ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 1 2020

УДК 519.6

УЛЬТРАФИЛЬТРЫ И МАКСИМАЛЬНЫЕ СЦЕПЛЕННЫЕ СИСТЕМЫ[1]

А. Г. Ченцов

Исследуется структура ультрафильтров (у/ф) широко понимаемого измеримого пространства (ИП), а также максимальных сцепленных систем (МСС), определяемых на данном ИП. Рассматриваются битопологические пространства (БТП) у/ф и МСС, получаемые в обоих случаях посредством оснащения топологиями волмэновского и стоуновского типов; БТП у/ф может рассматриваться как подпространство БТП, точками которого являются МСС. Для абстрактной задачи о достижимости с ограничениями асимптотического характера (ОАХ) у/ф могут использоваться в качестве обобщенных элементов в конструкциях расширений; для последних указана новая реализация, касающаяся применения при построении ОАХ сцепленных семейств подмножеств пространства обычных решений. Анализируется естественное обобщение обычной “сцепленности”, когда постулируется непустота пересечения множеств подсемейств исходного семейства, определяющего ИП, с мощностью, не превышающей заданное натуральное число. Для этого случая устанавливаются соотношения, связывающие у/ф и МСС, понимаемые в упомянутом обобщенном смысле.

Ключевые слова: битопологическое пространство, максимальная сцепленная система, топология, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. Ultrafilters and maximal linked systems.

The structure of ultrafilters of a broadly understood measurable space and of maximal linked systems defined on this space is studied. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked spaces obtained in both cases by equipping the space with topologies of Wallman and Stone types are considered; the bitopological space of ultrafilters can be considered as a subspace of the bitopological space whose points are maximal linked systems. For an abstract attainability problem with constraints of asymptotic nature, ultrafilters can be used as generalized elements in extension constructions; for the latter case, we present a new implementation that involves the application of linked families of subsets of the set of ordinary solutions in the construction of constraints of asymptotic nature. A natural generalization of the usual “linkedness” is considered, when it is postulated that the intersection of sets of subfamilies of the original family defining the measurable space of cardinality not exceeding a given positive integer is nonempty. For this case, we establish relations connecting ultrafilters and maximal linked systems considered in the specified generalized sense.

Keywords: bitopological space, maximal linked system, topology, ultrafilter.

Настоящий выпуск посвящен Александру Борисовичу Куржанскому, исследования которого в области теории управления получили широкое признание и оказали глубокое влияние на развитие упомянутой теории и ее приложений. Александр Борисович многое сделал для развития Института, которым руководил продолжительное время, и Университета, для становления математической науки и образования на Урале.

MSC: 54A09, 54A10, 54B05

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-274-292

Введение

Рассматриваются элементы конструкций расширений абстрактных задач о достижимости, реализуемые в классе ультрафильтров (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП), а также свойства, связывающие у/ф и максимальные сцепленные системы (МСС). Сами ИП определяются как непустые множества с оснащением в виде π-систем [1, с. 14] их подмножеств (п/м) с “нулем” и “единицей”. Для каждой такой π-системы определяется пара сравнимых топологий (на множестве у/ф), связываемых на идейном уровне со схемами

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00410).

Волмэна и Стоуна (каждая из упомянутых схем реализовывалась, конечно, ранее в специальных случаях π-систем упомянутого типа; будем для краткости именовать эти топологии далее волмэновской и стоуновской). Реализуется битопологическое пространство (БТП), точками которого являются у/ф (в связи с теорией и применениями БТП см. монографию [2]). При одном естественном условии отделимости π-системы точки исходного ИП порождают так называемые тривиальные у/ф; тем самым осуществляется погружение исходного множества в БТП у/ф. При этом слабейшая из топологий данного БТП — топология волмэновского типа — превращает множество у/ф в компактное T_1-пространство (по поводу T_1- и T_2-отделимости см. [3, разд. 1.3]). Важно отметить, что (при вышеупомянутом условии отделимости π-системы) погружение исходного множества реализует п/м множества всех у/ф данной π-системы, всюду плотное в смысле обеих топологий, участвующих в построении данного БТП (см. [4]). Это свойство позволяет рассматривать у/ф отделимой π-системы как обобщенные элементы (ОЭ) по отношению к точкам исходного множества. Данная возможность оказалась полезной в абстрактных задачах о достижимости в топологических пространствах (ТП) при ограничениях асимптотического характера (ОАХ) (см. [5–7] и др.). Существенно и то обстоятельство, что, в отличие от у/ф семейства всех п/м (бесконечного) множества, широко используемых в общей топологии (см. [8]), у/ф так определяемых (широко понимаемых) ИП в целом ряде практически интересных случаев допускают исчерпывающее описание (см. [9; 10]). Это обстоятельство позволяет применять у/ф в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости с ОАХ и, в ряде случаев (см. [11; 12]) получать ощутимое продвижение в их исследовании (заметим, что в [11; 12] роль у/ф оказалась весьма существенной в вопросах, связанных с описанием специального класса конечно-аддитивных мер, используемых (в [11; 12]) в качестве ОЭ).

Упомянутые обстоятельства мотивируют специальное исследование самих у/ф (см. в этой связи [13; 14] и др.). В частности, определенный интерес представляет "внешнее" описание БТП с точками в виде у/ф, а точнее, рассмотрение данного БТП как своеобразного подпространства некоторого объемлющего БТП. Такое объемлющее БТП было указано в [15; 16]. Его точками являются максимальные сцепленные системы (МСС) исходной π-системы (точнее, максимальные сцепленные подсемейства данной π-системы), а топологии (на множестве МСС) соответствуют идейно схемам Волмэна и Стоуна. Подход [15; 16] является (по сути) обобщением конструкции суперрасширения [17, гл. VII, §4] и связан с реализацией важного свойства суперкомпактности (см. [18–20] и др.; систематическое изложение см. в [17, гл. VII, §4]). При построении суперрасширения исходного ТП использовалась (см. [17–20]) топология волмэновского типа. В [21] было реализовано представление суперрасширения в виде БТП, а построения [15; 16] можно рассматривать как естественное развитие конструкций [21]. Так или иначе посредством этих построений реализуется "внешнее" описание БТП с точками в виде у/ф.

Свойство суперкомпактности, которым обладает пространство МСС с волмэновской топологией, не является (см. [22, разд. 5.11]) наследственным, а потому его распространение на пространство у/ф (каждый у/ф является МСС) вызывает определенные затруднения. Тем не менее для некоторых типов π-систем это оказывается (см. [4]) возможным (заметим, что всякое суперкомпактное ТП компактно). Дальнейшее развитие конструкций [4] дано в [23], где указаны классы широко понимаемых ИП, для которых пространство у/ф образует суперкомпакт, т. е. суперкомпактное T_2-пространство. В этих случаях мы получаем новое топологическое свойство пространства у/ф.

