эти управления переводят точку z_0 (соответственно). Если $z_1=z_2$, то в силу п. 1, 2 доказываемой теоремы $u_1=u_2$ за исключением, быть может, конечного числа точек отрезка $[0;T]$. Пусть $z_1\neq z_2$. Тогда для любого $\mu\in(0;1)$ управление $u_\mu:=(1-\mu)u_1+\mu u_2$ переводит z_0 в точку $z_\mu:=(1-\mu)u_1+\mu z_2\in\widetilde{G}$ за время T и $\|u_\mu(t)\|\leqslant 1$ при всех $t\in[0;T]$. Тем самым, $[z_1;z_2]\subset\partial\Xi(T,z_0)$, что противоречит п. 3. $\square$

З а м е ч а н и е. Из [16, п. 2.2, теорема 3] и теоремы 1 следует, в частности, что если пара $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ вполне управляема, то задача (1.9) нормальна.

Покажем, что условие III обеспечивает единственность представления оптимального управления в предельной задаче (1.4), (1.5) через начальный вектор сопряженной системы в виде

$$u_0(T_0-t)=\frac{B_0^*e^{A_0^*t}l_0}{\|B_0^*e^{A_0^*t}l_0\|}\tag{1.10}$$

при нормировке вектора l_0.

Утверждение 3. *Пусть выполнены условия* I–III. *Тогда система*

$$0=e^{A_0T_0}x_0+\int\limits_0^{T_0}\frac{C_0(t)C_0^*(t)l}{\|C_0^*(t)l\|}\,dt,\quad \|l\|=1,\tag{1.11}$$

где T_0 *— оптимальное время в задаче* (1.5), (1.4), *имеет единственное решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть l_1 и l_2 — два определяющих вектора оптимального управления. Тогда в силу теоремы 1

$$\frac{\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1}{\|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1\|} = \frac{\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_2}{\|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_2\|} \tag{1.12}$$

за исключением, может быть, конечного числа точек на отрезке $[0; T_0]$. Следовательно, существует интервал, на котором

$$\|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1\| \times \|\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1\| = \langle \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1, \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_2 \rangle.$$

Тем самым, $\mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_1 || \mathcal{B}^* e^{-\mathcal{A}^* t} l_2$. В силу условия III отсюда следует, что существует $\mu \in \mathbb{R}$ такое, что $l_2 = \mu l_1$, а из соотношения (1.12) следует неравенство $\mu > 0$. Поэтому $1 = \|l_2\| = \mu \|l_1\| = \mu$, значит, $l_1 = l_2$. □

2. Основное уравнение и предельное соотношение

Пусть $u_\varepsilon(t)$ — оптимальное управление в задаче (1.1). Тогда в силу принципа максимума Понтрягина для такой задачи (см., например, теорему 18 из [16, гл. 3, п. 2.5]) существует такой вектор $\lambda_\varepsilon \perp G$, т. е. $\lambda_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, 0)^*$, что для решения сопряженной задачи

$$\dot{\psi}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon^* \psi, \quad \psi_\varepsilon(T_\varepsilon) = \lambda_\varepsilon$$

выполняется соотношение

$$\langle \psi_\varepsilon(t), \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon(t) \rangle = \max_{\|u\| \leqslant 1} \langle \psi_\varepsilon(t), B_\varepsilon u \rangle = \|B_\varepsilon^* \psi_\varepsilon(t)\|.$$

Здесь и далее символ * обозначает операцию транспонирования.

Поскольку $\psi_\varepsilon(t) = e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} \lambda_\varepsilon$, то при t таких, что $\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} \lambda_\varepsilon \neq 0$, оптимальное управление $u_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$u_\varepsilon(t) = \frac{\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} \lambda_\varepsilon}{\|\mathcal{B}_\varepsilon^* e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} \lambda_\varepsilon\|}. \tag{2.1}$$

С учетом условия $x(T_\varepsilon) = 0$ в силу формулы Коши и определения $u_\varepsilon(\cdot)$ (2.1) получим

$$0 = \left[e^{\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon} z_0 + \int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{\mathcal{A}_\varepsilon (T_\varepsilon - t)} \mathcal{B}_\varepsilon \, \mathcal{B}_\varepsilon^* \, e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \mathcal{B}_\varepsilon^* \, e^{\mathcal{A}_\varepsilon^*(T_\varepsilon - t)} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \, dt \right]_1. \tag{2.2}$$

Здесь запись $\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_1$ означает вектор x. После замены переменной интегрирования по формуле $\tau = T_\varepsilon - t$ приходим к соотношению, эквивалентному (2.2),

$$0 = \left[e^{\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon} z_0 + \int\limits_0^{T_\varepsilon} \frac{e^{\mathcal{A}_\varepsilon \tau} \mathcal{B}_\varepsilon \, \mathcal{B}_\varepsilon^* \, e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \mathcal{B}_\varepsilon^* \, e^{\mathcal{A}_\varepsilon^* \tau} \begin{pmatrix} l_\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} \, dt \right]_1. \tag{2.3}$$

Отметим, что подынтегральная функция в основном уравнении (2.3) положительно однородна относительно вектора $\lambda_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, 0)^*$, поэтому уравнение (2.3) надо дополнить каким-либо условием нормировки этого вектора, например, условием

$$\|\lambda_\varepsilon\| = \|l_\varepsilon\| = 1. \tag{2.4}$$

Из результатов А. Б. Васильевой (см., например, [17]) следует, что в рассматриваемом случае на любом отрезке $[0,T]$ при $\varepsilon \to +0$ имеет место равномерное по t асимптотическое разложение

