ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 1 2020

УДК 519.863

АНАЛИЗ ФИНАНСОВОГО СОСТОЯНИЯ ИНВЕСТОРА НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ КАНТОРА — ЛИПМАНА[1]

А. А. Шананин

Проблема восстановления экономического роста и выхода из режима стагнации российской экономики связана с преодолением институциональных ловушек. Одной из таких ловушек является большая разница между процентными ставками по кредитам и депозитам, которая является выражением несовершенства рынка капитала и препятствует объективной оценке инвестиционных проектов. В этих условиях оценка инвестиционного проекта оказывается зависящей от предпринимательской среды, в которой реализуется проект. В работе предлагается для описания предпринимательской (инвестиционной) среды воспользоваться моделью Кантора — Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала. В модели Кантора — Липмана инвестиционная среда описывается пулом стационарных, тиражируемых инвестиционных проектов. Построены дефляторы, с помощью которых оцениваются новые инвестиционные проекты и финансовое состояние инвестора. Обсуждаются асимптотические свойства дефляторов и с их помощью — проблемы экономического роста в России.

Ключевые слова: инвестиции, модель Кантора — Липмана, математическое моделирование экономики, NPV, IRR, двойственная задача, инвестиционный полином, задача линейного программирования.

A. A. Shananin. Analysis of the financial state of an investor based on the Cantor–Lippman model.

The problem of restoring the economic growth and overcoming the stagnation of the Russian economy is associated with escaping the institutional traps. One of these traps is the big difference between interest rates on loans and deposits, which expresses the imperfection of the capital market and prevents an objective assessment of investment projects. In these conditions, the assessment of an investment project becomes dependent on the business environment in which the project is implemented. We propose to use the Cantor–Lippman model of investment at an imperfect capital market to describe the entrepreneurial (investment) environment. In the Cantor–Lippman model, the investment environment is described by a pool of stationary, replicable investment projects. Deflators are built and used to evaluate new investment projects and the financial state of the investor. The asymptotic properties of the deflators and, with their help, the problems of economic growth in Russia are discussed.

Keywords: investments, Cantor–Lippman model, mathematical modeling of economics, NPV, IRR, dual problem, investment polynomial, linear programming.

MSC: 91B64, 90C90

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-293-306

Введение. Проблема восстановления роста экономики России

Процесс эволюции российской экономики за прошедшие три десятилетия можно разделить на три основных этапа: трансформационный спад (1990-1998 гг.), восстановительный рост (1998–2008 гг.), период стагнации (с 2008 по настоящее время). Первый этап (трансформационный спад) сопровождался либерализацией цен и утратой контроля государства над внешней торговлей. Одновременно происходило повышение эффективности экономики за счет вытеснения из технологических цепочек неэффективных производств и замещения соответствующих производственных факторов импортными аналогами, что упростило в целом структуру производства и привело к снижению мультипликатора в производстве с 2 до 1.3. В результате сформировались четыре комплекса отраслей, различающихся степенью участия в экспортно-импортных отношениях. Эти комплексы характеризуют структуру российской экономики и в

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 16-11-10246).

настоящее время. Первый комплекс — экспортно-ориентированные отрасли (нефтегазовая промышленность, металлургия, нефтехимия и т. п.). Вследствие конкурентоспособности производимой продукции данный комплекс успешно встроился в мировые экономические отношения, является донором российского бюджета и обеспечивает значительную часть валютных поступлений в страну. Второй комплекс — отрасли, продукция которых конкурирует на внутреннем рынке с импортными аналогами (обрабатывающая промышленность, машиностроение, легкая промышленность). Второй комплекс сформировался в советский период в условиях закрытой экономики и до сих пор для него характерен технологически отсталый уровень по сравнению с зарубежными конкурентами. В третий и четвертый комплексы входят инфраструктурные отрасли, предоставляющие в основном услуги. Эти комплексы не имеют экспортного потенциала и не конкурируют с импортом. Третий комплекс составляют естественные монополии — электроэнергетика, транспорт, связь. Четвертый комплекс — децентрализованные отрасли сферы услуг, для которых актуальна проблема теневых отношений (услуги ЖКХ, торговля и т. п.). Успешное развитие первого комплекса, который является капиталоемким, но не трудоемким, на фоне неэффективности и вытеснения импортом продукции второго сектора привело к расслоению населения по уровню доходов, снижению совокупного потребительского спроса и деградации человеческого капитала. На этапе восстановительного роста усилилась роль государственного управления через налоги и субсидии, но неоднородность экономики сохранилась. Взаимодействие секторов на макроуровне происходит через государственный бюджет, где первый сектор является донором и формирует доходную часть бюджета страны, а функционирование остальных поддерживается за счет госзаказов, финансируемых из бюджета. В восстановительный период начался процесс импортовытеснения и мультипликатор вырос до 1.8. Экономический подъем обеспечивался бюджетным финансированием перспективных направлений, имеющих высокую доходность. При этом на фоне роста капиталоемких производств сохранились технологическая многоукладность и стагнация трудоемких производств, что привело к дальнейшей деградации человеческого капитала, снижению стимулов к его развитию и дальнейшему расслоению общества по доходам и имуществу. На третьем этапе эволюции российской экономики, который начался в 2008 гг. и продолжается по настоящее время, произошло замедление темпа роста экономики. По данным Всемирного Банка, экономика России за период 2008–2016 гг. выросла на 3.6%, в то время как мировая экономика — на 20.3%. Такое состояние стагнации связано со снижением эффективности государственных инвестиций из-за высоких транзакционных издержек, вызванных неразвитостью инфраструктуры и недостаточным для восстановления роста объемом рыночных инвестиций. Причиной отсутствия рыночных инвестиций является институциональная ловушка, в которой оказалась отечественная экономика. Эта ловушка связана с несовершенством рынка капитала, которое выражается в значительной разнице процентных ставок по депозитам и кредитам. Монопольное положение системы российских коммерческих банков приводит к тому, что, имея значительные объемы свободных ликвидных средств, банки не вкладывают их в инвестиционные проекты в реальном секторе экономики. Необходимость выхода из режима стагнации побуждает государственные органы применять кейнсианские схемы восстановления роста и реализовывать крупные национальные проекты по реформированию российской экономики. Однако реализация таких проектов сопряжена с существенными рисками. Увеличение государственных расходов может привести к росту инфляции и неэффективности кейнсианских стимулов роста.