В настоящем исследовании мы обращаемся к подходу, предусматривающему применение у/ф в качестве ОЭ, т. е. к построению расширений в классе у/ф.

1. Определения и обозначения общего характера

Используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); $\varnothing$ — пустое множество, $\triangleq$ — равенство по определению. *Семейством* называем всякое множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Для любых двух объектов x и y через $\{x;y\}$ обозначаем (единственное) множество, содержащее в качестве своих элементов x, y и не содержащее никаких других элементов. Если z — произвольный объект, то $\{z\} \stackrel{\triangle}{=} \{z;z\}$ есть синглетон, содержащий z, т. е. $z \in \{z\}$. Если же u и v — объекты, то (см. [24, с. 67]) $(u,v) \stackrel{\triangle}{=} \{\{u\};\{u;v\}\}$ есть упорядоченная пара (УП) с первым элементом u и вторым элементом v. Для любой УП h через $pr_1(h)$ и $pr_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы h, однозначно определяемые условием $h = (pr_1(h), pr_2(h))$. Для любых трех объектов u, v и w полагаем, что $\{u;v;w\} \stackrel{\triangle}{=} \{u;v\} \cup \{w\}$. Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}'(X)$ обозначаем соответственно семейства всех и всех непустых подмножеств (п/м) X, $\mathcal{P}'(X) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$; под $\mathrm{Fin}(X)$ понимаем семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м X.

Если A и B — множества, то через B^A обозначаем (см. [24, гл. II, §6]) множество всех отображений из A в B; выражения $f \in B^A$ и $f\colon A \to B$ тождественны (как обычно, при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде $f(a) \in B$ имеем значение f в точке a). Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то $f^1(C) \stackrel{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$ есть образ C при действии f; прообразы п/м B далее обозначаются традиционно.

Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то $\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{M} \setminus M\colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$ есть семейство, двойственное к $\mathcal{M}$. Кроме того, каждому непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляется след $\mathcal{A}|_B \stackrel{\triangle}{=} \{A \cap B\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$ семейства $\mathcal{A}$ на B. Для произвольного непустого семейства $\mathfrak{X}$ используем семейства $\{\cup\}(\mathfrak{X})$, $\{\cap\}(\mathfrak{X})$, $\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X})$ и $\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X})$, определяемые в [16, разд. 2] (семейства всех объединений подсемейств $\mathfrak{X}$, всех пересечений непустых подсемейств $\mathfrak{X}$, конечных объединений и конечных пересечений множеств из $\mathfrak{X}$).

Как обычно, $\mathbb{R}$ — вещественная прямая, $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1;2;\ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$; $\overline{1,n} \stackrel{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\}$ при $n \in \mathbb{N}$. Полагаем, что натуральные числа — элементы $\mathbb{N}$ — не являются множествами, и для всяких множества H и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $H^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное H^n (что, с учетом вышеупомянутой оговорки в отношении $\mathbb{N}$, не приводит к двусмысленности), получая множество всех кортежей $(h_i)_{i\in\overline{1,n}}$, $h_j \in H \ \forall j \in \overline{1,n}$.

Специальные семейства; $\boldsymbol{\pi}$-системы и их частные случаи. До конца настоящего раздела фиксируем непустое множество $\mathbf{I}$ и полагаем, что

$$\pi[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I})\&(\mathbf{I} \in \mathcal{I})\&(A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I})\}; \tag{1.1}$$

(1.1) есть семейство всех π-систем п/м $\mathbf{I}$ с “нулем” и “единицей”. Отметим некоторые подсемейства (1.1):

$$\begin{aligned}\pi_*^\sharp[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L_1 \in \mathcal{L}\ \forall L_2 \in \mathcal{L}\ \forall L_3 \in \mathcal{L}\ \big((L_1 \cap L_2 \neq \varnothing)\&(L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\&(L_1 \cap L_3 \neq \varnothing)\big)\\ \Longrightarrow (L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\big\},\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L\ \ \exists \Lambda \in \mathcal{L}\colon (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\big\} \tag{1.3}$$

(в (1.3) определено семейство всех отделимых π-систем; π-системы из семейства (1.2) играют (см. [23]) важную роль в вопросах, связанных с суперкомпактностью пространств у/ф). При $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}]$, $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ и $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\Delta_n(A,\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{(L_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n \ \Big|\ \Big(A = \bigcup_{i=1}^{n} L_i\Big)\&(L_p \cap L_q = \varnothing\ \ \forall p \in \overline{1,n}\ \ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\})\Big\} \tag{1.4}$$

(элементы (1.4) — упорядоченные конечные разбиения A множествами из $\mathcal{L}$). В виде

$$\Pi[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(\mathbf{I} \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\} \in \mathcal{P}'(\pi[\mathbf{I}]) \tag{1.5}$$

имеем семейство всех полуалгебр (см. [25, гл. I]) п/м $\mathbf{I}$. Полагаем также $\Pi_*^\sharp[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \Pi[\mathbf{I}] \cap \pi_*^\sharp[\mathbf{I}]$. В виде

$$(\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}] \mid A \cup B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I}\} \tag{1.6}$$

имеем семейство всех решеток п/м $\mathbf{I}$ с "нулем" и "единицей" (сами же π-системы являются в силу (1.1) полурешетками п/м $\mathbf{I}$). Ясно, что

$$(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A} \ \ \forall A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]), \tag{1.7}$$

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\tau \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau \ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\Big\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]), \tag{1.8}$$

$$(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{C_I}[\tau] \colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\} \in \mathcal{P}'((\mathrm{LAT})_0[\mathbf{I}]). \tag{1.9}$$

Итак, введены соответственно семейства, элементами которых являются алгебры п/м $\mathbf{I}$, топологии на $\mathbf{I}$ и семейства замкнутых множеств, отвечающих топологиям на $\mathbf{I}$. Заметим, что (1.2), (1.3), (1.5)–(1.9) определяют подсемейства (1.1). Таким образом, π-системы определяют очень общий класс семейств п/м $\mathbf{I}$, объединяющий многие конкретные и широко используемые варианты подсемейств $\mathcal{P}(\mathbf{I})$. При этом полуалгебры п/м $\mathbf{I}$ не являются, вообще говоря, решетками п/м $\mathbf{I}$, но являются (см. (1.5)) π-системами.

