ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 1 2020

УДК 517.977

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ[1]

М. И. Гомоюнов, Н. Ю. Лукоянов

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$. Промежуток времени процесса управления зафиксирован и конечен. Управляющие воздействия стеснены геометрическими ограничениями. Целью управления является минимизация заданного терминально-интегрального показателя качества. Предлагается следующий подход к построению решения. Сначала рассматриваемая задача сводится к вспомогательной задаче оптимального управления линейной системой первого порядка с сосредоточенными запаздываниями, которая аппроксимирует исходную систему. Затем вспомогательная задача редуцируется до задачи оптимального управления обыкновенной дифференциальной системой. На этой основе строится схема оптимального управления исходной системой по принципу обратной связи с использованием поводыря, роль которого играет аппроксимирующая система. При этом управление в аппроксимирующей системе формируется при помощи оптимальной позиционной стратегии управления из редуцированной задачи. Работоспособность развиваемого подхода иллюстрируется на задаче с показателем качества в виде нормы терминального состояния системы.

Ключевые слова: оптимальное управление, линейные системы, производные дробного порядка, аппроксимация, системы с запаздыванием, управление по принципу обратной связи.

M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. Construction of solutions to control problems for fractional-order linear systems based on approximation models.

We consider an optimal control problem for a dynamical system whose motion is described by a linear differential equation with the Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$. The time interval of the control process is fixed and finite. The control actions are subject to geometric constraints. The aim of the control is to minimize a given terminal-integral quality index. In order to construct a solution, we develop the following approach. First, from the considered problem, we turn to an auxiliary optimal control problem for a first-order linear system with lumped delays, which approximates the original system. After that, the auxiliary problem is reduced to an optimal control problem for an ordinary differential system. Based on this, we propose a closed-loop scheme of optimal control of the original system that uses the approximating system as a guide. In this scheme, the control in the approximating system is formed with the help of an optimal positional control strategy from the reduced problem. The effectiveness of the developed approach is illustrated by a problem in which the quality index is the norm of the terminal state of the system.

Keywords: optimal control, linear systems, fractional-order derivatives, approximation, time-delay systems, closed-loop control.

MSC: 49N05, 34A08

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-39-50

Введение

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$. Промежуток времени процесса управления зафиксирован и конечен. Управляющие воздействия стеснены геометрическими ограничениями. Целью управления является минимизация заданного терминально-интегрального показателя качества.

Идеология исследования восходит к теоретико-игровому подходу [1–5], некоторые конструкции которого для систем дробного порядка были развиты в [6; 7]. В статье на базе результатов из [6; 8] рассматриваемая задача сводится к вспомогательной задаче оптимального

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 19-11-00105).

управления линейной системой первого порядка с сосредоточенными запаздываниями, которая аппроксимирует исходную систему. Затем с опорой на результаты из [9; 10] вспомогательная задача редуцируется до задачи оптимального управления обыкновенной дифференциальной системой. Далее на этой основе предлагается схема оптимального управления исходной системой по принципу обратной связи с использованием поводыря [1], роль которого играет аппроксимирующая система. При этом управление в аппроксимирующей системе формируется при помощи оптимальной позиционной стратегии управления [2] из редуцированной задачи. Таким образом, полученные результаты позволяют применять для построения решений задач управления системами дробного порядка методы, разработанные в теории управления для обыкновенных дифференциальных систем. Работоспособность развиваемого подхода иллюстрируется в статье на задаче с показателем качества в виде нормы терминального состояния системы. Подчеркнем также, что особенность предложенной схемы оптимального управления заключается в том, что она естественным образом распространяется на задачи управления в условиях помех или противодействия.

Отметим, что в настоящее время задачи оптимального управления линейными системами с дробными производными Капуто исследуются достаточно активно. Рассматриваются различные постановки, включая линейно-квадратичные задачи (см., например, [11]), задачи на минимум интегрального показателя качества (см., например, [12]), задачи о переводе системы в заданное состояние за наименьшее время или с минимумом нормы управления (см., например, [13–15]). В основном применяются подходящие варианты принципа максимума, методы вариационного исчисления и выпуклого анализа, а также методы, связанные с проблемой моментов. В настоящей статье акцент сделан на сведении задач управления линейными системами дробного порядка к задачам управления обыкновенными дифференциальными системами.

1. Постановка задачи

Пусть движение динамической системы на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ описывается линейным дифференциальным уравнением дробного порядка

$$({}^C D^\alpha x)(t) = A(t)x(t) + f(t, u(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{1.1a}$$

при начальном условии

$$x(t_0) = x_0. \tag{1.1b}$$

Здесь t — время, $x(t)$ — состояние системы в момент времени t, $u(t)$ — текущее управляющее воздействие; $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — начальное состояние системы; $\mathbb{U}$ — компактное множество; через $({}^C D^\alpha x)(t)$ обозначена дробная производная Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$ в момент t (см., например, [16, Sect. 3.1]):

$$({}^C D^\alpha x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{x(\tau) - x(t_0)}{(t-\tau)^\alpha} \, \mathrm{d}\tau,$$

где Γ — гамма-функция. Полагаем, что функции $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, и $f(t, u) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $u \in \mathbb{U}$, непрерывны.