Например, схожий этап стагнации наблюдался в советской экономике периода “застоя”, который также требовал принятия новых управленческих решений для повышения эффективности производства. Экономическими последствиями не до конца просчитанной политики “ускорения” и перестройки второй половины 80-х годов, которая была направлена на повышение эффективности отечественной экономики, явились финансовая разбалансированность экономики и гиперинфляция. Поэтому одобрение вариантов программ экономического развития должно проходить на основе подробного анализа с учетом возможных косвенных последствий их реализации. В настоящее время существует методология такого анализа. С ее помощью анализировался опыт эволюции отечественной экономики в 1980–90-е гг. [1; 2]. Для использования этой методологии необходимо перевести на язык математических моделей ключевые проблемы современного этапа эволюции российской экономики. Настоящая работа является продолжением работы [3]. В ней на основе модели Кантора — Липмана построены дефляторы, с помощью которых оцениваются новые инвестиционные проекты и финансовое состояние инвестора, обсуждаются асимптотические свойства дефляторов и проблемы экономического роста в России.

1. Модель Кантора — Липмана инвестиций на несовершенном рынке капитала

Инвестиции в реальном секторе экономики являются ограниченно ликвидными, т. е. инвестиционный проект должен быть доведен до конца, в противном случае он неликвиден. При этом инвестиционная схема такого проекта (порядок получения и соотношение необходимых вложений и получаемых выплат) фиксирована. Эти ограничения на проекты необходимо учитывать при описании инвестиционной деятельности. Инвестиционный проект в реальном секторе экономики характеризуется распределенными по времени денежными потоками $\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, где a_i — величина денежного потока в i-й период времени от начала реализации проекта, $i = 1, \ldots, n$. Положительные значения a_i соответствуют доходам от реализации проекта, полученным в i-й период времени, а отрицательные значения — вложениям в инвестиционный проект. Для сравнения инвестиционных проектов нужно сопоставлять распределенные по времени денежные потоки. В теории корпоративных финансов в этих целях используется показатель приведенной чистой прибыли NPV (net present value). Если платежи (и любая другая финансовая деятельность) осуществляются через некоторые равные промежутки времени, то NPV проекта с вектором потоков платежей $\vec{a}$ вычисляется по формуле

$$NPV(\vec{a}, r) = a_0 + a_1 e^{-r} + \ldots + a_k e^{-rk}.$$

Здесь r — показатель доходности общедоступного для инвестора альтернативного способа вложения денег, который используется в расчете в качестве дефлятора, приводящего распределенные по времени денежные потоки к периоду начала инвестиционного проекта. Оценивая инвестиционный проект, коммерческие структуры руководствуются следующим принципом. Положительность показателя NPV означает, что проект следует поддержать, отрицательность — что проект нерентабелен с коммерческой точки зрения. Если компоненты у векторов потоков платежей $\vec{a}$ имеют разные знаки, то сравнение соответствующих им инвестиционных потоков по критерию NPV зависит от дефлятора r. Из этого естественным образом вытекает вопрос: какую величину нужно взять в качестве доходности альтернативного источника вложений? Очевидно, что величина дефлятора должна быть заключена между процентными ставками по депозитам и кредитам. Если разница между этими процентными ставками незначительна, то выбор дефлятора из этого интервала не влияет на принятие решения о поддержке основной массы инвестиционных проектов. Однако если эта разница значительна, как в современной российской экономике, то инвестиционный процесс происходит в условиях несовершенного рынка капитала. Наблюдающееся в экономиках догоняющего типа значительное превышение процентных ставок по кредитам над процентными ставками по депозитам приводит к тому, что рентабельность проекта оказывается критически зависящей от дефляторов денежных потоков. Эти дефляторы, с одной стороны, отражают экономическую инфраструктуру, а с другой — индивидуализированы и зависят от предпринимательских качеств инвестора.

В работе рассматривается вопрос о переводе проблемы оценки рентабельности инвестиционного проекта в условиях несовершенного рынка капитала на язык математических моделей. Для изучения экономической среды, в которой реализуется инвестиционный проект, предложено использовать модель Кантора — Липмана. Она позволяет оценить доходность пула доступных инвестору тиражируемых инвестиционных проектов, моделирующих экономическую среду, в которой будет реализовываться анализируемый инвестиционный проект (см. подробнее [4–11]). Предположим, что для инвестора в любой период времени в любом объеме доступны M типов инвестиционных проектов. Проект m-го типа задается вектором финансовых потоков $\vec{a}^m = (a_0^m, a_1^m, \ldots, a_n^m)$. Здесь $n+1$ — наибольшая продолжительность среди всех проектов[2], а $m = 1, \ldots, M$. Для того чтобы эти проекты можно было считать общедоступным альтернативным источником вложений, они должны быть стационарными (доступными в неизменном виде в любой момент времени) и тиражируемыми. Проект называется тиражируемым, если он может быть начат в любой период времени с произвольной интенсивностью $u \geqslant 0$ (вектор финансовых потоков такого проекта будет выглядеть как $u\vec{a} = (ua_0, ua_1, \ldots, ua_k)$). Если проект начат с интенсивностью $u = 0$, то вектор его финансовых потоков нулевой, т. е. на деле проект не используется. Будем предполагать, что среди них имеется проект сохранения денег, который задается вектором $(-1, 1, 0, \ldots, 0)$. Проект депонирования денег на один период времени под процентную ставку r_d описывается вектором финансовых потоков $(-1, 1 + r_d, 0, \ldots, 0)$, а проект заимствования денег на один период времени под процентную ставку r_k — вектором $(1, -1 - r_k, 0, \ldots, 0)$.

Целью инвестора в модели Кантора — Липмана предполагается максимизация дохода к периоду времени T, в который вся инвестиционная деятельность должна быть завершена. Возможности инвестора в период времени t характеризуются остатком его расчетного счета $s_0(t)$, который изменяется в процессе реализации инвестиционной стратегии

$$\{u_m(t) \,|\, m = 1, \ldots, M;\ t = 0, \ldots, T - n\}.$$

Здесь $u_m(t)$ — интенсивность проекта m-го типа, начатого в период времени t. Динамика остатков расчетного счета описывается уравнением

$$s_0(t+1) = s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=0}^{n} a_k^m u_m(t-k).$$

Возможности инвестора входят в доступный ему пул проектов; иными словами, должно выполняться условие самофинансирования:

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, t = 1, \ldots, T.$$

Обозначим через $s_k(t)$ финансовое состояние инвестора в период $t+k$ при условии, что начиная с периода t используется только проект сохранения денег. Тогда вектор

$$\vec{S}(t) = (s_0(t), \ldots, s_{n-1}(t))$$

описывает результат финансовой стратегии инвестора. Обозначим через $u_m(t)$ интенсивность проектов m-го типа, начатых в период времени t. Тогда $\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t)$. Здесь $\vec{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ — вектор интенсивностей инвестиционных проектов, начатых в период времени t, $D = (d_{ij})_{i,j=0,\ldots,n}$ — матрица $n \times n$ такая, что

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1, \ \text{если } j = i+1,\ i = 0, \ldots, n-2; \\ 1, \ \text{если } i = j = n-1; \\ 0 \ \ \text{иначе}, \end{cases}$$

$B = (b_{im})_{i=1,\ldots,n}^{m=1,\ldots,M}$ — матрица $n \times M$ такая, что $b_{im} = \sum_{j=0}^{i} a_j^m$.