Базы и предбазы топологий. Если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то в виде

$$(\mathrm{COV})[\mathbf{I} \,|\, \mathcal{J}] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}) \mid \mathbf{I} = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I\Big\}$$

имеем семейство всех покрытий $\mathbf{I}$ множествами из $\mathcal{J}$.

Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ и $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$, то через $\mathrm{cl}(A, \tau)$ обозначаем замыкание множества A в ТП $(\mathbf{I}, \tau)$. В дальнейшем $(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ и $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}]$ понимаются в смысле [23, разд. 2] (семейства открытых и замкнутых баз и предбаз; имеются в виду базы и предбазы, порождающие каждая некоторую открытую или замкнутую (см. [26, с. 98]) топологию на $\mathbf{I}$). При этом, конечно, $(\{\cup\}(\mathcal{B}) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \ \ \forall \mathcal{B} \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}])\&(\{\cap\}(\tilde{\mathcal{B}}) \in (\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \ \ \forall \tilde{\mathcal{B}} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}])$. Если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]$, $(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$, $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ и $(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}; \tau]$ также понимаются далее в смысле [23, разд. 2] (семейства открытых и замкнутых баз и предбаз конкретного ТП $(\mathbf{I}, \tau)$). Следуя [23, (2.15)], введем семейство $((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$ всех суперкомпактных открытых предбаз топологий на $\mathbf{I}$. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$ понимается в смысле [23, (2.16)]: $((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] = ((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \cap (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau]$. Тогда (см. [23, (2.14), (2.17)]) в виде

$$((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}; \tau] \neq \varnothing\}$$

получаем семейство всех топологий на $\mathbf{I}$, превращающих $\mathbf{I}$ в суперкомпактное ТП (см. [17, гл. VII, §4; 18]). Суперкомактные T_2-пространства именуются суперкомпактами (см. [22, с. 64]). Если $\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{J}] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{C} \in \mathcal{P}'(\mathcal{J}) \mid \bigcap_{C \in \mathcal{K}} C \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{C})\Big\}. \tag{1.10}$$

Центрированные семейства, базы фильтров. В настоящем пункте фиксируем $\mathcal{I} \in \pi[\mathbf{I}]$, имея в виде $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$ широко понимаемое ИП. Полагаем далее, что

$$\beta^0[\mathcal{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{J})\&(\forall J_1 \in \mathcal{J} \ \ \forall J_2 \in \mathcal{J} \ \ \exists J_3 \in \mathcal{J} \colon J_3 \subset J_1 \cap J_2)\}, \tag{1.11}$$

получая семейство всех баз фильтров (БФ) ИП $(\mathbf{I}, \mathcal{I})$. Кроме того, согласно (1.10)

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{I}] = \Big\{\mathcal{Z} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid \bigcap_{Z \in \mathcal{K}} Z \neq \varnothing \ \ \forall \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{Z})\Big\}; \tag{1.12}$$

в (1.12) имеем семейство всех центрированных подсемейств π-системы $\mathcal{I}$. Из (1.11) и (1.12) легко следует, что

$$\beta^0[\mathcal{I}] \subset (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}]. \tag{1.13}$$

В свою очередь (1.13) дополняется очевидным свойством

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{Z}) \in \beta^0[\mathcal{I}] \qquad \forall \mathcal{Z} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{I}]. \tag{1.14}$$

Свойства (1.11)–(1.14) будут дополнены положениями, касающимися сцепленности.

2. Сцепленные семейства

Фиксируем в дальнейшем непустое множество E, обозначая через $\mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ семейство всех непустых подсемейств $\mathcal{P}(E)$. Фиксируем до конца настоящего раздела $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, получая непустое семейство п/м E. В качестве

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \ \ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\} \tag{2.1}$$

имеем семейство всех сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$. Известное (см. [17–20; 22]) свойство сцепленности отражено в (2.1). Тогда

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \mid \forall S \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \ \ (\mathcal{E} \subset S) \Rightarrow (\mathcal{E} = S)\} \tag{2.2}$$

есть семейство всех максимальных сцепленных подсемейств $\mathcal{L}$ или всех максимальных сцепленных систем (МСС) в $\mathcal{L}$. Из (2.1), (2.2) легко следует, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \mid \forall L \in \mathcal{L} \ \ (L \cap \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}) \Rightarrow (L \in \mathcal{E})\}. \tag{2.3}$$

Предложение 2.1. *Каждое сцепленное подсемейство $\mathcal{L}$ мажорируется некоторой МСС в $\mathcal{L}$, т. е. $\forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \ \ \exists S \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]\colon \mathcal{E} \subset S$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ и

$$\Omega \overset{\triangle}{=} \{\tilde{\mathcal{E}} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \mid \mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{E}}\}. \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что $\Omega \neq \varnothing$, так как $\mathcal{E} \in \Omega$. Под $\sqsubseteq \overset{\triangle}{=} \{z \in \Omega \times \Omega \mid pr_1(z) \subset pr_2(z)\}$ понимаем обычную упорядоченность по включению: $(\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}) \Longleftrightarrow (\mathcal{A} \subset \mathcal{B})$ при $\mathcal{A} \in \Omega$ и $\mathcal{B} \in \Omega$.

В виде $(\sqsubseteq -\mathrm{MAX})[\Omega] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in \Omega \mid \forall \mathcal{Y} \in \Omega \ \ (\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}) \Rightarrow (\mathcal{X} = \mathcal{Y})\}$ имеем множество всех $\sqsubseteq$ — максимальных элементов Ω. Пусть $\mathfrak{L}$ — непустое линейно упорядоченное (в смысле $(\Omega, \sqsubseteq)$) подсемейство Ω, а $\mathfrak{Y}$ есть объединение всех семейств из $\mathfrak{L}$; ясно, что $\mathfrak{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$. С учетом линейной упорядоченности $\mathfrak{L}$ и (2.4) устанавливается сцепленность $\mathfrak{Y}$, а точнее, свойство $\mathfrak{Y} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$. Как следствие $\mathfrak{Y} \in \Omega$; более того, $\mathfrak{Y}$ есть мажоранта $\mathfrak{L}$ в смысле $(\Omega, \sqsubseteq)$. Поскольку $\mathfrak{L}$ выбиралось произвольно, установлено, что каждое линейно упорядоченное подсемейство Ω обладает мажорантой и по лемме Цорна $(\sqsubseteq -\mathrm{MAX})[\Omega] \neq \varnothing$. Пусть $\mathcal{W} \in (\sqsubseteq -\mathrm{MAX})[\Omega]$. В частности, $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ (см. (2.4)). Пусть $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$ таково, что $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{E} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{M}$, то $\mathcal{M} \in \Omega$ (см. (2.4)) и, как следствие максимальности $\mathcal{W}$, имеем равенство $\mathcal{W} = \mathcal{M}$. Поскольку выбор $\mathcal{M}$ был произвольным, $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]\colon \mathcal{E} \subset \mathcal{W}$. □

Заметим, что $\{L\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \ \ \forall L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$. Тогда из предложения 2.1 следует, что $(\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\} \neq \varnothing) \Longrightarrow (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \neq \varnothing)$. Отметим, что в качестве $\mathcal{L}$ может использоваться π-система п/м E. Данный случай представляется наиболее интересным, и мы его рассмотрим специально в связи с фильтрами и у/ф.