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} =: \mathcal{W}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11}(t,\varepsilon) & \mathcal{W}_{12}(t,\varepsilon) \\ \mathcal{W}_{21}(t,\varepsilon) & \mathcal{W}_{22}(t,\varepsilon) \end{pmatrix} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \big(\mathcal{W}_k(t) + \widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)\big), \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon}, \tag{2.5}$$

где

$$\mathcal{W}_k(t) := \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{11,k}(t) & \mathcal{W}_{12,k}(t) \\ \mathcal{W}_{21,k}(t) & \mathcal{W}_{22,k}(t) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau) := \begin{pmatrix} \widetilde{\mathcal{W}}_{11,k}(\tau) & \widetilde{\mathcal{W}}_{12,k}(\tau) \\ \widetilde{\mathcal{W}}_{21,k}(\tau) & \widetilde{\mathcal{W}}_{22,k}(\tau) \end{pmatrix},$$

все $\mathcal{W}_k(t)$, $\widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$ — бесконечно дифференцируемые по t матричнозначные функции, причем все $\widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$ экспоненциально убывают при $\tau \to +\infty$, в частности, при $t \geqslant \varepsilon^p$, $p \in (0,1)$, $\varepsilon \to +0$ (см., например, утверждение 1.6 из [14]). В [14] приведены формулы (см. (2.4)–(2.8)) для $\mathcal{W}_0(t)$, $\widetilde{\mathcal{W}}_0(\tau)$ и рекуррентные формулы, позволяющие найти остальные $\mathcal{W}_k(t)$, $\widetilde{\mathcal{W}}_k(\tau)$. В частности,

$$\begin{gathered} \mathcal{W}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{A_0 t} & 0 \\ -A_{22}^{-1} A_{21} e^{A_0 t} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{W}}_0(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{A_{22}\tau} A_{22}^{-1} A_{21} & e^{A_{22}\tau} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{W}_{12,1}(t) = -e^{A_0 t} A_{12} A_{22}^{-1}, \qquad \widetilde{\mathcal{W}}_{12,1}(\tau) = A_{12} A_{22}^{-1} e^{A_{22}\tau}. \end{gathered} \tag{2.6}$$

.

Как и в [14], введем обозначение

$$C_\varepsilon(t) := \big[e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon\big]_1 = \mathcal{W}_{11}(t,\varepsilon) B_1 + \varepsilon^{-1} \mathcal{W}_{12}(t,\varepsilon) B_2. \tag{2.7}$$

Из (2.6) получим, что при $\varepsilon \to +0$ равномерно по t на любом отрезке $[0;T]$ имеет место следующая формула:

$$C_\varepsilon(t) = C_0(t) + A_{12} A_{22}^{-1} e^{A_{22}\tau} B_2 + O(\varepsilon), \ \text{ где } \ C_0(t) := e^{A_0 t} B_0. \tag{2.8}$$

В обозначениях (2.5), (2.7) основное уравнение (2.3) принимает вид

$$0 = \mathcal{W}_{11}(T_\varepsilon,\varepsilon) x_0 + \mathcal{W}_{12}(T_\varepsilon,\varepsilon) y_0 + \int_0^{T_\varepsilon} \frac{C_\varepsilon(t) C_\varepsilon^*(t)\, l_\varepsilon}{\|C_\varepsilon^*(t)\, l_\varepsilon\|}\, dt. \tag{2.9}$$

Из (2.1) с учетом того, что $\lambda_\varepsilon = (l_\varepsilon^*, 0)^*$, получим

$$u_\varepsilon(T_\varepsilon - t) = \frac{C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon}{\|C_\varepsilon^*(t) l_\varepsilon\|}. \tag{2.10}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* I–IV. *Тогда* $T_\varepsilon \to T_0$ *при* $\varepsilon \to +0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\widetilde{T} := \liminf T_\varepsilon$ при $\varepsilon \to +0$. Тогда найдется последовательность $\{\varepsilon_k\}$ такая, что $\varepsilon_k \to +0$ и $T_k := T_{\varepsilon_k} \to \widetilde{T}$. Отметим, что $\widetilde{T} \leqslant T_0$ в силу утверждения 2. Из этого же утверждения также следует, что T_ε ограничено сверху, обозначим одну из верхних границ через $\widehat{T}$. Из (2.6), (2.8) и (2.9) следует, что существуют константы $\varepsilon_0 > 0$ и $K > 0$ такие, что $\|C_\varepsilon(t)\| \leqslant K$ при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ и $t \in [0;\widehat{T}]$. Кроме этого,

$$0 = e^{A_0 T_k} x_0 + O(\varepsilon_k) + \int_0^{T_k} \frac{C_{\varepsilon_k}(t) C_{\varepsilon_k}^*(t) l_{\varepsilon_k}}{\|C_{\varepsilon_k}^*(t) l_{\varepsilon_k}\|}\, dt. \tag{2.11}$$

Таким образом, существует $K > 0$ такое, что для всех $T \in [0;\widehat{T}]$

$$0 = \left\| \int_0^{T} \frac{C_{\varepsilon_k}(t) C_{\varepsilon_k}^*(t) l_{\varepsilon_k}}{\|C_{\varepsilon_k}^*(t) l_{\varepsilon_k}\|} dt \right\| \leqslant K\, T. \tag{2.12}$$

Если $\widetilde{T}=0$, то в силу (2.11) и (2.12) после перехода к пределу при $k\to+\infty$ получим, что $0=e^{A_0\widetilde{T}}x_0$. В силу взаимной однозначности оператора $e^{A_0\widetilde{T}}$ это противоречит предположению IV.