[2]Если какой-то проект длится меньше, чем n периодов времени, то дополним соответствующий вектор нулями.

Целью инвестиционной стратегии является максимизация дохода в период времени не позднее T, т. е. оптимальная стратегия инвестиций определяется из решения задачи:

$$e^{-r\tau}h\left(\vec{S}(\tau-n+1)\right)\to\max_{0\leqslant\tau\leqslant T} \tag{1}$$

$$\vec{S}(t+1)=D\vec{S}(t)+B\vec{u}(t),\quad t=0,\dots,\tau-n; \tag{2}$$

$$s_0(t)+\sum_{m=1}^{M}a_0^m u_m(t)\geqslant 0,\quad t=0,\dots,\tau-n; \tag{3}$$

$$\vec{u}(t)\geqslant 0,\quad t=0,\dots,\tau-n; \tag{4}$$

$$\vec{S}(0)=\vec{\xi}, \tag{5}$$

где $h(\vec{S})=\begin{cases} s_{n-1}, \text{ если } \vec{S}=(s_0,\dots,s_{n-1})\in\mathbb{R}^n_+;\\ -\infty \text{ иначе.}\end{cases}$

Обозначим через $W_T(\vec{\xi},r)$ оптимальное значение функционала в задаче оптимизации (1)–(5). Функция $W_T(\vec{\xi},r)$ оценивает начальное финансовое состояние инвестора при дефляторе r. Отметим, что построить функцию $W_T(\vec{\xi},r)$ можно, итерируя оператор Беллмана:

$$W_{T+1}(\vec{\xi},r)=\max\left\{W_T(\vec{\xi},r),e^{-r}\sup\left\{W_T(D\vec{\xi}+B\vec{u})\,Big|\,\vec{u}\geqslant 0,\xi_0+\sum_{m=1}^{M}a_0^m u_m\geqslant 0\right\}\right\},$$

$$W_0(\vec{\xi},r)=h(\vec{\xi}).$$

Множество $L_T=\left\{\vec{\xi}\,\middle|\,W_T(\vec{\xi},r)>0\right\}$ не зависит от значения дефлятора $r>0$ и является выпуклым конусом. Заметим, что $L_T\subseteq L_{T+1}$ при $T=0,1,\dots$ Выпуклый конус $L_\infty=\bigcup_{T=0}^{+\infty}L_T$ будем называть *конусом ликвидных состояний.*

Инвестиционная функция пула проектов определяется на промежутке $[0,+\infty)$ по формуле

$$F(r)=\max_{1\leqslant m\leqslant M}\sum_{j=0}^{n}a_j^m e^{-rj}.$$

Будем предполагать, что выполнены условия прибыльности пула инвестиционных проектов и отсутствия арбитража. То есть что $F(0)>0$ и существует $\tilde{r}>0$ такое, что $F(\tilde{r})<0$ (см. подробнее [5; 6]). Тогда инвестиционная функция $F(r)$ имеет положительные корни.

Теорема 1 (см. [3, теорема 2]). *Пусть ρ — наименьший корень инвестиционной функции $F(r)$. Тогда при любых значениях $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n_+$, $r>0$ существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{T\to+\infty}W_T(\vec{\xi},r)=W_\infty(\vec{\xi},r)$$

и выполнены следующие предположения:

1. *Если $r<\rho$, то $W_\infty(\vec{\xi},r)=+\infty$ при $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$;*
2. *Если $r>\rho$, то $W_\infty(\vec{\xi},r)=0$ при $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n_+$;*
3. *Если $0<W_\infty(\vec{\xi},r)<+\infty$ при $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$, то $r=\rho$.*

2. Оценка новых инвестиционных проектов

Рассмотрим уникальный пакет проектов, который может начаться в период времени τ, где $0\leqslant\tau\leqslant T-n$. Пусть пакет состоит из K инвестиционных проектов, которые описываются вектором финансовых потоков $\vec{\alpha}^k=\left(\alpha_0^k,\dots,\alpha_n^k\right)$, где $k=1,\dots,K$, и могут осуществляться с интенсивностью v_k, где $0\leqslant v_k\leqslant 1$, $k=1,\dots,K$. Будем считать, что целью инвестора является максимизация дохода от инвестиций к периоду времени T. Будем описывать предпринимательскую среду с помощью задачи оптимизации (1)–(5). Предположим, что в период времени τ возможности инвестора расширяются. Опишем расширение возможностей с помощью следующей задачи оптимизации:

$$e^{-\rho T} h(\vec{S}(T-n+1)) \to \max; \tag{6}$$
$$\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), t \in \{0, \ldots, \tau-1, \tau+1, \ldots, T-n\}; \tag{7}$$
$$\vec{S}(\tau+1) = D\vec{S}(\tau) + B\vec{u}(\tau) + \sum_{k=1}^{K} v_k(\tau)\vec{\beta}^k; \tag{8}$$
$$s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, t \in \{0, \ldots, \tau-1, \tau+1, \ldots, T-n\}; \tag{9}$$
$$s_0(\tau) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(\tau) + \sum_{k=1}^{K} \alpha_0^k v_k(\tau) \geqslant 0; \tag{10}$$
$$\vec{u}(t) \geqslant 0, t = 0, \ldots, T-n; \tag{11}$$
$$0 \leqslant v_k(\tau) \leqslant 1, k = 1, \ldots, K; \tag{12}$$
$$\vec{S}(0) = \vec{\xi}. \tag{13}$$

Здесь $\vec{\beta}^k = \left(\beta_1^k, \ldots, \beta_n^k\right)$, где $\beta_j^k = \sum_{i=0}^{j} \alpha_i^k$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, K$. Оптимальное значение функционала в задаче (6)–(13) не меньше, чем в задаче (1)–(5). Если оптимальное значение функционала в задаче (6)–(13) равно оптимальному значению функционала в задаче (1)–(5), то будем называть пакет новых инвестиционных проектов неэффективным.