Пусть $AC^\alpha([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ — множество функций $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \vartheta]$, для каждой из которых найдется измеримая существенно ограниченная функция $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \vartheta]$, такая, что

$$x(t) = x(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\varphi(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \, \mathrm{d}\tau, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Другими словами, функция $x(\cdot)$ представима в виде суммы начального значения $x(t_0)$ и интеграла Римана — Лиувилля порядка α от функции $\varphi(\cdot)$ (см., например, [16, Sect. 2.1]).

Допустимым (программным) управлением считаем любую измеримую функцию $u(t) \in \mathbb{U}$, $t \in [t_0, \vartheta)$. Множество всех таких управлений обозначаем через $\mathcal{U}$. Под движением системы (1.1a), (1.1b), отвечающим управлению $u(\cdot) \in \mathcal{U}$, понимаем функцию $x(\cdot) \in AC^{\alpha}([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет равенству (1.1b) и вместе с $u(\cdot)$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1a). При указанных условиях такое движение, обозначаемое далее как $x(\cdot \mid u(\cdot))$, существует и единственно (см., например, [17, Theorem 3.1]).

Целью управления является минимизация показателя качества

$$\gamma(u(\cdot)) = \sigma\big(x(\vartheta \mid u(\cdot))\big) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \chi(t, u(t))\,\mathrm{d}t, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \tag{1.1c}$$

где $\sigma(x) \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, и $\chi(t, u) \in \mathbb{R}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $u \in \mathbb{U}$, — заданные непрерывные функции.

Определим величину оптимального результата в задаче (1.1)

$$\rho = \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \gamma(u(\cdot)).$$

Для $\zeta > 0$ управление $u_0(\cdot) \in \mathcal{U}$ назовем ζ-оптимальным, если

$$\gamma(u_0(\cdot)) \leqslant \rho + \zeta.$$

В настоящей статье представлен подход, позволяющий находить величину ρ и ζ-оптимальные управления $u_0(\cdot)$ посредством аппроксимации задачи (1.1) вспомогательной задачей оптимального управления для динамической системы, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка с сосредоточенными запаздываниями. В разд. 2 и 3 рассматриваются программные ζ-оптимальные управления. В разд. 4 изучается вопрос о построении таких управлений по принципу обратной связи.

2. Аппроксимирующая задача

Зафиксируем значение параметра аппроксимации $h > 0$. При этом всюду далее считаем, что $\vartheta - t_0 = Nh$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\vartheta_i = \vartheta - ih, \quad k_i(t) = \begin{cases} (-1)^i \dbinom{1-\alpha}{i} h^{\alpha-1}, & t \in [t_0 + ih, \vartheta], \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \quad i \in \overline{0, N}, \tag{2.1}$$

где $\dbinom{1-\alpha}{i}$ — биномиальные коэффициенты. Положим

$$g(t, u) = A(t)x_0 + f(t, u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления для динамической системы

$$\dot{y}(t) = A(t) \sum_{i=0}^{N} k_i(t) y(t - ih) + g(t, p(t)), \quad y(t) \in \mathbb{R}^n, \quad p(t) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{2.2a}$$

начального условия

$$y(t_0) = 0 \tag{2.2b}$$

и показателя качества

$$\gamma_y^{(h)}(p(\cdot)) = \sigma\Big(x_0 + \sum_{i=0}^{N} k_i(\vartheta) y(\vartheta_i \mid p(\cdot))\Big) + \int\limits_{t_0}^{\vartheta} \chi(t, p(t))\,\mathrm{d}t, \quad p(\cdot) \in \mathcal{U}. \tag{2.2c}$$

Здесь $y(t)$ — состояние вспомогательной системы в момент времени t; $p(t)$ — текущее управляющее воздействие; $\dot{y}(t) = \mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t$. Подчеркнем, что для каждого $i \in \overline{1,N}$ при $t - ih < t_0$ значения $y(t-ih)$ участвуют в уравнении (2.2a) лишь формально, так как $k_i(t) = 0$ в силу (2.1). Поэтому, в частности, в качестве начального условия (2.2b) для этого уравнения достаточно задать только значение $y(t_0)$. В (2.2c) через $y(\cdot \mid p(\cdot))$ обозначено порожденное управлением $p(\cdot) \in \mathcal{U}$ движение вспомогательной системы — абсолютно непрерывная функция $y(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_0, \vartheta]$, которая удовлетворяет равенству (2.2b) и вместе с $p(\cdot)$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (2.2a). При сделанных предположениях такое движение существует и единственно (см., например, [9; 10]). Цель управления — минимизация показателя (2.2c).