3. Фильтры и ультрафильтры π-систем

В пределах настоящего раздела фиксируем π-систему $\mathcal{L} \in \pi[E]$, где $E \neq \varnothing$. Отметим одно очевидное свойство, привлекая определения двух предыдущих разделов. Итак, $\beta^0[\mathcal{L}] \subset \langle\mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$; следовательно, БФ сцеплены. Данное свойство дополняет (1.14). В виде

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\&(A \cap B \in \mathcal{F} \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall B \in \mathcal{F}) \\ \&(\forall F \in \mathcal{F} \ \forall L \in \mathcal{L} \ (F \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{F}))\big\} \tag{3.1}$$

имеем семейство всех фильтров (широко понимаемого) ИП $(E, \mathcal{L})$. Ясно, что $\{L \in \mathcal{L} \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ при $\mathcal{B} \in \beta^0[\mathcal{L}]$ (стандартная операция с применением БФ). Далее,

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Longrightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\} \\ = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \mid \forall L \in \mathcal{L} \ (L \cap U \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (L \in \mathcal{U})\} \\ = \{\mathcal{U} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \mid \forall \tilde{\mathcal{U}} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] \ (\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{U}}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}})\} \tag{3.2}$$

есть семейство всех у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$. Из (3.2) видно, что данные у/ф суть максимальные центрированные подсемейства $\mathcal{L}$ — и только они. Подобно предложению 2.1 проверяется, что

$$\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \qquad \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\colon \mathcal{F} \subset \mathcal{U}. \tag{3.3}$$

Вместе с тем $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \stackrel{\triangle}{=} \{L \in \mathcal{L} \mid x \in L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \ \forall x \in E$. В этом случае (см. (3.3)) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing$ и

$$((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \ \forall x \in E) \Longleftrightarrow (\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]) \tag{3.4}$$

(см. [27, (5.9)]). В (3.4) указаны необходимые и достаточные условия максимальности тривиальных фильтров. Напомним, что (см. [16, разд. 3]) $\Phi_{\mathcal{L}}(L) \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid L \in \mathcal{U}\}$ при $L \in \mathcal{L}$. Тогда

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{L}}(L)\colon L \in \mathcal{L}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$$

и, в частности, $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. Топология (стоуновского типа)

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})] \tag{3.5}$$

превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в нульмерное (см. [3, разд. 6.2]) T_2-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{3.6}$$

(если $\mathcal{L} \in (\mathrm{alg})[E]$, то (3.6) — нульмерный компакт, т. е. нульмерное компактное T_2-пространство), в котором все множества из $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]$ открыто-замкнуты (см. [16, (3.3)]). Другая схема оснащения $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ связана с множествами

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid H] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon U \subset H\} \qquad \forall H \in \mathcal{P}(E).$$

При этом, как легко видеть (см. [16, (3.3)]),

$$\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L} \mid \Lambda]\colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{L}]\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}]] \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]].$$

С другой стороны, $\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$ (см. [23, (3.9)]) определяет следующую топологию волмэновского типа:

$$\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{L}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]. \tag{3.7}$$

Топология (3.7) превращает $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в компактное T_1-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle). \tag{3.8}$$

Топологии (3.5) и (3.7) сравнимы (см. [16, разд. 7]): $\mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle \subset \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]$. В виде

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) \tag{3.9}$$

имеем БТП (в связи с исследованием БТП отметим монографию [2]). В [4;15;16] указаны конкретные условия на $\mathcal{L}$, при которых БТП (3.9) является вырожденным (когда топологии (3.5), (3.7) совпадают) и, напротив, невырожденным. Однако и в весьма общем случае $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ оказывается (см. [4, предложение 7.1]), что ТП (3.6) и (3.8) в определенном смысле "близки". Данная "близость" касается вопросов, связанных с погружением E в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Обратимся к упомянутым положениям работы [4], полагая до конца настоящего раздела, что $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[\mathcal{L}]$, и учитывая (3.4): в нашем случае $(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})\ \ \forall x \in E$. Тогда согласно [4, предложение 7.1]

$$\begin{aligned}&\mathrm{cl}(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \colon x \in L\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle)\\ &= \mathrm{cl}(\{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \colon x \in L\}, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \Phi_{\mathcal{L}}(L) \qquad \forall L \in \mathcal{L}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Из (3.10) вытекает тот факт, что E погружается в $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в виде множества, всюду плотного как в ТП (3.6), так и в смысле ТП (3.8). Грубо говоря, имеем "плотное погружение" в смысле БТП (3.9). Заметим, что в [4, теорема 7.1] указано применение (3.10) для построения ОЭ, допустимых в смысле соблюдения ОАХ в абстрактной задаче о достижимости. При $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\} = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma). \tag{3.11}$$

Множество (3.11) используется ниже при построении расширений в классе у/ф; последние играют роль ОЭ в абстрактной задаче о достижимости.