Итак, $\widetilde{T}>0$. В силу определения T_k при всех достаточно больших k справедливо неравенство $T_k\geqslant\widetilde{T}/2$. Разобьем отрезок интегрирования в (2.9) на отрезки $[0;\sqrt{\varepsilon_k}]$ и $[\sqrt{\varepsilon_k};T_k]$. В силу (2.12) интеграл по отрезку $[0;\sqrt{\varepsilon_k}]$ есть величина $O(\sqrt{\varepsilon_k})$ при $k\to+\infty$, а на отрезке $[\sqrt{\varepsilon_k};T_0]\supset[\sqrt{\varepsilon_k};T_k]$ в силу (2.8) справедлива асимптотическая формула $C_\varepsilon(t)=C_0(t)+O(\varepsilon)$. С учетом (2.6) равенство (2.11) принимает вид

$$0=e^{A_0T_k}x_0+O(\sqrt{\varepsilon_k})+\int\limits_{\sqrt{\varepsilon_k}}^{T_k}\frac{(C_0(t)+O(\varepsilon_k))(C_0^*(t)+O(\varepsilon_k))l_{\varepsilon_k}}{\|(C_0^*(t)+O(\varepsilon_k))l_{\varepsilon_k}\|}\,dt. \tag{2.13}$$

Пусть l_0 — какая-нибудь предельная точка последовательности $\{l_{\varepsilon_k}\}$. Поскольку $\|l_{\varepsilon_k}\|=1$, то и $\|l_0\|=1$. В силу вполне управляемости $C_0^*(t)l_0$ может обращаться в 0 не более, чем в конечном числе точек на отрезке $[0;\widehat{T}]$ (в силу п. 1 доказательства теоремы 1). Переходя к пределу в (2.13), получим равенство

$$0=e^{A_0\widetilde{T}}x_0+\int\limits_0^{\widetilde{T}}\frac{C_0(t)C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|}\,dt.$$

Поскольку $\|(C_0^*(t)l_0)/\|C_0^*(t)l_0\|\|=1$ за исключением конечного числа значений аргументов, то $u_0(\widetilde{T}-t):=(C_0^*(t)l_0)/\|C_0^*(t)l_0\|$ есть допустимое управление, переводящее систему (1.4) из точки x_0 в точку 0 за время $\widetilde{T}$. Поэтому $T_0\leqslant\widetilde{T}$. Это в силу утверждения 2 дает равенство $T_0=\widetilde{T}$. $\square$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* I–IV, *а* l_ε $(\varepsilon\in(0;\varepsilon_0))$ *— векторы, определяющие оптимальное управление* u_ε *в задаче* (2.9) *по формуле* (2.10). *Тогда* $l_\varepsilon\to l_0$ *при* $\varepsilon\to+0$, *где* l_0 *— единственное решение уравнения* (1.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Почти дословно повторяя рассуждения при доказательстве теоремы 2, получим, что все предельные точки для $\{l_\varepsilon\}$ удовлетворяют уравнению (1.11) и тем самым в силу утверждения 3 совпадают с l_0. $\square$

У с л о в и е V. Начальный вектор x_0 выбран так, что соответствующее ему оптимальное управление в предельной задаче (1.4), (1.5) непрерывно, т. е. знаменатель $\|C_0^*(t)l_0\|$ в (1.10) не обращается в нуль на отрезке $[0,T_0]$.

3. Асимптотика вектора l_ε и времени быстродействия T_ε

Пусть при каждом $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0)$ вектор l_ε определяет оптимальное управление в задаче (1.1), а l_0 — вектор, определяющий оптимальное управление в задаче (1.4), (1.5). Положим

$$\Delta l_\varepsilon:=l_\varepsilon-l_0,\qquad \Delta T_\varepsilon:=T_\varepsilon-T_0. \tag{3.1}$$

В силу теоремы 3 выполняется $\Delta l_\varepsilon=o(1)$ и $\Delta T_\varepsilon=o(1)$ при $\varepsilon\to+0$, и Δl_ε, ΔT_ε удовлетворяют системе уравнений (см. (2.4), (2.9) и (1.11))

$$\begin{cases} 0=\mathcal{W}_{11}(T_0+\Delta T,\varepsilon)x_0+\mathcal{W}_{12}(T_0+\Delta T,\varepsilon)y_0-e^{A_0T_0}x_0\\[2mm] \quad+\displaystyle\int\limits_0^{T_0+\Delta T}\frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)(l_0+\Delta l)}{\|C_\varepsilon^*(t)(l_0+\Delta l)\|}\,dt-\int\limits_0^{T_0}\frac{C_0(t)C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|}\,dt,\\[2mm] \|l_0+\Delta l\|^2=1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Система (3.2) имеет вид $0 = H(w,\varepsilon)$, где $w = (\Delta l^*, \Delta T)^*$ и $H(w,\varepsilon) \to 0$ при $w \to 0$, $\varepsilon \to +0$.

Для получения асимптотики решения такого уравнения мы воспользуемся следующим асимптотическим аналогом теоремы о функции, заданной неявно.

Теорема 4. *Пусть функция $H\colon \mathbb{R}^{p+1} \to \mathbb{R}^p$ разлагается в степенной асимптотический ряд при $\varepsilon \to +0$*

$$H(w,\varepsilon) \overset{as}{=} \mathcal{H}w + \varepsilon f_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k H_k(w), \tag{3.3}$$

где $\mathcal{H}\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ — линейный оператор, каждая компонента $H_k(w)$ является однородным многочленом степени k относительно компонент вектора w и H непрерывна по w при каждом малом $\varepsilon > 0$.

Если оператор $\mathcal{H}$ обратим, то существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1)$ уравнение $0 = H(w,\varepsilon)$ имеет решение $w_\varepsilon = o(1)$ при $\varepsilon \to +0$, и оно разлагается в степенной асимптотический ряд

$$w_\varepsilon \overset{as}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k w_k. \tag{3.4}$$

При этом все такие решения уравнения $0 = H(w,\varepsilon)$ асимптотически равны, т. е. если $H(w_\varepsilon,\varepsilon) = 0 = H(\widetilde{w}_\varepsilon,\varepsilon)$, $w_\varepsilon = o(1)$ и $\widetilde{w}_\varepsilon = o(1)$ при $\varepsilon \to +0$, то $(w_\varepsilon - \widetilde{w}_\varepsilon) \overset{as}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \cdot 0$ при $\varepsilon \to +0$.