Оптимальным результатом во вспомогательной задаче (2.2) будет величина

$$\rho_y^{(h)} = \inf_{p(\cdot) \in \mathcal{U}} \gamma_y^{(h)}(p(\cdot)).$$

Для $\zeta > 0$ управление $p_0(\cdot) \in \mathcal{U}$ будет ζ-оптимальным в этой задаче, если

$$\gamma_y^{(h)}(p_0(\cdot)) \leqslant \rho_y^{(h)} + \zeta.$$

Следующее утверждение устанавливает связь между задачами (1.1) и (2.2). Его справедливость вытекает из равномерной близости [8, Theorem 2] движений $x(\cdot \mid u(\cdot))$ исходной и $y(\cdot \mid p(\cdot))$ вспомогательной систем при $p(\cdot) = u(\cdot)$ и равномерной ограниченности [17, Proposition 5.1] движений $x(\cdot \mid u(\cdot))$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Утверждение 1. *Для любого $\zeta > 0$ найдутся такие $h_* > 0$ и $\zeta_* > 0$, что для каждого $h \in (0, h_*]$ будет справедливо неравенство $|\rho - \rho_y^{(h)}| \leqslant \zeta$, а всякое ζ_*-оптимальное управление во вспомогательной задаче* (2.2) *будет ζ-оптимальным в исходной задаче* (1.1).

Таким образом, задача (1.1) аппроксимируется задачей (2.2). Следующий раздел посвящен редукции задачи (2.2) до задачи оптимального управления динамической системой, движение которой описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

3. Редукция аппроксимирующей задачи

Пусть $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — единичная матрица. Определим функцию $Y^{(h)}(\tau, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, $t \in [t_0, \vartheta]$, которая при каждом $\tau \in [t_0, \vartheta]$ удовлетворяет условиям

$$Y^{(h)}(\tau, \tau) = E, \quad Y^{(h)}(\tau, t) = 0, \quad t \in (\tau, \vartheta], \tag{3.1}$$

является абсолютно непрерывной по t на промежутке $[t_0, \tau]$ и почти всюду на этом промежутке удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} Y^{(h)}(\tau, t) = -\sum_{i=0}^{N} k_i(t + ih) Y^{(h)}(\tau, t + ih) A(t + ih). \tag{3.2}$$

По аналогии с (2.2a) для каждого $i \in \overline{1,N}$ при $t + ih > \vartheta$ значения $Y^{(h)}(\tau, t + ih)$ и $A(t + ih)$ участвуют в уравнении (3.2) лишь формально, так как $k_i(t + ih) = 0$ в силу (2.1). Положим

$$g_i(t, u) = Y^{(h)}(\vartheta_i, t) g(t, u), \quad i \in \overline{0,N}, \quad \mathbf{g}^{(h)}(t, u) = \big\{ g_i(t, u) \in \mathbb{R}^n : i \in \overline{0,N} \big\} \in \mathbb{R}^{(N+1)n}, \tag{3.3}$$

где $t \in [t_0, \vartheta]$, $u \in \mathbb{U}$. Последняя запись в (3.3) означает, что первые n координат вектора $\mathbf{g}^{(h)}(t, u)$ совпадают с координатами вектора $g_0(t, u)$, следующие n координат $\mathbf{g}^{(h)}(t, u)$ совпадают с координатами $g_1(t, u)$ и так далее, последние n координат вектора $\mathbf{g}^{(h)}(t, u)$ совпадают с координатами вектора $g_N(t, u)$. Рассмотрим задачу оптимального управления для системы

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{g}^{(h)}(t, p(t)), \quad \mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{(N+1)n}, \quad p(t) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{3.4a}$$

начального условия

$$\mathbf{z}(t_0) = 0 \tag{3.4b}$$

и показателя качества

$$\gamma_{\mathbf{z}}^{(h)}(p(\cdot)) = \sigma\Big(x_0 + \sum_{i=0}^{N} k_i(\vartheta) z_i(\vartheta \mid p(\cdot))\Big) + \int_{t_0}^{\vartheta} \chi(t, p(t))\,\mathrm{d}t, \quad p(\cdot) \in \mathcal{U}. \tag{3.4c}$$

Здесь $\mathbf{z}(t) = \{z_i(t) \in \mathbb{R}^n : i \in \overline{0, N}\}$ — состояние системы в момент t. Целью управления является минимизация показателя (3.4c), где через $z_i(\cdot \mid p(\cdot))$, $i \in \overline{0, N}$, обозначены соответствующие компоненты движения $\mathbf{z}(\cdot \mid p(\cdot))$ системы (3.4a), (3.4b), порожденного управлением $p(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Задачи (2.2) и (3.4) связаны следующим образом (см., например, [10, лемма 1] и соотношения (4.7) ниже). Каково бы ни было управление $p(\cdot) \in \mathcal{U}$, для движений $y(\cdot \mid p(\cdot))$ системы (2.2a), (2.2b) и $\mathbf{z}(\cdot \mid p(\cdot))$ системы (3.4a), (3.4b) справедливы равенства $y(\vartheta_i \mid p(\cdot)) = z_i(\vartheta \mid p(\cdot))$, $i \in \overline{0, N}$. В частности, значения $\gamma_y^{(h)}(p(\cdot))$ и $\gamma_{\mathbf{z}}^{(h)}(p(\cdot))$ показателей качества (2.2c) и (3.4c) совпадают при всех $p(\cdot) \in \mathcal{U}$, и, следовательно, задача (2.2) эквивалентна задаче (3.4).