Предложение 1. *Предположим, что начальное финансовое состояние инвестора ликвидно к периоду времени T, т. е. $\vec{\xi} \in L_t$. Тогда следующая двойственная задача к задаче* (1)–(5):

$$\sum_{j=0}^{n-2} (p(j) - p(j+1))\xi_j + p(n-1)\xi_{n-1} \to \min; \tag{14}$$
$$\sum_{j=0}^{n} a_j^m p(t+j) \leqslant 0, \quad m = 1, \ldots, M, \quad t = 0, \ldots, T-n; \tag{15}$$
$$p(t+1) \leqslant p(t), \quad t = 0, \ldots, T-1; \tag{16}$$
$$p(T) \geqslant e^{-\rho T} \tag{17}$$

— имеет решение, и оптимальные значения функционалов в задачах (1)–(5) *и* (14)–(17) *равны.*

Доказательство. Обозначим $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. С помощью теоремы Фенхеля (см. [12, с. 46]) построим двойственную задачу к задаче выпуклого программирования (1)–(5). Для этого представим задачу (1)–(5) в эквивалентном виде:

$$\inf_{\vec{s}} \left(f(\vec{s}) + \delta_A(\vec{s}) \right),$$

где $f(\vec{s}) = -e^{-\rho T} h(\vec{s})$, а $\delta_A(\vec{s})$ — индикаторная функция множества

$$A = \Big\{ \vec{S}(T-n+1) \,|\, \exists (\vec{S}(1), \ldots, \vec{S}(T-n+1)), (\vec{u}(0), \ldots, \vec{u}(T-n)),$$
$$\text{удовлетворяющие (2)–(5), где } \tau = T \Big\}.$$

Вычисляя сопряженную к $f(\vec{s})$ функцию, получаем, что

$$f^*(-\vec{\lambda}) = \lim_{\vec{s}\geqslant 0}\Big(e^{-\rho T}s_{n-1} - \big(\vec{\lambda}\vec{s}\big)\Big) = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{\lambda}\in\mathbb{R}^n_+, \quad \lambda_{n-1}\geqslant e^{-\rho T};\\ +\infty & \text{иначе.}\end{cases} \tag{18}$$

Здесь $\vec{s} = (s_0,\dots,s_{n-1})$, $\vec{\lambda} = (\lambda_0,\dots,\lambda_{n-1})$, $\big(\vec{\lambda}\vec{s}\big)$ — скалярное произведение векторов $\vec{\lambda}$ и $\vec{s}$. Сопряженная функция к функции $\delta_A(\vec{s})$ является опорной функцией множества A, и ее значения совпадают со значениями функционала в задаче линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&(\vec{\lambda},\vec{S}(T-n+1))\to\max;\\
&\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), \quad t=0,\dots,T-n;\\
&s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t)\geqslant 0, \quad t=0,\dots,T-n;\\
&\vec{u}(t)\geqslant 0, \quad t=0,\dots,T-n;\\
&\vec{S}(0) = \vec{\xi}.
\end{aligned}$$

Обозначим $\vec{\gamma} = \big(a_0^1,\dots,a_0^m\big)$. Составим функцию Лагранжа для этой задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&L\Big(\vec{S}(1),\dots,\vec{S}(T-n+1),\vec{u}(0),\dots,\vec{u}(T-n),\vec{q}(0),\dots,\vec{q}(T-n),r(0),\dots,r(T-n)\Big)\\
&= \vec{\lambda}\vec{S}(T-n+1) + \vec{q}(0)\big(D\vec{\xi} + B\vec{u}(t) - \vec{S}(1)\big) + \sum_{t=1}^{T-n}\vec{q}(t)\big(D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t) - \vec{S}(t+1)\big)\\
&+ r(0)\Big(\xi_0 + \sum_{m=1}^{M}u_m(0)a_0^m\Big) + \sum_{t=1}^{T-n}r(t)\Big(s_0(t) + \sum_{m=1}^{M}u_m(t)a_0^m\Big) = \big(D^*\vec{q}(0),\vec{\xi}\big) + r(0)\xi_0\\
&+ \sum_{t=1}^{T-n}\vec{S}(t)\big(D^*\vec{q}(t) - \vec{q}(t-1) + r(t)\vec{e}_0\big) + \vec{S}(T-n+1)(\vec{\lambda} - \vec{q}(T-n)) + \sum_{t=0}^{T-n}\vec{u}(t)\big(B^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{\gamma}\big).
\end{aligned}$$

Выразим опорную функцию множества A с помощью двойственной задачи:

$$\big(D^*\vec{q}(0),\vec{\xi}\big) + r(0)\xi_0\to\min; \tag{19}$$
$$\vec{q}(t-1) = D^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{e}_0, \quad t=1,\dots,T-n; \tag{20}$$
$$B^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{\gamma}\leqslant 0, \quad t=0,\dots,T-n; \tag{21}$$
$$\vec{q}(T-n) = \vec{\lambda}; \tag{22}$$
$$r(t)\geqslant 0, \quad t=0,\dots,T-n. \tag{23}$$

Из уравнения (20) следует, что

$$q_0(t-1) = r(t), q_1(t-1) = q_0(t),\dots,q_{n-2}(t-1) = q_{n-3}(t), q_{n-1}(t-1) = q_{n-2}(t) + q_{n-1}(t). \tag{24}$$

Из (24) имеем, что $r(t) = (\vec{q}(t-1),\vec{e}_0)$. Двойственной к задаче (1)–(5) является задача $\inf(f^*(-\vec{\lambda}) + \delta^*_A(\vec{\lambda}))$. Подставляя в нее выражение (18) для сопряженной функции $f^*(-\vec{\lambda})$ и представление (19)–(23) опорной функции множества A, получаем задачу линейного программирования:

$$\begin{aligned}
&\big(D^*\vec{q}(0),\vec{\xi}\big) + r(0)\xi_0\to\min;\\
&\vec{q}(t-1) = D^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{e}_0, \quad t=1,\dots,T-m;\\
&B^*\vec{q}(t) + r(t)\vec{\gamma}\leqslant 0, \quad t=0,\dots,T-n;\\
&\vec{q}(T-n)\geqslant 0; \quad (\vec{q}(T-n),\vec{e}_n)\geqslant e^{-\rho T};\\
&r(t)\geqslant 0, \quad t=0,\dots,T-n.
\end{aligned}$$