Доказательство. **1**. В силу определения асимптотического разложения из (3.3) получим, что для $\widetilde{H}_2(w,\varepsilon) := H(w,\varepsilon) - \mathcal{H}w - \varepsilon f_1$ при $\varepsilon \to +0$ справедлива асимптотическая оценка $\|\widetilde{H}_2(w,\varepsilon)\| = O\big(\|w_\varepsilon\|^2 + \varepsilon^2\big)$, а уравнение $0 = H(w,\varepsilon)$ запишется в виде $\mathcal{H}w = -\varepsilon f_1 + \widetilde{H}_2(w,\varepsilon)$, или

$$w = -\varepsilon \mathcal{H}^{-1} f_1 + \mathcal{H}^{-1}\widetilde{H}_2(w,\varepsilon). \tag{3.5}$$

При этом для некоторой константы $K > 0$ при всех малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{H}^{-1}\widetilde{H}_2(w,\varepsilon)\| \leqslant K\big(\|w\|^2 + \varepsilon^2\big). \tag{3.6}$$

Пусть $\widetilde{w} := w + \varepsilon\mathcal{H}^{-1} f_1$, а $\mathcal{H}^{-1}\widetilde{H}_2(\widetilde{w} - \varepsilon\mathcal{H}^{-1}f_1, \varepsilon) := \widetilde{H}(\widetilde{w},\varepsilon)$. Тогда в силу (3.6)

$$\|\widetilde{H}(\widetilde{w},\varepsilon)\| \leqslant K\big(\|\widetilde{w}\|^2 + 2\varepsilon\|\widetilde{w}\|\,\|\mathcal{H}^{-1}f_1\| + \varepsilon^2\|\mathcal{H}^{-1}f_1\|^2 + \varepsilon^2\big) \leqslant K_1\big(\|\widetilde{w}\|^2 + \varepsilon\|\widetilde{w}\| + \varepsilon^2\big), \tag{3.7}$$

а уравнение (3.5) примет вид

$$\widetilde{w} = \widetilde{H}(\widetilde{w},\varepsilon). \tag{3.8}$$

Покажем, что уравнение (3.8) при всех малых $\varepsilon > 0$ имеет решение в замкнутом шаре $B[0,\varepsilon]$.

Пусть $\|\widetilde{w}\| \leqslant \varepsilon$. Тогда в силу (3.7) $\|\widetilde{H}(\widetilde{w},\varepsilon)\| \leqslant 4\varepsilon^2 K_1$. Тем самым, найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $4\varepsilon^2 K_1 \leqslant \varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1)$. Поэтому по теореме Шаудера — Тихонова (см., например, [18, гл. 16, § 3, теорема 1]) в $B[0,\varepsilon]$ есть неподвижная точка отображения $\widetilde{H}(\widetilde{w},\varepsilon)$. Таким образом, при всех $\varepsilon \in (0;\varepsilon_1)$ существует $\widetilde{w}_\varepsilon$ — решение уравнения (3.8).

Возвращаясь к переменной w, получим, что $w_\varepsilon = \widetilde{w}_\varepsilon - \varepsilon\mathcal{H}^{-1}f_1 = O(\varepsilon)$ есть решение уравнения $0 = H(w,\varepsilon)$.

2. Покажем, что любое решение w_ε уравнения $0 = H(w,\varepsilon)$ такое, что $w_\varepsilon = o(1)$ имеет асимптотический порядок $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$.

Действительно, в силу (3.5) и (3.6)

$$\|w_\varepsilon\|(1 - K\|w_\varepsilon\|) \leqslant \varepsilon\|\mathcal{H}^{-1}f_1\| + K\varepsilon^2,$$

откуда с учетом $w_\varepsilon = o(1)$ и следует асимптотическая оценка $\|w_\varepsilon\| = O(\varepsilon)$.

Система $0 = \mathcal{H}\widetilde{w}_1 + \varepsilon f_1$ является системой первого приближения для w_ε, а оператор $\mathcal{H}$ — оператором первого приближения. Из системы первого приближения $\widetilde{w}_1 = -\varepsilon\mathcal{H}^{-1} f_1 := \varepsilon w_1$.

3. Далее процесс построения коэффициентов w_k проходит стандартно. Если уже найдены коэффициенты $w_1, \ldots, w_N$, то для новой переменной

$$w_{\varepsilon,N+1} := w_\varepsilon - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k w_k$$

в силу определения коэффициентов $w_1, \ldots, w_N$ получится уравнение

$$0 = \mathcal{H} w_{\varepsilon,N+1} + \varepsilon^{N+1} f_{N+1} + O\big(\varepsilon\|w_{\varepsilon,N+1}\| + \|w_{\varepsilon,N+1}\|^2 + \varepsilon^{N+2}\big). \tag{3.9}$$

И новый коэффициент w_{N+1} определяется следующим образом: $0 = \mathcal{H}\widetilde{w}_{N+1} + \varepsilon^{N+1} f_{N+1}$, т. е. $w_{N+1} := -\mathcal{H}^{-1} f_{N+1}$.