Отметим, что численное решение задачи (3.4) осложняется тем, что размерность $(N+1)n$ состояния $\mathbf{z}(t)$ системы (3.4a) возрастает при уменьшении параметра аппроксимации h. Однако то обстоятельство, что в показателе (3.4c) терминальное состояние $\mathbf{z}(\vartheta \mid p(\cdot))$ оценивается только через линейную комбинацию компонент $z_i(\vartheta \mid p(\cdot))$, $i \in \overline{0, N}$, позволяет перейти в задаче (3.4) от переменной $\mathbf{z} = \{z_i \in \mathbb{R}^n : i \in \overline{0, N}\}$ к новой переменной $z \in \mathbb{R}^n$ по правилу

$$z = x_0 + \sum_{i=0}^{N} k_i(\vartheta) z_i. \tag{3.5}$$

Тогда, полагая

$$g^{(h)}(t, u) = \sum_{i=0}^{N} k_i(\vartheta) g_i(t, u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}, \tag{3.6}$$

приходим к редуцированной задаче оптимального управления для системы

$$\dot{z}(t) = g^{(h)}(t, p(t)), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \quad p(t) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{3.7a}$$

начального условия

$$z(t_0) = x_0 \tag{3.7b}$$

и показателя качества

$$\gamma_z^{(h)}(p(\cdot)) = \sigma\big(z(\vartheta \mid p(\cdot))\big) + \int_{t_0}^{\vartheta} \chi(t, p(t))\,\mathrm{d}t, \quad p(\cdot) \in \mathcal{U}. \tag{3.7c}$$

Подчеркнем, что размерность состояния $z(t)$ системы (3.7a) совпадает с размерностью состояния $x(t)$ исходной системы (1.1a) и не зависит от параметра аппроксимации h. В (3.7c) через $z(\cdot \mid p(\cdot))$ обозначено движение системы (3.7a), (3.7b), отвечающее управлению $p(\cdot) \in \mathcal{U}$.

Рассмотрим величину оптимального результата в задаче (3.7):

$$\rho_z^{(h)} = \inf_{p(\cdot) \in \mathcal{U}} \gamma_z^{(h)}(p(\cdot)),$$

и ζ-оптимальные управления $p_0(\cdot) \in \mathcal{U}$:

$$\gamma_z^{(h)}(p_0(\cdot)) \leqslant \rho_z^{(h)} + \zeta. \tag{3.8}$$

В силу утверждения 1 и указанной связи между задачами (2.2), (3.4) и (3.7) имеет место

Утверждение 2. *Для любого $\zeta > 0$ найдутся такие $h_* > 0$ и $\zeta_* > 0$, что для каждого $h \in (0, h_*]$ будет справедливо неравенство $|\rho - \rho_z^{(h)}| \leqslant \zeta$, а всякое ζ_*-оптимальное управление в редуцированной задаче* (3.7) *будет ζ-оптимальным в исходной задаче* (1.1).

Итак, задача (1.1) сводится к задаче (3.7). В следующем разделе предложенная конструкция сведения применяется для построения ζ-оптимальных управлений в исходной задаче (1.1) по принципу обратной связи.

Замечание 1. Согласно (3.3) и (3.6) имеем

$$g^{(h)}(t, u) = \sum_{i=0}^{N} k_i(\vartheta) Y^{(h)}(\vartheta_i, t) g(t, u), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}.$$

Поэтому для того чтобы перейти к редуцированной задаче (3.7), вместо определения для каждого $i \in \overline{0, N}$ значений $Y^{(h)}(\vartheta_i, t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, достаточно найти их линейную комбинацию

$$\Phi^{(h)}(t) = \sum_{i=0}^{N} k_i(\vartheta) Y^{(h)}(\vartheta_i, t), \quad t \in [t_0, \vartheta], \tag{3.9}$$

а это в силу (3.1) и (3.2) можно сделать непосредственно. Действительно, пусть $q \in \overline{0, N-1}$ и при $t \in (\vartheta_q, \vartheta]$ значения $\Phi^{(h)}(t)$ уже найдены. Тогда на промежутке $(\vartheta_{q+1}, \vartheta_q]$ функцию $\Phi^{(h)}(\cdot)$ определяем как решение дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}^{(h)}(t) = -\sum_{i=0}^{q} k_i(t + ih) \Phi^{(h)}(t + ih) A(t + ih), \quad t \in (\vartheta_{q+1}, \vartheta_q],$$

удовлетворяющее условию

$$\Phi^{(h)}(\vartheta_q) = \Phi^{(h)}(\vartheta_q + 0) + k_q(\vartheta) E.$$

При этом полагаем $\Phi^{(h)}(\vartheta + 0) = 0$ и $\Phi^{(h)}(t_0) = \Phi^{(h)}(t_0 + 0) + k_N(\vartheta) E$. Здесь через $\Phi^{(h)}(\vartheta_q + 0)$ обозначен предел справа в точке ϑ_q.

Замечание 2. Как альтернативу предложенному выше подходу к решению аппроксимирующей задачи (2.2), следуя идеям, восходящий к работам [18–20] (см. также [5; 21; 22] и библиографию к этим статьям), можно рассмотреть другой подход, основанный на дальнейшей аппроксимации дифференциального уравнения с сосредоточенными запаздываниями (2.2a) при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений.