Введем новые переменные:

$$p(T-n+i+1)=\sum_{j=i}^{n-1}q_j(T-n), i=0,\dots,n-1;$$

$$p(t+1)=\sum_{j=0}^{n-1}q_j(t), t=0,\dots,T-n-1;$$

$$p(0)=r(0)+p(1).$$

Из (20) следует, что

$$p(t)=\sum_{j=0}^{n-1}q_j(t-1)=r(t)+\sum_{j=1}^{n-2}q_j(t-1)+q_{n-1}(t)+q_{n-2}(t)=r(t)+\sum_{j=0}^{n-1}q_j(t)=r(t)+p(t+1),$$

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n}b_j^m q_{j-1}(t)+r(t)a_0^m\\
&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j}a_i^m q_{j-1}(t)+r(t)a_0^m=a_0^m\Big(r(t)+\sum_{j=0}^{n-1}q_j(t)\Big)+\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i^m\sum_{j=1-1}^{n-1}q_j(t)\Big)\\
&=a_0^m(r(t)+p(t+1))+\sum_{i=1}^{n}a_i^m\Big(q_{n-2}(t+1)+q_{n-1}(t+1)+\sum_{j=0}^{n-i-1}q_j(t+i-1)\Big)\\
&=a_0^m p(t)+\sum_{i=1}^{n}a_i^m\Big(q_{n-i}(t+i-1)+\sum_{j=1}^{i-1}q_{n-2}(t+1+j)+q_{n-1}(t+i)+\sum_{j=0}^{n-i-1}q_j(t+i-1)\Big)\\
&=a_0^m p(t)+\sum_{i=1}^{n}a_i^m\Big(q_{n-1}(t+i)+q_{n-2}(t+i)+\Big(\sum_{j=1}^{i-2}q_{n-i+j}(t+i-1)\Big)+\sum_{j=0}^{n-i}q_j(t+i-1)\Big)\\
&=\sum_{i=0}^{n}a_i^m p(t+i),\quad t=0,\dots,T-n.\end{aligned}$$

Поскольку

$$q_{n-1}(0)=p(1)-\sum_{j=0}^{n-2}q_j(0)=p(1)-\sum_{j=0}^{n-2}q_0(j)=p(1)-\sum_{j=1}^{n-1}r(j)=p(1)-\sum_{j=1}^{n-1}(p(j)-p(j+1))=p(n),$$

получаем, что

$$\begin{aligned}\big(D^*\vec q(0),\vec\xi\,\big)+r(0)\xi_0&=r(0)\xi_0+\sum_{j=0}^{n-2}q_j(0)\xi_{j+1}+q_{n-1}(0)\xi_{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}r(i)\xi_i+q_{n-1}(0)\xi_{n-1}\\
&=\sum_{i=0}^{n-1}(p(i)-p(i-1))\xi_i+p(n)\xi_{n-1}=\sum_{i=0}^{n-2}(p(i)-p(i-1))\xi_i+p(n-1)\xi_{n-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, для ликвидных к периоду времени T финансовых состояний инвестора $\vec\xi$ задача линейного программирования (14)–(17) является двойственной к задаче (1)–(5). Утверждение предложения 1 следует из теоремы двойственности Фенхеля (см. [12, с. 46]).

Теорема 2. *Предположим, что начальное финансовое состояние инвестора ликвидное к периоду времени* T*, т. е.* $\vec{\xi} \in L_t$*. Для того чтобы пакет новых инвестиционных проектов* $\{\vec{\alpha}^k \,|\, k = 1, \ldots, K\}$ *был неэффективен в период времени* τ*, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение задачи линейного программирования* (14)–(17) *такое, что выполняются неравенства*

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j^k p(\tau + j) \leqslant 0, \quad k = 1, \ldots, K. \tag{25}$$

Доказательство. Двойственная задача к задаче оптимизации (6)–(13) имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n-2} (p(j) - p(j+1))\xi_j + p(n-1)\xi_{n-1} + \sum_{k=1}^{K} \theta_k \to \min; \tag{26}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^m p(t + j) \leqslant 0, \quad m = 1, \ldots, M, \quad t = 0, \ldots, T - n; \tag{27}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j^k p(\tau + j) - \theta_k \leqslant 0, \quad \theta_k \geqslant 0, \quad k = 1, \ldots, K; \tag{28}$$

$$p(t+1) \leqslant p(t), \quad t = 0, \ldots, T - 1; \tag{29}$$

$$p(T) \geqslant e^{-\rho T}. \tag{30}$$

По теореме двойственности оптимальные значения функционалов в задаче (6)–(13) и задаче (26)–(30) равны. Поэтому оптимальное значение функционала в задаче (26)–(30) не меньше, чем оптимальное значение функционала в задаче (14)–(17). Подчеркнем также, что ограничения (15)–(17) совпадают с ограничениями (27),(29),(30).

Если решение задачи (14)–(17) удовлетворяет неравенствам (25), то, доопределяя $\theta_k = 0$, $k = 1, \ldots, K$, получаем решение задачи (26)–(30). При этом оптимальное значение функционала в задаче (26)–(30) равно оптимальному значению функционала в задаче (14)–(17). Следовательно, по теореме двойственности равны оптимальные значения функционалов в задаче (1)–(5) и задаче (6)–(13), т. е. пакет новых инвестиционных проектов неэффективен.

Если пакет новых инвестиционных проектов неэффективен, оптимальные значения функционалов в задаче (1)–(5) и задаче (6)–(13) равны. Тогда по теореме двойственности оптимальное значение функционала в задаче (26)–(30) равно оптимальному значению функционала в задаче (14)–(17). Если при этом на решении задачи (26)–(30) $\sum_{k=1}^{K} \theta_k > 0$, то на этом решении

$$\sum_{j=0}^{n-2} (p(j) - p(j+1))\xi_j + p(n-1)\xi_{n-1}$$

меньше оптимального значения функционала в задаче (14)–(17), что противоречит оптимальности решения задачи (14)–(17). Значит, $\sum_{k=1}^{K} \theta_k = 0$, откуда следует, что $\theta_k = 0$, $k = 1, \ldots, K$, а переменные $\{p(t) | t = 0, \ldots, T\}$ из решения задачи (26)–(30) образуют решение задачи (14)–(17) и удовлетворяют неравенствам (25).

Теорема 2 доказана.