4. Сцепленность и свойство суперкомпактности

В отношении E и $\mathcal{L}$ сохраняем предположения разд. 3 ($E \neq \varnothing$ и $\mathcal{L} \in \pi[E]$). При этих условиях используем (2.1)–(2.3), учитывая свойство [23, (4.2)]:

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid A \cap B \in \mathcal{U}\ \ \forall A \in \mathcal{U}\ \ \forall B \in \mathcal{U}\}. \tag{4.1}$$

Заметим, что (см. (3.3), (3.4), (4.1)) $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \neq \varnothing$. Следуя [23, (4.3)], полагаем, что

$$\begin{aligned}&(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0[E|L] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{E}\}\ \ \forall L \in \mathcal{L})\\ &\&(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E|H] \overset{\triangle}{=} \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \mid \exists \Sigma \in \mathcal{E} \colon \Sigma \subset H\}\ \ \forall H \in \mathcal{P}(E)).\end{aligned} \tag{4.2}$$

С использованием множеств (4.2) конструируются (см. [16, (4.9)]) непустые семейства $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}]$ и $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{L}]$ п/м $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$; данные семейства находятся в двойственности (см. [16, (4.10)]). При этом (см. [16, разд. 4]) $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$ порождает суперкомпактную (см. [23, (4.6)]) топологию

$$\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}])) \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]] \tag{4.3}$$

волмэновского типа, причем (см. [23, (4.7)])

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{L}] \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]; \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle] \tag{4.4}$$

(в связи с (4.3), (4.4) см. разд. 1). Относительно $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}]$ напомним [16, предложение 5.1]. В виде

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]; \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle) \tag{4.5}$$

имеем (см. [23, разд. 4]) суперкомпактное T_1-пространство, для которого (3.8) является подпространством, так как (см. (4.3), (4.5), [23, (4.10)])

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{4.6}$$

Кроме того (см. [16, разд. 6]), $\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$, а топология

$$\mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}_0^*[E;\mathcal{L}])) \in \mathrm{top}[\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]]$$

превращает (см. [16, предложения 6.4]) $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ в нульмерное T_2-пространство

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle); \tag{4.7}$$

ТП (3.6) является подпространством (4.7), поскольку (см. [23, (4.12)])

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle|_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}. \tag{4.8}$$

Наконец (см. [16, предложения 7.1]) имеем $\mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle$, а тогда триплет

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle) \tag{4.9}$$

есть БТП. В силу (4.6), (4.8) БТП (3.9) можно рассматривать как подпространство (4.9).

До конца настоящего раздела полагаем, если не оговорено противное, что $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$. Тогда согласно [23, (5.3)]

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]. \tag{4.10}$$

В этом случае (см. (4.6), (4.8), (4.10)) имеем совпадение БТП (3.9) и (4.9), так как

$$(\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E|\mathcal{L}\rangle)\&(\mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E] = \mathbb{T}_*\langle E|\mathcal{L}\rangle). \tag{4.11}$$

З а м е ч а н и е. В [23] указаны содержательные примеры реализации свойства $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$. В частности, при их построении могут использоваться конструкции на основе декартовых произведений. Характерные случаи реализации (4.10), (4.11) касаются при этом ситуации, когда $\mathcal{L}$ есть полуалгебра множеств.

Предложение 4.1. *Справедливо равенство* $(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$. Тогда в силу предложения 2.1 имеем для некоторой МСС $\mathcal{U} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ свойство $\mathcal{M} \subset \mathcal{U}$. С учетом (4.10) можно утверждать, что $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, в том числе, $\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$. Согласно (3.1) получаем рассуждением по индукции, что

$$\bigcap_{k=1}^m U_k \in \mathcal{U} \qquad \forall m \in \mathbb{N} \qquad \forall (U_k)_{k\in\overline{1,m}} \in \mathcal{U}^m.$$

В частности, при $n \in \mathbb{N}$ и $(M_i)_{i\in\overline{1,n}} \in \mathcal{M}^n$ пересечение всех множеств M_i, $i \in \overline{1,n}$, содержится в $\mathcal{U}$, а потому (см. (3.1)) непусто. Поскольку $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ в силу (2.1), имеем, что $\mathcal{M} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$ (см. (2.13)). Итак, $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \subset (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$. Противоположное вложение очевидно (см. (1.12), (2.1)). $\square$

Предложение 4.2. *Если* $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]$, *то* $\bigcap\limits_{\Sigma\in\mathcal{E}} \Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]$, получая вследствие предложения 4.1 свойство $\mathcal{E} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$. Рассмотрим семейство $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma) \colon \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})))$. Легко видеть, что $\mathfrak{N} \in \langle (\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] - \mathrm{link} \rangle [\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})]$. Учтем (4.10), (4.11). При этом (см. [16, (6.6)]) в нашем случае $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{L}] = \hat{\mathfrak{C}}_0^*[E; \mathcal{L}]$. Теперь используем [16, предложение 5.1]: исходя из сцепленности $\mathfrak{N}$ и [16, (5.1)] получаем, что пересечение всех множеств из $\mathfrak{N}$ непусто, откуда и вытекает требуемое утверждение. □

Предложение 4.3. *Вернемся к общему случаю* $\mathcal{L} \in \pi[E]$. *Эквивалентны следующие условия:* 1) $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$; 2) $(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из предложения 4.1. Пусть истинно 2), т. е. $(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$ и $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E]$ совпадают. Выберем произвольно $L_1 \in \mathcal{L}$, $L_2 \in \mathcal{L}$ и $L_3 \in \mathcal{L}$ со свойствами $(L_1 \cap L_2 \neq \varnothing) \& (L_2 \cap L_3 \neq \varnothing) \& (L_1 \cap L_3 \neq \varnothing)$. Тогда $\mathfrak{L} \stackrel{\triangle}{=} \{L_1; L_2; L_3\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle [E]$, а потому $\mathfrak{L} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$ и, следовательно $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing$. Получили свойство истинности требуемой импликации

$$((L_1 \cap L_2 \neq \varnothing) \& (L_2 \cap L_3 \neq \varnothing) \& (L_1 \cap L_3 \neq \varnothing)) \Rightarrow (L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing).$$

Поскольку выбор L_1, L_2, L_3 был произвольным, имеем в силу (1.2) свойство $\mathcal{L} \in \pi_*^\sharp[E]$. Итак, 2) $\Rightarrow$ 1). □

5. Связь с конструкциями расширений

В настоящем разделе рассмотрим некоторые применения (3.10), фиксируя $\mathcal{L} \in \Pi[E]$. Итак, пусть $(E, \mathcal{L})$ есть ИП с полуалгеброй множеств. Тогда (см. [28, разд. 4]) ТП (3.6) — это непустой нульмерный компакт со свойством (3.10).