4. Управление по принципу обратной связи

Следуя [2], под позиционной стратегией управления в редуцированной задаче (3.7) понимаем любую функцию

$$P(t, z, \varepsilon) \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon > 0,$$

где ε — параметр точности. Пусть Δ — разбиение промежутка $[t_0, \vartheta]$:

$$\Delta = \{\tau_j\}_{j \in \overline{1, k+1}}, \quad \tau_1 = t_0, \quad \tau_j < \tau_{j+1}, \quad j \in \overline{1, k}, \quad \tau_{k+1} = \vartheta. \tag{4.1}$$

Тройку $\{P, \varepsilon, \Delta\}$ называем законом управления. В системе (3.7a), (3.7b) этот закон в цепи обратной связи по шагам разбиения Δ формирует кусочно-постоянное управление

$$p(t) = P(\tau_j, z(\tau_j), \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j \in \overline{1, k}. \tag{4.2}$$

Стратегия $P_0^{(h)}$ будет оптимальной в задаче (3.7), если для любого $\zeta > 0$ найдутся число $\varepsilon_* > 0$ и функция $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, такие, что, каковы бы ни были $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и разбиение Δ вида (4.1), удовлетворяющее условию

$$\max_{j \in \overline{1,k}} (\tau_{j+1} - \tau_j) \leqslant \delta_*(\varepsilon), \tag{4.3}$$

управление $p(\cdot)$, определяемое законом $\{P_0^{(h)}, \varepsilon, \Delta\}$, является ζ-оптимальным, т. е. удовлетворяет неравенству (3.8). Отметим, что при рассматриваемых условиях такая оптимальная стратегия $P_0^{(h)}$ существует (см., например, [2, теорема 29.1]).

Управление в аппроксимирующей системе (2.2a), (2.2b) будем формировать на базе закона $\{P_0^{(h)}, \varepsilon, \Delta\}$ следующим образом. Пусть $j \in \overline{1,k}$ и к моменту времени τ_j реализовалась история движения этой системы $y_{\tau_j}(t) = y(t)$, $t \in [t_0, \tau_j]$. Тогда согласно (4.2) полагаем

$$p(t) = P_0^{(h)}\big(\tau_j, w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)), \varepsilon\big), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}). \tag{4.4}$$

Здесь

$$w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)) = x_0 + \sum_{i=0}^{N} k_i(\vartheta) w_i(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)), \tag{4.5}$$

где для каждого $i \in \overline{0,N}$ имеем

$$w_i(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)) = \begin{cases} Y^{(h)}(\vartheta_i, \tau_j) y(\tau_j) + \sum\limits_{q=0}^{N} \int\limits_{\tau_j}^{\tau_j + qh} k_q(\tau) Y^{(h)}(\vartheta_i, \tau) A(\tau) y(\tau - qh)\, \mathrm{d}\tau, & \tau_j < \vartheta_i, \\ y(\vartheta_i), & \tau_j \geqslant \vartheta_i. \end{cases} \tag{4.6}$$

Следуя [9; 10; 23], вектор $w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot))$ называем информационным образом пары $(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot))$. Отметим, что в силу (2.1) и (2.2b) справедливы равенства

$$w_i(t_0, y(t_0)) = 0, \quad i \in \overline{0,N}, \quad w^{(h)}(t_0, y(t_0)) = x_0, \tag{4.7}$$

в соответствии с которыми были заданы начальные условия (3.4b) и (3.7b).

Согласно [10, теорема 1] с учетом связи (3.5) между задачами (3.4) и (3.7) получаем

Утверждение 3. *Для любых $h > 0$ и $\zeta > 0$ можно указать число $\varepsilon_* > 0$ и функцию $\delta_*(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, такие, что, каковы бы ни были $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и разбиение Δ вида* (4.1), (4.3), *управление $p(\cdot)$, определяемое по правилу* (4.4), *является ζ-оптимальным в аппроксимирующей задаче* (2.2).

Далее задачу (1.1) рассматриваем при дополнительном предположении, что интегральное слагаемое в показателе (1.1c) отсутствует, т. е.

$$\chi(t, u) = 0, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}. \tag{4.8}$$

Управление по принципу обратной связи исходной системой (1.1a), (1.1b) осуществляем с использованием поводыря (см., например, [1, § 57]), роль которого играет оптимальным образом управляемая аппроксимирующая система (2.2a), (2.2b). А именно, задавшись значениями параметров $h > 0$, $\varepsilon > 0$ и разбиением Δ вида (4.1), управления $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ и $p(\cdot) \in \mathcal{U}$ в исходной и аппроксимирующей системах формируем в соответствии со следующим пошаговым правилом. Пусть $j \in \overline{1,k}$ и к моменту времени τ_j реализовались состояние $x(\tau_j)$ исходной системы и история движения $y_{\tau_j}(\cdot)$ аппроксимирующей системы. Тогда на следующем шаге полагаем

$$u(t) = u_j \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \Big\langle x(\tau_j) - x_0 - \sum_{i=0}^{N} k_i(\tau_j) y(\tau_j - ih), f(\tau_j, u) \Big\rangle, \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \tag{4.9}$$

и определяем значения $p(t)$, $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$, согласно (4.4). В (4.9) символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение векторов.