Предложение 1 и теорема 2 утверждают, что при оценке финансового состояния инвестора и оценке эффективности новых проектов в качестве дефляторов финансовых потоков следует использовать соответствующие компоненты решения $\{p(t) | t = 0, \ldots, T\}$ задачи линейного программирования (14)–(17). Подчеркнем, что в задаче (14)–(17) не используется какая-либо информация о новых инвестиционных проектах. Таким образом, дефляторы определяются независимо от информации о пуле новых инвестиционных проектов. Из теоремы 2 следует, что если задача линейного программирования (14)–(17) имеет неединственное решение, то неэффективные по отдельности инвестиционные проекты могут образовывать эффективный пул. Это наблюдение позволяет выразить на языке математических моделей содержание предпринимательской деятельности.

Обозначим через $V_T(\vec{\xi})$ функцию Беллмана для задачи (1)–(5). Функция $V_T(\vec{\xi})$ является вогнутой, положительно однородной функцией, принимающей положительные значения внутри конуса L_T, и удовлетворяет уравнению Беллмана

$$V_{T+1}(\vec{\xi}) = e^{-\rho}\sup\Big\{V_T(D\vec{\xi}+B\vec{u})\,\Big|\,\vec{u}\geqslant 0, \xi_0+\sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m \geqslant 0\Big\}, \quad V_0(\vec{\xi}) = h(\vec{\xi}). \tag{31}$$

Решая на каждом шаге экстремальную задачу (31), можно построить синтез оптимального управления $\vec{u}_T(\vec{\xi})$ и вычислить функцию Беллмана на следующем шаге:

$$V_{T+1}(\vec{\xi}) = e^{-\rho}V_T\big(D\vec{\xi}+B\vec{u}_T(\vec{\xi})\big).$$

Синтез оптимального управления позволяет построить динамическую траекторию финансовых состояний $\vec{S}_{t+1} = D\vec{S}_t + B\vec{u}_{T-t}\big(\vec{S}_t\big)$, $\vec{S}_0 = \vec{\xi}$, $t = 0,\dots,T-1$.

Из (14)–(17) следует, что дефляторы $(p(0)-p(1),\dots,p(n-2)-p(n-1),p(n-1)) \in \partial V_t(\vec{\xi})$.

Предложение 2. *Пусть* $\{\hat{\vec{S}}(t)\,|\,t=0,\dots,T-n+1\}$, $\{\hat{\vec{u}}(t)\,|\,t=0,\dots,T-n\}$ *— решение задачи* (1)–(5), *а* $\{\hat{p}(t)\,|\,t=0,\dots,T\}$ *— решение задачи* (14)–(17). *Тогда*

$$\big(\hat{p}(t)-p(t+1),\dots,\hat{p}(t+n-2)-\hat{p}(t+n-1),\hat{p}(t+n-1)\big) \in e^{-\rho t}\partial V_{T-t}(\hat{\vec{S}}(t)), \quad t=0,\dots,T-n+1. \tag{32}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем $0\leqslant\tau\leqslant T-n$. Пусть $\hat{\vec{S}}(\tau) = (\hat{s}_0(\tau),\dots,\hat{s}_{n-1}(\tau))$. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$e^{-\rho T}h(\vec{S}(T-n+1)) \to \max; \tag{$1'$}$$

$$\vec{S}(t+1) = D\vec{S}(t) + B\vec{u}(t), \quad t=\tau,\dots,T-n; \tag{$2'$}$$

$$s_0(t) + \sum_{m=1}^{M} a_0^m u_m(t) \geqslant 0, \quad t=\tau,\dots,T-n; \tag{$3'$}$$

$$\vec{u}(t)\geqslant 0, \quad t=\tau,\dots,T-n; \tag{$4'$}$$

$$\vec{S}(\tau) = \hat{\vec{S}}(\tau). \tag{$5'$}$$

Учитывая специфику функционала ($1'$), задачу ($1'$)–($5'$) можно преобразовать в задачу линейного программирования, двойственная задача к которой имеет вид

$$\sum_{j=0}^{n-2}(p(\tau+j)-p(\tau+j+1))\hat{s}_j(\tau) + p(\tau+n-1)\hat{s}_{n-1} \to \min \tag{$14'$}$$

$$\sum_{j=0}^{n} a_j^m p(t+j) \leqslant 0, \quad m=1,\dots,M, \quad t=\tau,\dots,T-n; \tag{$15'$}$$

$$p(t+1)\leqslant p(t), \quad t=\tau,\dots,T-1; \tag{$16'$}$$

$$p(T)\geqslant e^{-\rho T}. \tag{$17'$}$$

Решения $\big\{\hat{\vec{S}}(t)\,|\,t=0,\dots,T-n+1\big\}$, $\big\{\hat{\vec{u}}(t)\,|\,t=0,\dots,T-n\big\}$, $\big\{\hat{p}(t)\,|\,t=0,\dots,T\big\}$ удовлетворяют ограничениям (1)–(5), (14)–(17) и соответствующим условиям дополняющей нежесткости. Ограничения ($2'$)–($5'$), ($15'$)–($17'$) и соответствующие им условия дополняющей нежесткости содержатся среди ограничений (2)–(5), (15)–(17) и соответствующих им условий дополняющей нежесткости. Поэтому набор $\{\hat{\vec{S}}(t)|t=0,\dots,T-n+1\}$, $\{\hat{\vec{u}}(t)|t=0,\dots,T-n\}$ является решением задачи ($1'$)–($5'$), а набор $\{\hat{p}(t)|t=0,\dots,T\}$ — решением задачи ($14'$)–($17'$). В силу принципа Беллмана $V_t(\vec{\xi}) = e^{-\rho\tau}V_{T-\tau}(\hat{\vec{S}}(\tau))$, откуда следует (32).

Предложение 2 доказано.

Заключение

Отметим, что магистральные свойства оптимальных решений задач (1)–(5) и (14)–(17) (см. подробнее [3]) оправдывают использование в качестве дефлятора при оценке финансового состояния и вычислении NPV новых инвестиционных проектов $e^{-\rho}$, где ρ — минимальный положительный корень инвестиционной функции $F(r) = \max_{1\leqslant m\leqslant M} \sum_{j=0}^{n} a_j^m e^{-rj}$ пула тиражируемых инвестиционных проектов $\vec{a}^m = (a_0^m, a_1^m, \ldots, a_n^m)$, $m = 1, \ldots, M$, описывающих предпринимательскую среду.