Пусть $(\mathbf{H}, \tau)$, $\mathbf{H} \neq \varnothing$, является T_2-пространством (фиксированным в настоящем разделе) и $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^E$. Рассматриваем $\mathbf{f}$ как своеобразное целевое отображение. Обратимся к вопросам, связанным с представлением множеств $\mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau)$, где $L \in \mathcal{L}$. Условимся о следующем общем соглашении: если X и Y — непустые множества, $\tau_1 \in (\mathrm{top})[X]$ и $\tau_2 \in (\mathrm{top})[Y]$, то

$$C(X, \tau_1, Y, \tau_2) \stackrel{\triangle}{=} \{g \in Y^X \mid g^{-1}(G) \in \tau_1 \;\; \forall G \in \tau_2\}$$

(множество всех отображений из X в Y, непрерывных в смысле топологий τ_1 и τ_2). Отметим, что (см. (1.5), (3.4)) определен оператор

$$\zeta \stackrel{\triangle}{=} ((\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x])_{x \in E} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})^E.$$

При этом $\zeta^1(A) = \{(\mathcal{L} - \mathrm{triv})[x] \colon x \in A\} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})) \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

Предложение 5.1. *Пусть* $g \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau)$ *и при этом* $\mathbf{f} = g \circ \zeta$, *тогда*

$$g^1(\Phi_{\mathcal{L}}(L)) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau) \qquad \forall L \in \mathcal{L}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку ТП (3.6) компактно, а $(\mathbf{H}, \tau)$ есть T_2-пространство, то (см. [3, 3.1.12]) отображение g замкнуто, а потому (см. [29, (2.8.4)])

$$g^1(\mathrm{cl}(M, \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])) = \mathrm{cl}(g^1(M), \tau) \qquad \forall M \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \tag{5.1}$$

Пусть $\mathbb{L} \in \mathcal{L}$. Тогда по выбору g имеем равенство $\mathbf{f}^1(\mathbb{L}) = g^1(\zeta^1(\mathbb{L}))$. С учетом (5.1) получаем цепочку равенств $g^1(\mathrm{cl}(\zeta^1(\mathbb{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])) = \mathrm{cl}(g^1(\zeta^1(\mathbb{L})), \tau) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(\mathbb{L}), \tau)$. В силу (3.10) $\mathrm{cl}(\zeta^1(\mathbb{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]) = \Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})$, а потому $g^1(\Phi_{\mathcal{L}}(\mathbb{L})) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(\mathbb{L}), \tau)$. Так как выбор $\mathbb{L}$ был произвольным, требуемое свойство установлено. □

Заметим, что предложение 5.1 допускает естественное обобщение, использующее [30, предложение 1], а именно: при $g \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau)$ истинна импликация

$$(\mathbf{f} = g \circ \zeta) \Longrightarrow (g^1(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid A \cap B \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{U}\}) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(A), \tau) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)). \tag{5.2}$$

В связи с (5.2) и предложением 5.1 отметим некоторые положения [5], связанные с расширением задачи о достижимости с ОАХ. Используя [5, определение 5.1], применим $(\mathbf{as})[E; Y; \tilde{\tau}; f; \mathcal{E}]$ работы [5] при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и следующих вариантах $(Y, \tilde{\tau}, f)$: 1) $(Y, \tilde{\tau}) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E])$ и $f = \zeta$; 2) $(Y, \tilde{\tau}) = (\mathbf{H}, \tau)$ и $f = \mathbf{f}$. В связи с вариантом 1) отметим, что у/ф ИП $(E, \mathcal{L})$ играют роль ОЭ, а у/ф, являющиеся точками $(\mathbf{as})[E; \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}); \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E]; \zeta; \mathcal{E}]$, суть допустимые (в смысле ОАХ $\mathcal{E}$) ОЭ. В случае 2) имеем множество притяжения (МП), "заменяющее" обычное множество достижимости (случай, когда $\mathcal{E}$ — синглетон).

Напомним о компактности ТП (3.8). По аналогии с предложением 5.1 получаем при $\mathrm{g} \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^0\langle E\rangle, \mathbf{H}, \tau)$, что

$$(\mathbf{f} = \mathrm{g} \circ \zeta) \Longrightarrow (g^1(\Phi_{\mathcal{L}}(L)) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau) \ \forall L \in \mathcal{L}); \tag{5.3}$$

разумеется, мы учитываем (3.10) (полезно отметить, что (5.3) имеет место и в более общем случае $\mathcal{L} \in \tilde{\pi}^0[E]$ по свойствам ТП (3.8)).

Напомним также, что набор $(K, \mathbf{t}, \mathrm{p}, \mathrm{q})$, где $(K, \mathbf{t})$ — компактное ТП, $\mathrm{p} \in K^E$, $\mathrm{q} \in C(K, \mathbf{t}, \mathbf{H}, \tau)$ и $\mathbf{f} = \mathrm{q} \circ \mathrm{p}$, в [7] был назван *компактификатором.* Используя компактификатор $(K, \mathbf{t}, \mathrm{p}, \mathrm{q})$, можно представить $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}]$, где $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, в виде

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] = q^1((\mathbf{as})[E; K; \mathbf{t}; \mathrm{p}; \mathcal{E}]). \tag{5.4}$$

При условиях на отображение g, сформулированных в предложении 5.1, мы в виде $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \zeta, \mathrm{g})$ имеем компактификатор, а потому реализуется соответствующий вариант (5.4), обеспечивающий представление основного МП в T_2-пространстве $(\mathbf{H}, \tau)$ как непрерывный образ вспомогательного МП; последнее есть множество всех допустимых ОЭ. Рассмотрим один вариант компактификатора, имея целью конкретизацию представлений на основе (5.2) и предложения 5.1. В этой связи обратимся сначала к множеству $\mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau]$, определяемому в [30, (5.1)] в терминах сходимости образов у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Если

$$\mathbf{f} \in \mathbb{F}_{\lim}[E; \mathcal{L}; \mathbf{H}; \tau], \tag{5.5}$$

то получено отображение $\varphi_{\lim}[\mathbf{f}] \in \mathbf{H}^{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}$ (см. [30, §5]), реализующее при $\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ в виде $\varphi_{\lim}[\mathbf{f}](\mathcal{U})$ обобщенный предел БФ $\mathbf{f}^1[\mathcal{U}] \in \beta^0[\mathcal{P}(\mathbf{H})]$ в ТП $(\mathbf{H}, \tau)$; предел БФ устанавливается при этом в соответствии с известной схемой [8, гл.I]. Заметим, что (см. [30, (5.6)]) $\mathbf{f} = \varphi_{\lim}[\mathbf{f}] \circ \zeta$ (учитываем, что $\Pi[E] \subset \tilde{\pi}^0[E]$ в силу (1.5)). Полагаем до конца настоящего раздела, что $(\mathbf{H}, \tau)$ — это регулярное ТП, т. е. T_1- и T_3-пространство одновременно. Тогда (см. [30, (5.5)])

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f}] \in C(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \mathbf{H}, \tau); \tag{5.6}$$

$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}), \mathbf{T}_{\mathcal{L}}^*[E], \zeta, \varphi_{\lim}[\mathbf{f}])$ есть компактификатор. Из (5.6) и предложения 5.1 вытекает, что