Утверждение 4. *Пусть выполнено условие* (4.8)*. Тогда для любого* $\zeta > 0$ *найдется такое* $h_* > 0$*, при котором для каждого* $h \in (0, h_*]$ *можно указать число* $\varepsilon_* > 0$ *и функцию* $\delta_*(\varepsilon) > 0$*,* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$*, такие, что, каковы бы ни были* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *и разбиение* Δ *вида* (4.1)*,* (4.3)*, управление* $u(\cdot)$*, формируемое по процедуре управления с поводырем* (4.4)*,* (4.9)*, является* ζ*-оптимальным в задаче* (1.1)*.*

Справедливость этого утверждения вытекает из утверждения 3 и [6, Theorem 1].

Таким образом, на основе оптимальной позиционной стратегии управления $P_0^{(h)}$ в редуцированной задаче (3.7) можно в исходной задаче (1.1) построить ζ-оптимальные управления по принципу обратной связи. Кроме того, подчеркнем, что предложенная процедура управления с поводырем может быть естественным образом распространена на задачи управления в условиях помех или противодействия.

Замечание 3. По аналогии с замечанием 1 для каждого $j \in \overline{1,k}$ информационный образ $w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot))$ пары $(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot))$, определяемый согласно (4.5) и (4.6), можно найти непосредственно:

$$w^{(h)}(\tau_j, y_{\tau_j}(\cdot)) = x_0 + \Phi^{(h)}(\tau_j) y(\tau_j)$$
$$+ \int\limits_{\tau_j}^{\vartheta} \Phi^{(h)}(\tau) A(\tau) \sum_{i=[(\tau-\tau_j)/h]+1}^{[(\tau-t_0)/h]} k_i(\tau) y(\tau - ih)\, \mathrm{d}\tau + \sum_{i=[(\vartheta-\tau_j)/h]+1}^{N} k_i(\vartheta) y(\vartheta_i),$$

где $\Phi^{(h)}(\cdot)$ — функция из (3.9), $[t]$ — целая часть числа $t \geqslant 0$ и суммирование по убывающему индексу приравнивается к нулю.

5. Пример

Рассмотрим случай, когда показатель качества (1.1c) имеет вид

$$\gamma(u(\cdot)) = \mu\Big(K\big(x(\vartheta \mid u(\cdot)) - c\big)\Big), \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}, \tag{5.1}$$

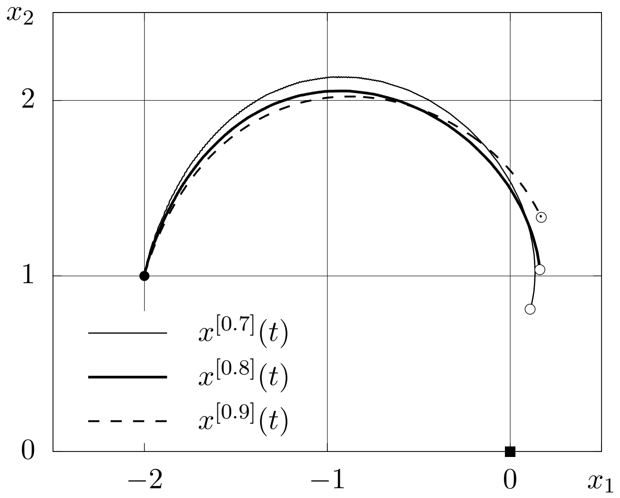
где $K \in \mathbb{R}^{d \times n}$, $d \in \overline{1,n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ и функция $\mu(s) \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^d$, является нормой. Тогда для величины оптимального результата $\rho_z^{(h)}$ и оптимальной позиционной стратегии управления $P_0^{(h)}$ в соответствующей редуцированной задаче (3.7) будут справедливы (см., например, [23] и библиографию к этой статье) репрезентативные формулы

$$\rho_z^{(h)} = \max_{l \in G} \big(\langle l, K x_0 \rangle + \psi^{(h)}(t_0, l)\big), \quad P_0^{(h)}(t, z, \varepsilon) \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \langle l_0^{(h)}(t, z, \varepsilon), K g^{(h)}(t, u) \rangle, \tag{5.2}$$

где $t \in [t_0, \vartheta]$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ и

$$l_0^{(h)}(t, z, \varepsilon) \in \operatorname*{argmax}_{l \in G} \Big(\langle l, K z \rangle + \psi^{(h)}(t, l) - \sqrt{\big(\varepsilon + (t - t_0)\varepsilon\big)(1 + \|l\|^2)}\Big),$$
$$\psi^{(h)}(t, l) = \int\limits_t^{\vartheta} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle l, K g^{(h)}(\tau, u) \rangle \, \mathrm{d}\tau - \langle l, K c \rangle, \quad G = \big\{ l \in \mathbb{R}^d : \max_{s \in \mathbb{R}^d :\, \mu(s) \leqslant 1} \langle l, s \rangle \leqslant 1 \big\}.$$

Применительно к исходной задаче об управлении системой дробного порядка (1.1a), (1.1b) на минимум показателя качества (5.1), формулы (5.2) в согласии с утверждениями 2 и 4 позволяют эффективно (см. замечания 1 и 3) вычислять величину оптимального результата ρ и строить ζ-оптимальные управления по принципу обратной связи.