Из (3.9) получим

$$\|w_{\varepsilon,N+1}\| \leqslant K_1\big(\varepsilon\|w_{\varepsilon,N+1}\| + \|w_{\varepsilon,N+1}\|^2 + \varepsilon^{N+1}\big).$$

Отсюда, если $\|w_{\varepsilon,N+1}\| \neq 0$, получим, что

$$K_1^{-1} \leqslant \varepsilon + \|w_{\varepsilon,N+1}\| + \frac{\varepsilon^{N+1}}{\|w_{\varepsilon,N+1}\|}. \tag{3.10}$$

Поскольку $\|w_{\varepsilon,N+1}\| = O(\varepsilon)$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ из (3.10) следует, что

$$\frac{1}{2K_1} \leqslant \frac{\varepsilon^{N+1}}{\|w_{\varepsilon,N+1}\|},$$

т. е. $\|w_{\varepsilon,N+1}\| \leqslant 2K_1\varepsilon^{N+1}$. Поэтому построенный ряд (3.4) есть степенное асимптотическое разложение малого решения w_ε уравнения $0 = H(w,\varepsilon)$.

4. Поскольку коэффициенты разложения (3.4) строятся однозначно по коэффициентам разложения функции $H(w,\varepsilon)$, то все малые решения уравнения $0 = H(w,\varepsilon)$ асимптотически равны. □

Отметим, что доказанная теорема является обобщением теоремы 1.2 из [15]. Она не сводится к теореме о неявно заданной функции, поскольку при добавлении слагаемого $h(w)e^{-1/\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, $h(0) = 0$, а $h(w)$ непрерывная, но не дифференцируемая в любой окрестности нуля, к бесконечно дифференцируемой функции $H(w,\varepsilon)$ сразу нарушаются условия классической теоремы о неявно заданной функции. При этом степенные асимптотические разложения функций $H(w,\varepsilon)$ и $H(w,\varepsilon) + h(w)e^{-1/\varepsilon}$ будут совпадать.

4. Построение асимптотических разложений вектора $\boldsymbol{l_\varepsilon}$ и времени быстродействия $\boldsymbol{T_\varepsilon}$

Чтобы воспользоваться теоремой 4 для получения асимптотических разложений вектора l_ε и времени быстродействия T_ε, покажем, что правые части системы (3.2) раскладываются в степенные асимптотические ряды по малым Δl, ΔT, ε, и при этом оператор первого приближения обратим.

Представим интеграл в правой части системы (3.2) в виде суммы двух слагаемых

$$J(\Delta l, \Delta T, \varepsilon) := \int\limits_0^{T_0+\Delta T} \frac{C_\varepsilon(t)C_\varepsilon^*(t)(l_0+\Delta l)}{\|C_\varepsilon^*(t)(l_0+\Delta l)\|}\,dt = \int\limits_0^{T_0} + \int\limits_{T_0}^{T_0+\Delta T_\varepsilon}$$

$$=: J_1(\Delta l, \varepsilon) + J_2(\Delta l, \Delta T, \varepsilon). \tag{4.1}$$

Введем следующее дополнительное условие.

Условие VI. Для любого $\tau \geqslant 0$ выполняется

$$\|(B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^* A_{12}^*)l_0\| \neq 0.$$

Отметим, что в силу (1.6) из условия VI при $\tau = 0$ следует, что

$$\|B_1^* l_0\| \neq 0. \tag{4.2}$$

Утверждение 4. *Пусть выполнены предположения* I–VI. *Тогда найдутся* $K > 0$ *и* $\varepsilon_0 > 0$ *такие, что при всех* $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ *и* $t \in [0;T_\varepsilon]$ *справедливо неравенство* $\|C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon\| \geqslant K$.

Доказательство. В силу теоремы 3, формулы (2.8) и того, что $\|e^{A_{22}^*\tau}\| \leqslant K_1 e^{-\gamma\tau}$ ($K_1 > 0$, $\gamma > 0$) при $\varepsilon \to +0$ (см., например, утверждение 2.1 из [14]), получим

$$C_\varepsilon^*(t)l_\varepsilon = \begin{cases} C_0^*(t)l_0 + o(1), & t > \sqrt{\varepsilon}, \\ (B_0^* + B_2^* e^{A_{22}^*\tau}(A_{22}^{-1})^* A_{12}^*)l_0 + o(1), & 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\varepsilon}, \quad \tau = t/\varepsilon. \end{cases}$$

Отметим, что $B_0^* l_0 = C_0^*(0)l_0$. В силу непрерывности $C_0^*(t)$, $e^{A_{22}^*\tau}$ и $\|e^{A_{22}^*\tau}\| \to +0$ при $\tau \to +\infty$ получим справедливость заключения доказываемого утверждения. □

Таким образом, подынтегральная функция в (4.1) не имеет особенностей в знаменателе, поэтому раскладывается в степенной ряд по Δl и ε с аналитическими по t и t/ε коэффициентами.

Алгоритм получения степенной асимптотики каждого из интегралов J_1 и J_2 подробно описан в [14].

Выпишем образ линейного оператора $\mathcal{H}\omega$, где $w = (\Delta l^*, \Delta T)^*$,

$$\mathcal{H}\begin{pmatrix} \Delta l \\ \Delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1(\Delta l, \Delta T) \\ \mathcal{H}_2(\Delta l, \Delta T) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\Delta l, \Delta T) = \int_0^{T_0} C_0(t) \frac{C_0^*(t)\Delta l \|C_0^*(t)l_0\|^2 - \langle C_0^*(t)\Delta l, C_0^*(t)l_0\rangle C_0^*(t)l_0}{\|C_0^*(t)l_0\|^3}\, dt \\ + \ e^{A_0T_0}A_0x_0\Delta T + \frac{C_0(T_0)C_0^*(T_0)l_0}{\|C_0^*(T_0)l_0\|}\Delta T, \\ \mathcal{H}_2(\Delta l, \Delta T) = \langle l_0, \Delta l\rangle. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{H}$ обратим. Поскольку обратимость линейного оператора, действующего в конечномерном линейном пространстве, эквивалентна его инъективности, то проверим инъективность этого оператора. Покажем, что ядро оператора $\mathcal{H}$ нулевое. Домножим сначала уравнение $\mathcal{H}_1(\Delta l, \Delta T) = 0$ скалярно на вектор l_0, при этом подынтегральная функция обратится в нуль тождественно и уравнение примет вид

$$\Delta T(\langle e^{A_0T_0}A_0x_0, l_0\rangle + \|C_0^*(T_0)l_0\|) = 0. \tag{4.4}$$