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1(\Phi_{\mathcal{L}}(L)) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau) \qquad \forall L \in \mathcal{L}. \tag{5.7}$$

В свою очередь из (5.2) и (5.6) выводим более общее свойство:

$$\varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid A \cap B \neq \varnothing \ \forall B \in \mathcal{U}\}) = \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(A), \tau) \qquad \forall A \in \mathcal{P}(E). \tag{5.8}$$

Здесь напомним с учетом (5.5) и компактности ТП (3.6), что согласно [30, предложение 7] при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] = \varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})), \tag{5.9}$$

где (см. [30, §2]) $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \mathcal{E} \subset \mathcal{U}\}$ (напомним также [30, теорема 1] в связи с представлением МП для случая, когда $\mathcal{E}$ является произвольным непустым направленным семейством п/м E). Наряду с МП, реализуемым в (5.9), представляет интерес пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(L), \tau)$, $L \in \mathcal{E}$. В случае, когда $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L})$ — направленное семейство (имеется в виду свойство $\forall \Sigma_1 \in \mathcal{E}\ \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\ \exists \Sigma_3 \in \mathcal{E} \colon \Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$), упомянутое пересечение совпадает с МП (5.9) (см. [27, (3.7)]). Отметим относительно представления упомянутого множества-пересечения в общем случае, что согласно (5.7)

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma), \tau) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1(\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)) \qquad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}). \tag{5.10}$$

В свою очередь из (5.8) выводим обобщение (5.10):

$$\bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma), \tau) = \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1(\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \mid \Sigma \cap B \neq \varnothing\ \forall B \in \mathcal{U}\}) \qquad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)) \tag{5.11}$$

(в связи с (5.11) полезно напомнить построения [27, разд. 7] и [30, предложение 3]). Заметим, что при $\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ элементы пересечения всех множеств $\mathrm{cl}(f^1(\Sigma), \tau)$, $\Sigma \in \mathcal{E}$, имеют следующий смысл: они универсально реализуемы (в пределе) при стандартных ограничениях в виде каждого множества из $\mathcal{E}$. А именно каждый такой универсально реализуемый элемент $\mathbf{H}$ допускает сколь угодно точное (в смысле топологии τ) приближение элементами $f(x)$, $x \in \Sigma$, при любом выборе $\Sigma \in \mathcal{E}$. В частности, такие элементы могут представлять интерес в условиях неопределенности относительно конкретной реализации Σ. В этом плане представляется полезным изучение условий существования универсально реализуемых элементов $\mathbf{H}$. Мы ограничимся рассмотрением этих условий для случая $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$.

Напомним, что согласно предложению 4.1

$$(\mathcal{L} \in \Pi_*^\sharp[E]) \Longrightarrow ((\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]). \tag{5.12}$$

С учетом (5.12) полагаем до конца настоящего раздела, что

$$\mathcal{L} \in \Pi_*^\sharp[E]. \tag{5.13}$$

Тогда получаем из (5.12), (5.13) равенство $(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]$, а потому в соответствии с (1.14)

$$\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \in \beta^0[\mathcal{L}] \qquad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]. \tag{5.14}$$

Как следствие имеем из [27, (3.7)] равенство

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] = \bigcap_{\Sigma \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E})} \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma), \tau) \qquad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]. \tag{5.15}$$

Из (5.10) и (5.15) вытекает с очевидностью, что

$$(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] \subset \bigcap_{\Sigma \in \mathcal{E}} \varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1(\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)) \qquad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]. \tag{5.16}$$

Предложение 5.2. *Если $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link} \rangle[E]$, то $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] \neq \varnothing$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем свойство $\mathcal{E} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$, а тогда исходя из (5.14) $\{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \in \beta^0[\mathcal{L}]$ (свойство БФ: см. (1.11)). Имеем равенство (5.15). Воспользуемся (5.7), учитывая очевидное в силу (3.1), (3.2) равенство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E}) = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}))$. По основному свойству БФ полагаем теперь, что (см. [30, (2.7)]) $\mathcal{F} \triangleq \{L \in \mathcal{L} \mid \exists \Sigma \in \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \colon \Sigma \subset L\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$, причем $\mathcal{E} \subset \{\cap\}_\sharp(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F}$. Согласно (3.3) получаем для некоторого у/ф $\mathfrak{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ вложение $\mathcal{F} \subset \mathfrak{L}$. Поэтому $\mathcal{E} \subset \mathfrak{L}$ и, следовательно, $\mathfrak{L} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L} \mid \mathcal{E})$. Но тогда (см. (5.9)) $\varphi_{\lim}[\mathbf{f}](\mathfrak{L}) \in (\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}]$. Требуемое свойство $(\mathbf{as})[E; \mathbf{H}; \tau; \mathbf{f}; \mathcal{E}] \neq \varnothing$ установлено. $\square$

Из (5.16) и предложения 5.2 вытекает, что (при условии (5.13))

$$\bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \varphi_{\lim}[\mathbf{f}]^1(\Phi_{\mathcal{L}}(\Sigma)) = \bigcap_{\Sigma\in\mathcal{E}} \mathrm{cl}(\mathbf{f}^1(\Sigma),\tau) \neq \varnothing \qquad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E]. \tag{5.17}$$

Заметим, что с точки зрения (5.17) и предложения 5.2 наиболее существенными среди условий представляются (5.5) и (5.13). В связи с (5.5) отметим построения [27, разд. 8], связанные с ярусными отображениями, ограничиваясь сейчас для простоты частным случаем ярусных вещественнозначных функций.

Итак, пусть до конца настоящего раздела $\mathbf{H} = \mathbb{R}^\Gamma$, где Γ — непустое множество. Через $\tau_{\mathbb{R}}$ обозначаем обычную $|\cdot|$-топологию $\mathbb{R}$, получая, в частности, регулярное ТП $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$. Тогда топология $\otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})$ тихоновской степени $(\mathbb{R},\tau_{\mathbb{R}})$ (при использовании Γ в качестве индексного множества) превращает $\mathbf{H}$ в регулярное ТП (см. [3, 2.3.11]) $(\mathbb{R}^\Gamma, \otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})) = (\mathbf{H}, \otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}}))$. Если $f \in \mathbf{H}^E$ и $\gamma \in \Gamma$, то (см. [27, разд. 8]) $f(\cdot)(\gamma) \stackrel{\triangle}{=} (f(x)(\gamma))_{x\in E} \in \mathbb{R}^E$ (γ-компонента f).