Траектории движений $x^{[\alpha]}(\cdot)$ системы (5.3a), (5.3b) при действии процедуры управления с поводырем (4.4), (4.9) при различных порядках дифференцирования $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ и $\alpha = 0.9$.

Приведем результаты моделирования для задачи оптимального управления системой

$$\begin{cases} ({}^C D^\alpha x_1)(t) = 0.2\cos(\pi t)x_1(t) + x_2(t) + 0.5u_1(t) + 0.3\sin(\pi t), \\ ({}^C D^\alpha x_2)(t) = -2x_1(t) - 0.3x_2(t) + u_2(t), \end{cases} \tag{5.3a}$$

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2, \quad u_1^2(t) + u_2^2(t) \leqslant 1, \quad t \in [0, 1],$$

при начальном условии

$$x(0) = x_0 = (-2, 1) \tag{5.3b}$$

на минимум показателя качества

$$\gamma(u(\cdot)) = \sqrt{x_1^2(1 \mid u(\cdot)) + x_2^2(1 \mid u(\cdot))}, \quad u(\cdot) \in \mathcal{U}. \tag{5.3c}$$

Вычисления проводились для различных значений $\alpha = 0.7$, $\alpha = 0.8$ и $\alpha = 0.9$ при выборе параметра аппроксимации $h = 0.01$, параметра точности $\varepsilon = 0.01$ и равномерного разбиения Δ вида (4.1) с шагом $\delta = 0.002$. В каждом из случаев для формирования управления использовалась процедура управления с поводырем (4.4), (4.9). На рисунке выше изображены траектории соответствующих движений $x^{[\alpha]}(\cdot)$ системы (5.3a), (5.3b). Ниже приведены найденные значения $\rho^{[\alpha]}$ величины оптимального результата в задаче (5.3) и реализовавшиеся значения $\gamma^{[\alpha]}$ показателя качества (5.3c):

$$\rho^{[0.7]} \approx 0.751, \quad \gamma^{[0.7]} \approx \sqrt{(0.109)^2 + (0.811)^2} \approx 0.818,$$

$$\rho^{[0.8]} \approx 1.019, \quad \gamma^{[0.8]} \approx \sqrt{(0.162)^2 + (1.036)^2} \approx 1.049,$$

$$\rho^{[0.9]} \approx 1.333, \quad \gamma^{[0.9]} \approx \sqrt{(0.169)^2 + (1.334)^2} \approx 1.345.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
3. **Куржанский А.Б.** Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977. 392 с.

4. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр систем с последействием // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 2. С. 300–311.
5. **Красовский Н.Н., Котельникова А.Н.** Стохастический поводырь для объекта с последействием в позиционной дифференциальной игре // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 97–104.
6. **Gomoyunov M.I.** Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dyn. Games Appl. 2019. P. 1–27. doi: 10.1007/s13235-019-00320-4 .
7. **Сурков П.Г.** Задача динамического восстановления правой части системы дифференциальных уравнений нецелого порядка // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 6. С. 865–874. doi: 10.1134/S037406411906012 .
8. **Gomoyunov M.I.** Approximation of fractional order conflict-controlled systems // Progr. Fract. Differ. Appl. 2019. Vol 5, № 2. P. 143–155. doi: 10.18576/PFDA/050205 .
9. **Лукоянов Н.Ю., Решетова Т.Н.** Задачи конфликтного управления функциональными системами высокой размерности // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 4. С. 586–597.
10. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.** Оптимизация гарантии в функционально-дифференциальных системах с последействием по управлению // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76, вып. 4. С. 515–525.
11. **Idczak D., Walczak S.** On a linear-quadratic problem with Caputo derivative // Opuscula Math. 2016. Vol. 36, № 1. P. 49–68. doi: 10.7494/OpMath.2016.36.1.49 .
12. **Kamocki R., Majewski M.** Fractional linear control systems with Caputo derivative and their optimization // Optim. Control Appl. Meth. 2015. Vol. 36, № 6. P. 953–967. doi: 10.1002/oca.2150 .
13. **Кубышкин В.А., Постнов С.С.** Задача оптимального управления линейной стационарной системой дробного порядка в форме проблемы моментов: постановка и исследование // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.
14. **Kaczorek T.** Minimum energy control of fractional positive electrical circuits with bounded inputs // Circuits Syst. Signal Process. 2016. Vol. 35, iss. 6. P. 1815–1829. doi: 10.1007/s00034-015-0181-7 .
15. **Matychyn I., Onyshchenko V.** Optimal control of linear systems with fractional derivatives // Fract. Calc. Appl. Anal. 2018. Vol. 21, № 1. P. 134–150. doi: 10.1515/fca-2018-0009 .
16. **Diethelm K.** The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010. 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2 .
17. **Gomoyunov M.I.** Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Frac. Calc. Appl. Anal. 2018. Vol. 21, № 5. P. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066 .
18. **Красовский Н.Н.** Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика. 1964. Т. 28, вып. 4. С. 716–724.
19. **Репин Ю.М.** О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. математика и механика. 1965. Т. 29, вып. 2. С. 226–235.
20. **Куржанский А.Б.** К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 12. С. 2094–2107.
21. **Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R.** On approximations of time-delay control systems // IFAC-PapersOnLine. 2015. Vol. 48, iss. 25. P. 178–182. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.080 .
22. **Chávez J.P., Zhang Z., Liu Y.** A numerical approach for the bifurcation analysis of nonsmooth delay equations // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2020. Vol. 83. doi: 10.1016/j.cnsns.2019.105095 .
23. **Lukoyanov N.Yu., Gomoyunov M.I.** Differential games on minmax of the positional quality index // Dyn. Games Appl. 2019. Vol. 9, iss. 3. P. 780–799. doi: 10.1007/s13235-018-0281-7 .