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\langle e^{A_0T_0}A_0x_0, l_0\rangle = \|B_0^*l_0\| - \|C_0^*(T_0)l_0\|.$$

Доказательство. Домножим обе части первого уравнения (1.11) скалярно на l_0, тогда

$$\langle e^{A_0T_0}A_0x_0, l_0\rangle = \langle e^{A_0T_0}x_0, A_0^*l_0\rangle = -\int_0^{T_0} \frac{\langle C_0(t)C_0^*(t)l_0, A_0^*l_0\rangle}{\|C_0^*(t)l_0\|}\, dt = -\int_0^{T_0} \frac{\langle C_0^*(t)l_0, C_0^*(t)A_0^*l_0\rangle}{\|C_0^*(t)l_0\|}\, dt$$

$$= -\int_0^{T_0} d\|C_0^*(t)l_0\| = \|B_0^*l_0\| - \|C_0^*(T_0)l_0\|.$$

□

В силу леммы 1 и условия V из (4.4) получаем, что $\Delta T = 0$.

Далее покажем, что $\Delta l = 0$. Предположим, что это не так, и домножим уравнение $\mathcal{H}_1(\Delta l, \Delta T) = 0$ скалярно на вектор $\Delta l \neq 0$. В числителе подынтегральной функции получим выражение

$$\|C_0^*(t)l_0\|^2 \|C_0^*(t)\Delta l\|^2 - (\langle C_0^*(t)l_0, C_0^*(t)\Delta l\rangle)^2. \tag{4.5}$$

В силу неравенства Коши — Буняковского при всех $t \in [0, T_0]$ выражение (4.5) неотрицательно. Из равенства нулю интеграла по невырожденному промежутку от неотрицательной непрерывной функции следует, что подынтегральная функция тождественно равна нулю. Равенство нулю в выражении (4.5) достигается только в случае коллинеарности соответствующих векторов:

$$\forall t \in [0, T_0] \qquad C_0^*(t)l_0 \parallel C_0^*(t)\Delta l.$$

В силу условия III отсюда следует, что $l_0 \parallel \Delta l$, что противоречит уравнению $\langle l_0, \Delta l\rangle = 0$ (см. (4.3)). Значит, наше предположение неверно и $\Delta l = 0$. Следовательно, оператор $\mathcal{H}$ обратим и в силу теоремы 4 (в которой, в частности, описан алгоритм получения коэффициентов асимптотического разложения) справедлива следующая итоговая теорема.

Теорема 5. *При выполнении условий* I–VI *время быстродействия и вектор, определяющий оптимальное управление, раскладываются в асимптотические ряды в смысле Пуанкаре по степеням малого параметра ε.*

5. Примеры

1. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{x} = y + u, & x, y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon \dot{y} = -y + u, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0, \quad y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}, \qquad T_\varepsilon \longrightarrow \min. \end{cases}$$

Матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}_\varepsilon$ (1.2) примут вид

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & -\varepsilon^{-1} I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} I \\ \varepsilon^{-1} I \end{pmatrix}; \tag{5.1}$$

здесь I — матрица тождественного отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} I & \varepsilon(1 - e^{-t/\varepsilon})I \\ 0 & e^{-t/\varepsilon} I \end{pmatrix}, \quad C_\varepsilon(t) = \left[e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon\right]_1 = (2 - e^{-t/\varepsilon})I. \tag{5.2}$$

В предельной задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = 2u, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_0) = 0, \qquad T_0 \longrightarrow \min, \\ A_0 = 0, \ B_0 = 2I, \ C_0(t) \equiv 2I \end{cases}$$

оптимальное управление и время быстродействия вычисляются по формулам

$$u_0(t) \equiv -\frac{x_0}{\|x_0\|} =: l_0, \quad T_0 = \frac{\|x_0\|}{2}.$$

В данном примере все условия I–VI выполнены, поэтому время быстродействия и вектор, определяющий оптимальное управление, раскладываются в асимптотические ряды по степеням малого параметра ε.

Отметим, что оператор $\mathcal{H}$ (5.5) в рассматриваемом примере имеет вид

$$\mathcal{H}\begin{pmatrix} \Delta l \\ \Delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{2x_0}{\|x_0\|}\Delta T + \|x_0\|\Delta l - \dfrac{\langle x_0, \Delta l\rangle x_0}{\|x_0\|} \\ \langle x_0, \Delta l\rangle \end{pmatrix},$$

а система первого приближения —

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon y_0 - \dfrac{2x_0}{\|x_0\|}\Delta T + \|x_0\|\Delta l - \dfrac{\langle x_0, \Delta l\rangle x_0}{\|x_0\|}, \\ 0 = \langle x_0, \Delta l\rangle. \end{cases} \tag{5.3}$$

Отсюда с учетом второго соотношения в (5.3) получаем

$$0 = \varepsilon y_0 - \frac{2x_0}{\|x_0\|}\Delta T + \|x_0\|\Delta l.$$

Умножив последнее равенство скалярно на x_0, с учетом второго соотношения в (5.3) найдем $\Delta T_\varepsilon = \varepsilon\langle y_0, x_0\rangle/(2\|x_0\|)$. После чего найдем и Δl_ε. Таким образом, в рассматриваемой задаче верны следующие асимптотические при $\varepsilon \to +0$ равенства:

$$T_\varepsilon = \frac{\|x_0\|}{2} + \varepsilon\frac{\langle x_0, y_0\rangle}{2\|x_0\|} + O(\varepsilon^2), \quad l_\varepsilon = -\frac{x_0}{\|x_0\|} + \frac{\varepsilon}{\|x_0\|}\Big(\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\langle x_0, y_0\rangle - y_0\Big) + O(\varepsilon^2).$$