Воспользуемся описанием предпринимательской среды с помощью модели Кантора — Липмана для анализа проблем модернизации российской экономики и восстановления экономического роста. В модернизации нуждаются, прежде всего, трудоемкие отрасли отечественной экономики. В период 1999–2007 гг. восстановление экономического роста в этом комплексе отраслей позволило повысить их способность конкурировать с импортом, стимулировало развитие человеческого капитала и увеличило потребительский спрос. Проиллюстрируем изменения экономических условий, которые привели к стагнации, с помощью рисунков. В верхней части рис. 1 сплошной линией изображена инвестиционная функция $F(r)$ комплекса трудоемких отраслей. Эта функция имеет три корня: $r_1 < r_2 < r_3$. В период восстановительного роста за счет поддержки государственного бюджета реализовывались высокодоходные инфраструктурные проекты. Инвестиционная функция этих проектов, изображенная в нижней части рис. 1, имеет корень r_0, который превышает r_3. Условием поддержки проекта за счет государственного бюджета являлось привлечение софинансирования. Софинансирование предоставлялось коммерческими структурами в форме кредитов под процент r_k. Чтобы заемщик кредита расплатился с долгами по кредиту, доходность проекта r_0 должна превышать процент по кредитам r_k. Источником денежных средств у коммерческих структур являлось аккумулирование сбережений населения и свободных денежных средств в трудоемком комплексе отраслей под процент r_d. Чтобы коммерческие структуры имели прибыль, процент по депозитам r_d должен быть меньше процента по кредитам r_k. Таким образом, в пул доступных инвесторам в трудоемком комплексе отраслей добавился депозитный проект. Если $r_d > r_2$, то депозитный проект позволяет инвесторам размещать свободные денежные средства под процент r_d. В верхней части рис. 1 изображена пунктиром.инвестиционная функция депозитного проекта в случае, когда $r_d > r_2$.

Именно этот случай реализовался на этапе восстановительного роста 1999–2007 гг. Отметим, что поточечный максимум двух инвестиционных функций имеет минимальный положительный корень r_3. Высокие темпы роста, соответствующие доходности r_3, вызвали увеличение