Поступила 25.12.2019
После доработки 24.01.2020
Принята к публикации 27.01.2020

Гомоюнов Михаил Игоревич
канд. физ.-мат. наук
старший научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
доцент
Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН,
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: nyul@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
3. Kurzhanski A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* [Control and observation under conditions of uncertainty]. Moscow: Nauka Publ., 1977, 392 p.
4. Osipov Yu.S. On the theory of differential games of systems with aftereffect. *J. Appl. Math. Mech.*, 1971, vol. 35, no. 2, pp. 262–272. doi: 10.1016/0021-8928(71)90032-3 .
5. Krasovskii N.N., Kotelnikova A.N. Stochastic guide for a time-delay object in a positional differential game. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 277, suppl. 1, pp. 145–151. doi: 10.1134/S0081543812050148 .
6. Gomoyunov M.I. Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations. *Dyn. Games Appl.*, 2019, pp. 1–27. doi: 10.1007/s13235-019-00320-4 .
7. Surkov P.G. Dynamic right-hand side reconstruction problem for a system of fractional differential equations. *Diff. Equat.*, 2019, vol. 55, no. 6, pp. 849–858. doi: 10.1134/S0012266119060120 .
8. Gomoyunov M.I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems. *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2019, vol. 5, no. 2, pp. 143–155. doi: 10.18576/PFDA/050205 .
9. Lukoyanov N.Yu., Reshetova T.N. Problems of conflict control of high dimensionality functional systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 4, pp. 545–554. doi: 10.1016/S0021-8928(98)00071-9 .
10. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. Guarantee optimization in functional-differential systems with a control aftereffect. *J. Appl. Math. Mech.*, 2012, vol. 76, no. 4, pp. 369–377. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.09.002 .
11. Idczak D., Walczak S. On a linear-quadratic problem with Caputo derivative. *Opuscula Math.*, 2016, vol. 36, no. 1, pp. 49–68. doi: 10.7494/OpMath.2016.36.l.49 .
12. Kamocki R., Majewski M. Fractional linear control systems with Caputo derivative and their optimization. *Optim. Control Appl. Meth.*, 2015, vol. 36, no. 6, pp. 953–967. doi: 10.1002/oca.2150 .
13. Kubyshkin V.A., Postnov S.S. Optimal control problem for a linear stationary fractional order system in the form of a problem of moments: Problem setting and a study. *Autom. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 5, pp. 805–817. doi: 10.1134/S0005117914050014 .
14. Kaczorek T. Minimum energy control of fractional positive electrical circuits with bounded inputs. *Circuits Syst. Signal Process.*, 2016, vol. 35, no. 6, pp. 1815–1829. doi: 10.1007/s00034-015-0181-7 .
15. Matychyn I., Onyshchenko V. Optimal control of linear systems with fractional derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, no. 1, pp. 134–150. doi: 10.1515/fca-2018-0009 .
16. Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations.* Berlin: Springer, 2010, 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2 .
17. Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, no. 5, pp. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066 .
18. Krasovskii N.N. The approximation of a problem of analytic design of controls in a system with time-lag. *J. Appl. Math. Mech.*, 1964, vol. 28, no. 4, pp. 876–885. doi: 10.1016/0021-8928(64)90073-5 .

19. Repin Yu.M. On the approximate replacement of systems with lag by ordinary dynamical systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1965, vol. 29, no. 2, pp. 254–264. doi: 10.1016/0021-8928(65)90029-8 .
20. Kurzhanski A.B. On the approximation of linear differential equations with lag. *Differ. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 12, pp. 2094–2107 (in Russian).
21. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. On approximations of time-delay control systems. *IFAC-PapersOnLine*, 2015, vol. 48, no. 25, pp. 178–182. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.080 .
22. Chávez J.P., Zhang Z., Liu Y. A numerical approach for the bifurcation analysis of nonsmooth delay equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2020, vol. 83. doi: 10.1016/j.cnsns.2019.105095 .
23. Lukoyanov N.Yu., Gomoyunov M.I. Differential games on minmax of the positional quality index. *Dyn. Games Appl.*, 2019, vol. 9, no. 3, pp. 780–799. doi: 10.1007/s13235-018-0281-7 .

Received December 25, 2019
Revised January 24, 2020
Accepted January 27, 2020

Funding Agency: This work was supported by RSF (project no. 19-11-00105).

Mikhail Igorevich Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com .

Nikolai Yur'evich Lukoyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: nyul@imm.uran.ru .

Cite this article as: M. I. Gomoyunov, N. Yu. Lukoyanov. Construction of solutions to control problems for fractional-order linear systems based on approximation models, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 39–50 .