2. Движение точки малой массы $\varepsilon > 0$ с сопротивлением под действием ограниченной управляющей силы моделируется следующей задачей:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, & x, y \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^n, \\ \varepsilon\dot{y} = -y + u, & \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0,\ y(0) = y_0, & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ x(T_\varepsilon) = 0,\ y(T_\varepsilon) \in \mathbb{R}, \quad T_\varepsilon \longrightarrow \min. \end{cases}$$

Матрицы $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}$ такие же, как и в первом примере (см. (5.1), (5.2)), а

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad C_\varepsilon(t) = \big[e^{\mathcal{A}_\varepsilon t}\mathcal{B}_\varepsilon\big]_1 = (1 - e^{-t/\varepsilon})I.$$

В предельной задаче

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \quad \|u\| \leqslant 1, \\ x(0) = x_0 \neq 0, \quad x(T_0) = 0, \quad T_0 \longrightarrow \min \end{cases}$$

оптимальное управление и время быстродействия вычисляются по формулам

$$u_0(t) \equiv -\frac{x_0}{\|x_0\|} =: l_0, \qquad T_0 = \|x_0\|.$$

Отметим, что в этой задаче условия I–V выполнены, поэтому справедливы предельные соотношения для T_ε и l_ε и основное уравнение.

Условие VI не выполнено, поскольку $B_1^* = 0$ (см. (4.2)). Однако и для этой задачи время быстродействия и вектор, определяющий оптимальное управление, раскладываются в асимптотические ряды по степеням малого параметра ε.

Действительно, в данном примере интеграл из основной системы вычисляется в явном виде и основная система уравнений (2.9), (2.4) принимает вид

$$0 = x_0 + \varepsilon y_0 + T_\varepsilon l_\varepsilon - \varepsilon l_\varepsilon + \mathbb{O}, \qquad \|l_\varepsilon\| = 1;$$

здесь $\mathbb{O}$ — асимптотический нуль относительно степенной асимптотической последовательности, т. е. $\forall\gamma > 0\ \mathbb{O} = o(\varepsilon^\gamma),\ \varepsilon \to 0$. Домножим скалярно первое уравнение системы на вектор l_ε, с учетом второго уравнения получим

$$T_\varepsilon = \varepsilon - \langle x_0 + \varepsilon y_0, l_\varepsilon\rangle. \tag{5.4}$$

Подставив выражение для T_ε обратно в первое уравнение, преобразуем это уравнение к виду

$$0 = x_0 + \varepsilon y_0 - \langle x_0 + \varepsilon y_0, l_\varepsilon\rangle l_\varepsilon. \tag{5.5}$$

Следовательно, $l_\varepsilon || (x_0 + \varepsilon y_0)$ и найдется такой скаляр δ_ε, что $l_\varepsilon = \delta_\varepsilon(x_0 + \varepsilon y_0)$. Из (5.5) получим, что $\delta_\varepsilon = \pm\|x_0 + \varepsilon y_0\|^{-1}$, тогда в силу того, что $T_\varepsilon > 0$, из (5.4) вытекает

$$l_\varepsilon = -\frac{x_0 + \varepsilon y_0}{\|x_0 + \varepsilon y_0\|}, \qquad T_\varepsilon = \|x_0 + \varepsilon y_0\| + \varepsilon. \tag{5.6}$$

Для $\Delta l_\varepsilon = l_\varepsilon + \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$ и $\Delta T_\varepsilon = T_\varepsilon - \|x_0\|$ (3.1) из (5.6) получаются степенные асимптотические разложения. В частности, верны следующие асимптотические при $\varepsilon \to +0$ равенства:

$$T_\varepsilon = \|x_0\| + \varepsilon\Big(1 + \frac{\langle x_0, y_0\rangle}{\|x_0\|}\Big) + O(\varepsilon^2), \quad l_\varepsilon = -\frac{x_0}{\|x_0\|} + \frac{\varepsilon}{\|x_0\|}\Big(\frac{x_0}{\|x_0\|^2}\langle x_0, y_0\rangle - y_0\Big) + O(\varepsilon^2).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
2. **Дмитриев М. Г., Курина Г. А.** Сингулярные возмущения в задачах управления // Автоматика и телемеханика. 2006. № 1. С. 3–51.
3. **Zhang Y., Naidu D. S., Chenxiao Cai, Yun Zou.** Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012 // Intern. J. Informaton and Systems Sciences. 2014. Vol. 9, no. 1. P. 1–36.
4. **Kokotovic P. V., Haddad A. H.** Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. Vol. 20, no. 1. P. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852 .
5. **Дончев А.** Системы оптимального управления: Возмущения, приближения и анализ чувствительности. М.: Мир, 1987. 156 с.
6. **Donchev A. L., Veliev V. M.** Singular perturbation in Mayer's problem for linear systems // SIAM J. Control Optim. 1983. Vol. 21, no. 4. P. 566–581.
7. **Курина Г. А., Нгуен Т. Х.** Асимптотическое решение сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления с разрывными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 4. С. 628–652.
8. **Kurina G. A., Hoai N. T.** Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-quadratic control problem in a critical case // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1997. P. 020073. doi: 10.1063/1.5049067.
9. **Данилин А. Р., Ильин А. М.** О структуре решения одной возмущенной задачи быстродействия // Фундамент. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 3. С. 905–926.
10. **Данилин А. Р., Коврижных О. О.** О задаче управления точкой малой массы в среде без сопротивления // Докл. РАН. 2013. Т. 451, № 6. С. 612–614.
11. **Данилин А. Р., Парышева Ю. В.** Асимптотика оптимального значения функционала качества в линейной задаче оптимального управления // Докл. РАН. 2009. Т. 427, № 2. С. 151–154.