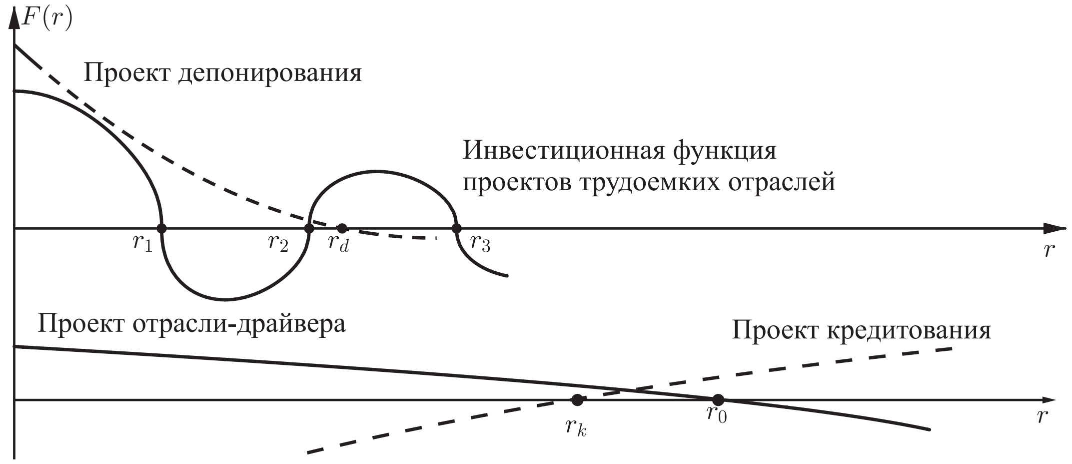

Рис. 1. Режим экономического роста

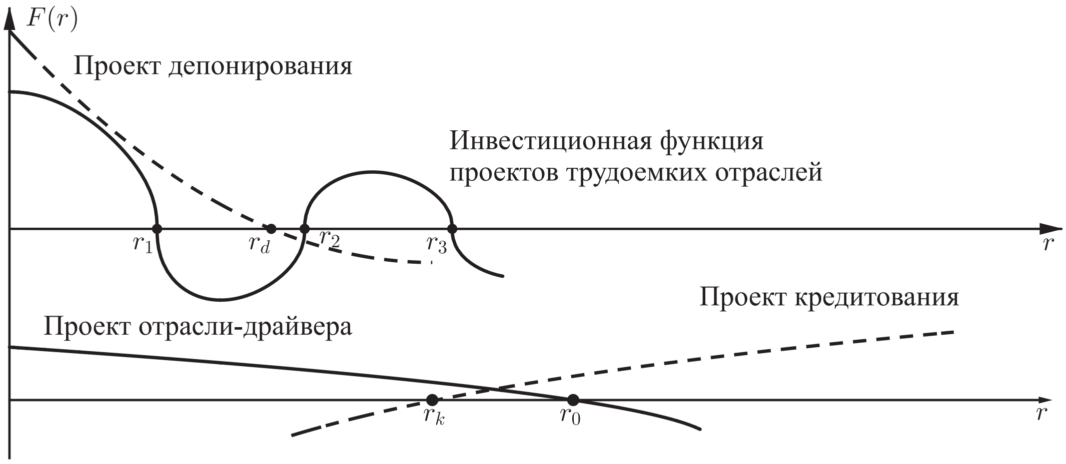

Рис. 2. Режим стагнации

спроса на услуги инфраструктурных отраслей, которое привело к увеличению транзакционных издержек и снижению доходности проектов с поддержкой государственного бюджета r_0. Уменьшение r_0 индуцирует снижение процентных ставок r_k и r_d, поскольку между ними должно выполняться соотношение $r_0 > r_k > r_d$. Когда процент по депозитам r_d стал меньше, чем r_2, экономические условия у инвесторов в трудоемком комплексе отраслей изменились. Эти изменения отражены на рис. 2. Доходность их инвестиций снизилась до значения r_1. Депозитный проект под процент r_d стал для них конкурировать с инвестициями в трудоемком комплексе отраслей. В результате экономика оказалась в режиме стагнации, в котором коммерческие банки имеют значительные ликвидные средства. Лишь незначительная часть этих средств инвестируется в реальный сектор экономики. Кейнсианская стратегия восстановления экономического роста рекомендует в этой ситуации направить средства государственного бюджета на повышение доходности r_0 проектов с государственной поддержкой в расчете, что вслед за этим увеличатся процентные ставки r_k и r_d, а режим стагнации, проиллюстрированный на рис. 2, сменится восстановлением экономического роста на рис. 1. По-видимому, такая стратегия выбрана российским руководством, выделяющим значительные средства на реализацию национальных проектов. Этот сценарий восстановления экономического роста предполагает детальный анализ на языке математических моделей, позволяющий учесть влияние монопольного положения коммерческих банков, которых устраивает их сложившееся комфортное положение в условиях большой разницы между процентными ставками по кредитам и депозитам и у которых имеются значительные свободные ликвидные средства, чтобы не увеличивать процентную ставку r_d.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.** Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996. 544 с.
2. **Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А.** От госплана к неэффективному рынку: математический анализ эволюции российских экономических структур. UK: The Edwin Mellen Press, 1999. 392 с.
3. **Шананин А.А.** Математическое моделирование инвестиций на несовершенном рынке капитала. // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 4. С. 265–274. doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-265-274.
4. **Cantor D.G., Lipman S.A.** Investment selection with imperfect capital markets // Econometrica. 1983. Vol. 51, no. 4. P. 1121–1144. doi: 10.2307/1912055.
5. **Cantor D.G., Lipman S.A.** Optimal Investment Selection with a Multitude of Projects // Econometrica. 1995. Vol. 63, no. 5. P. 1231–1240. doi: 10.2307/2171729.

6. **Adler L., Gale D.** Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy // Mathematical Finance. 1997. Vol. 7, no. 1. P. 73–81. doi: 10.1111/1467-9965.00023.
7. **Sonin I.M.** Growth rate, internal rates of return and tunpikes in investment model // Econ. Theory. 1995. Vol. 5, no. 3. P. 383–400. doi: 10.1007/BF01212325.
8. **Presman E.L., Sonin I.M.** Growth rate, internal rates of return and financial bubbles. M.: ЦЭМИ РАН, 2000. 33 p.
9. **Беленький В.З.** Экономическая динамика: анализ инвестиционных проектов в рамках линейной модели Неймана-Гейла. М.: ЦЭМИ РАН, 2002. 78 с.
10. **Ващенко М.П., Шананин А.А.** Оценка доходности пула инвестиционных проектов в модели оптимального инвестирования в непрерывном времени // Мат. моделирование. 2012. Т. 24, № 3. С. 70–86.
11. **Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh.** Financial bubbles existence in the Cantor-Lippman model for continuous time // Lobachevskii J. Math. 2018. Vol. 39, № 7. P. 929–935. doi: 10.1134/S1995080218070181.
12. **Обен Ж.-П.** Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.

Поступила 16.10.2019
После доработки 20.01.2020
Принята к публикации 27.01.2020

Шананин Александр Алексеевич
чл.-корр. РАН, профессор, д-р физ.-мат. наук,
зав. кафедрой анализа систем и решений
Московский физико-технический институт (научно-исследовательский университет);
главный науч. сотрудник ФИЦ ИУ РАН;
профессор МГУ им. Ломоносова;
профессор РУДН
г. Москва
e-mail: alexshan@yandex.ru

REFERENCES

1. Petrov A.A., Pospelov I.G., Shananin A.A. *Opyt matematicheskogo modelirovaniya ekonomiki* [An attempt at the mathematical modeling of an economy]. Moscow: Energoatomizdat Publ., 1996, 544 p. ISBN: 5-283-03169-1.
2. Petrov A.A., Pospelov I.G., Shananin A.A. *Ot gosplana k neeffektivnomu rynku: matematicheskii analiz evolyutsii rossiiskikh ekonomicheskikh struktur* [From Gosplan to Ineffective Market: Mathematical Analysis of Evolution of Russian Economic Structures]. UK: The Edwin Mellen Press, 1999, 392 p. ISBN: 0773432647.
3. Shananin A.A. Mathematical modeling of investments at an imperfect capital market. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 265–274 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-265-274.
4. Cantor D.G., Lipman S.A. Investment selection with imperfect capital markets. *Econometrica*, 1983, vol. 51, no. 4, pp. 1121–1144. doi: 10.2307/1912055.
5. Cantor D.G., Lipman S.A. Optimal investment selection with a multitude of projects. *Econometrica*, 1995, vol. 63, no. 5, pp. 1231–1240. doi: 10.2307/2171729.
6. Adler L., Gale D. Arbitrate and growth rate for riskless investments in a stationary economy. *Mathematical Finance*, 1997, vol. 7, no. 1, pp. 73–81. doi: 10.1111/1467-9965.00023.
7. Sonin I.M. Growth rate, internal rates of return and turnpikes in an investment model. *Econ. Theory*, 1995, vol. 5, no. 3, pp. 383–400. doi: 10.1007/BF01212325.
8. Presman E.L., Sonin I.M. *Growth rate, internal rates of return and financial bubbles.* Moscow: TsEMI RAN Publ., 2000, 33 p. ISBN: 5-8211-0122-0.
9. Belen'kii V.Z. *Ekonomicheskaya dinamika: analiz investitsionnykh proektov v ramkakh lineinoi modeli Neimana-Geila* [Economical Dynamics: Analysis of Investment Projects in the Frames of Neumann-Gale Linear Model]. Moscow: TsEMI RAN, 2002, 78 p. ISBN: 5-8211-0212-X.

10. Vashchenko M.P., Shananin A.A. The estimation of the yield of the pool of investment projects in the optimal invetsing problem for continuous time. *Math. Models Comput. Simul.*, 2012, vol. 4, no. 5, pp. 497–508. doi: 10.1134/S2070048212050092 .
11. Shananin A.A., Vashchenko M.P., Zhang Sh. Financial bubbles existence in the Cantor–Lippman model for continuous time. *Lobachevskii J. Math.*, 2018, vol. 39, no. 7, pp. 929–935. doi: 10.1134/S1995080218070181 .
12. Aubin J.P. *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques.* Paris: Masson, 1984, 214 p. Translated to Russian under the title *Nelineinyi analiz i ego ekonomicheskie prilozheniya.* Moscow: Mir Publ., 1988, 264 p.

Received October 16, 2019
Revised January 20, 2020
Accepted January 27, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 16-11-10246).

Aleksandr Alekseevich Shananin, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Moscow, 141701 Russia; Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Science, Moscow, 119333 Russia; Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia; Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, 117198 Russia, e-mail: alexshan@yandex.ru .

Cite this article as: A. A. Shananin. Analysis of the financial state of an investor based on the Cantor–Lippman model, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 293–306 .