12. **Шабуров А. А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и гладкими геометрическими ограничениями на управление // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. гос. ун-та. 2017. Т. 50, № 2. С. 110–120.
13. **Данилин А. Р., Коврижных О. О.** О зависимости задачи быстродействия для линейной системы от двух малых параметров // Вест. Челяб. гос. ун-та. Математика, механика, информатика. 2011. Вып. 14. С. 46–60.
14. **Шабуров А. А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и гладкими геометрическими ограничениями на управление // Вест. Тамбов. ун-та. Серия: естественные и технические науки. 2019. Т. 24, № 125. С. 119–614. doi: 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136 .
15. **Шабуров А. А.** Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенных задач оптимального управления с гладкими ограничениями на управление и интегральным выпуклым критерием качества: дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург, 2019. 132 с.
16. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
17. **Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.** Асимптотические разложение решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
18. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.

Поступила 15.01.2020
После доработки 27.02.2020
Принята к публикации 2.03.2020

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

Коврижных Ольга Олеговна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: koo@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*, ed. L.W. Neustadt, N Y; London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. ISBN: 0470693819 . Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Fizmatgiz Publ., 1961, 391 p.
2. Dmitriev M.G., Kurina G.A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. doi: 10.1134/S0005117906010012 .
3. Zhang Y., Naidu D.S., Chenxiao Cai and Yun Zou Singular perturbations and time scales in control theories and applications: an overview 2002-2012 *Inter. J. Informaton and Systems Sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.
4. Kokotovic P.V., Haddad A.H. Controllability and time-optimal control of systems with slow and fast modes. *IEEE Trans. Automat. Control.*, 1975, vol. 20, no. 1, pp. 111–113. doi: 10.1109/TAC.1975.1100852 .
5. Dontchev A.L. *Perturbations, approximations and sensitivity analisis of optimal control systems.* Berlin; Heidelberg; N Y; Tokio, Springer-Verlag, 1983, 161 p. doi: 10.1007/BFb0043612. Translated under the title *Sistemy optimal'nogo upravleniya: Vozmushcheniya, priblizheniya i analiz chuvstvitel'nosti*, Moscow, Mir Publ., 1987, 156 p.

6. Donchev A.L., Veliev V.M. Singular Perturbation in Mayer's Problem for Linear Systems. *SIAM J. Control Optim.* 1983. vol. 21, no. 4, pp. 566–581. doi: 10.1137/0321034 .
7. Kurina G.A., Nguyen T.H. Asymptotic solution of singularly perturbed linear-quadratic optimal control problems with discontinuous coefficients. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2012, vol. 52, no. 4, pp. 524-547. doi: 10.1134/S0965542512040100 .
8. Kurina G.A., Hoai N.T. Projector approach for constructing the zero order asymptotic solution for the singularly perturbed linear-Quadratic control problem in a critical case *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1997, pp. 020073. doi: 10.1063/1.5049067.
9. Danilin A.R., Il'in A.M. On the structure of the solution of a perturbed optimal-time control problem. *Fundament. Prikl. Matematika*, 1998, vol. 4, no. 3, pp. 905–926 (in Russian).
10. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. Time-optimal control of a small mass point without environmental resistance. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 88, no. 1, pp. 465–467. doi:10.1134/S1064562413040364 .
11. Danilin A.R., Parysheva Y.V. Asymptotics of the optimal cost functional in a linear optimal control problem. *Dokl. Math.*, 2009, vol. 80, no. 1, pp. 478–481. doi:10.1134/S1064562409040073 .
12. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of a solution for the singularly perturbed optimal control problem with a convex integral quality index and smooth control constraints *Proc. of the Institute of Math. and Inf. at Udmurt State University*, 2017, vol. 50, no 2, pp. 110–120.
13. Danilin A.R., Kovrizhnykh O.O. On the dependence of the time-optimal control problem for a linear system of two small parameters. *Vest. Chelyabinsk. Univ.*, Ser. Matematika, Mekhanika, Informatika, iss. 14, 2011, pp. 46–60 (in Russian).
14. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of the solution to a singularly perturbed optimal control problem with an integral convex quality criterion and smooth geometric control constraints. *Vestn. of Tambov. Univ. Ser: Natural and Technical Sciences.* 2019, vol. 24, no. 125, pp. 119–136 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2019-24-125-119-136 .
15. Shaburov A.A. Asymptotic expansion of the solution to singularly perturbed optimal control problems with smooth geometric control constraints and an integral convex quality index. The dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences. Yekaterinburg, 2019. 132 p.
16. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y; London; Sydney: John Wiley & Sons, Inc., 1967, 576 p. Translated under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow, Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635 .
17. Vassilyeva A.B., Butuzov V.F. *Asymptoticheckie razlozhenya reshenyi singul'arno vozmutshennykh uravnenyi* [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka Publ., 1973, 272 p.
18. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis.* 2nd ed. N Y: Pergamon Press Ltd, 1982, 589 p. ISBN: 0-08-023036-9 . Original Russian text (3rd ed.) published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz.* Moscow: Nauka Publl., 1984, 752 p.

Received January 15, 2020
Revised February 27, 2020
Accepted March 2, 2020

Funding Agency: O. O. Kovrizhnykh's research is supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Ol'ga Olegovna Kovrizhnykh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: koo@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. R. Danilin, O. O. Kovrizhnykh. Asymptotics of a solution to a singularly perturbed time-optimal control problem of transferring an object to a set. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 132–146 .