Введем в рассмотрение множество $B(E,\mathcal{L}) \in \mathcal{P}'(\mathbb{R}^E)$, определяемое в [29, (4.3.11)]. Элементы $B(E,\mathcal{L})$ — равномерные пределы ступенчатых в смысле ИП $(E,\mathcal{L})$ вещественнозначных функций на E и только они. Функции из $B(E,\mathcal{L})$ именуем *ярусными*. Тогда $B_\otimes(E,\mathcal{L}\mid\Gamma) \stackrel{\triangle}{=} \{f \in \mathbf{H}^E \mid f(\cdot)(\gamma) \in B(E,\mathcal{L}) \ \forall \gamma \in \Gamma\}$ есть множество всех отображений из $\mathbf{H}^E$ с ярусными компонентами. До конца раздела полагаем, что $\tau = \otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})$. В этом случае (см. [27, разд. 8])

$$B_\otimes(E,\mathcal{L}\mid\Gamma) \subset \mathbb{F}_{\lim}[E;\mathcal{L};\mathbf{H};\tau]. \tag{5.18}$$

Поэтому при $\mathbf{f} \in B_\otimes(E,\mathcal{L}\mid\Gamma)$ имеем (см. (5.15), (5.18)) свойство (5.17) (в связи с (5.13) отметим, что в [23] приведены содержательные примеры реализации данного свойства). Укажем естественный вариант такого отображения $\mathbf{f}$, фиксируя оператор

$$\gamma \mapsto \mathbf{f}_\gamma \colon \Gamma \to B(E,\mathcal{L}). \tag{5.19}$$

Тогда полагаем, что $\mathbf{f}$ определяется в виде следующего отображения:

$$x \mapsto (\mathbf{f}_\gamma(x))_{\gamma\in\Gamma} \colon E \to \mathbf{H}. \tag{5.20}$$

Ясно, что в нашем случае $\mathbf{f}(\cdot)(\gamma) = \mathbf{f}_\gamma \ \ \forall \gamma \in \Gamma$. Поэтому (см. (5.19)) реализуется требуемое свойство $\mathbf{f} \in B_\otimes(E,\mathcal{L}\mid\Gamma)$, обеспечивающее в силу (5.18) справедливость (5.17). Представление (5.19), (5.20) естественно для конструкций конечно-аддитивной теории меры, которые находят (см. [11; 12]) применение при построении расширений задач о достижимости с ограничениями импульсного характера.

6. Некоторые обобщения: n-сцепленность ($n \in \mathbb{N}$)

Рассмотрим далее естественное развитие конструкций разд. 2. Имеется в виду кратная сцепленность семейств п/м E. Фиксируем в настоящем разделе семейство $\mathcal{L} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$ и полагаем, что при $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E\mid m] \stackrel{\triangle}{=} \Big\{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \;\Big|\; \bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i \neq \varnothing \ \ \forall (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m\Big\}. \tag{6.1}$$

Свойство, используемое в (6.1), именуем *m-сцепленностью* соответствующего подсемейства $\mathcal{L}$. Ясно, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E\mid 1] = \{\mathcal{E} \in \mathcal{P}'(\mathcal{L}) \mid \Sigma \neq \varnothing \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E}\}$ и

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E\mid 2] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E] \tag{6.2}$$

(см. (2.1), (6.1)). Итак, в (6.1) мы имеем (см. (6.2)) обобщение “обычной” сцепленности. Из (6.1) легко следует, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E\mid m+1] \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E\mid m] \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{6.3}$$

Кроме того, как легко видеть (см. (1.10), (6.1)),

$$(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid n]. \tag{6.4}$$

Из (6.3) и (6.4) следует факт монотонной сходимости последовательности семейств $(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid k])_{k\in\mathbb{N}}$ к $(\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$. Введем в рассмотрение максимальные кратные сцепленные подсемейства $\mathcal{L}$: при $m \in \mathbb{N}$ полагаем

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m]$$
$$\triangleq \big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m] \bigm| \forall \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m]\ \ (\mathcal{E} \subset \mathcal{S}) \Longrightarrow (\mathcal{E} = \mathcal{S})\big\}. \tag{6.5}$$

Подобно (2.3) непосредственно проверяется, что

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \,|\, m+1] = \Big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \,|\, m+1] \Big| \forall L \in \mathcal{L}$$
$$\Big(L \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i\Big) \neq \varnothing\ \ \forall (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m\Big) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E})\Big\} \qquad \forall m \in \mathbb{N} \tag{6.6}$$

(в (6.6) используем “сдвиг” кратности на единицу, что будет удобно в свете последующих построений). По аналогии с предложением 2.1 устанавливается, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m] \qquad \exists \mathcal{S} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m] \colon \mathcal{E} \subset \mathcal{S}. \tag{6.7}$$

Ясно также, что при $L \in \mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}$ и $m \in \mathbb{N}$ непременно $\{L\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m]$. С учетом (6.7) получаем, что при $\mathcal{L}\ \setminus \{\varnothing\} \neq \varnothing$ имеет место свойство $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m] \neq \varnothing\ \ \forall m \in \mathbb{N}$. Отметим простое следствие, касающееся покрытий: если $\mathcal{L} \in (\mathrm{COV})[E \mid \mathcal{H}]$, где $\mathcal{H} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))$, то $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m] \neq \varnothing\ \ \forall m \in \mathbb{N}$. Из (6.1) непосредственно устанавливаем, что

$$(E \in \mathcal{L}) \Longrightarrow (\mathcal{E} \cup \{E\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m]\ \ \forall m \in \mathbb{N}\ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m]).$$

Как следствие получаем очевидное свойство:

$$(E \in \mathcal{L}) \Longrightarrow (E \in \mathcal{E}\ \ \forall m \in \mathbb{N}\ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m]). \tag{6.8}$$

Из (6.8) выводим полезное добавление к построениям разд. 2: если $E \in \mathcal{L}$, то $E \in \mathcal{E}\ \ \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$. В этой связи напомним очевидное следствие свойства (6.2):

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid 2] = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E]. \tag{6.9}$$

Далее, из (6.3), (6.5) и (6.7) вытекает, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \qquad \exists \tilde{\mathcal{E}} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m] \colon \mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{E}}. \tag{6.10}$$

Из (6.10) получаем естественное свойство вписанности (напомним, что для всякого множества T и семейств $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(T))$, $\mathcal{T}_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(T))$

$$(\mathcal{T}_1 \preccurlyeq \mathcal{T}_2) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} (\forall T_2 \in \mathcal{T}_2\ \ \exists T_1 \in \mathcal{T}_1 \colon T_2 \subset T_1);$$

символ $\preccurlyeq$ означает вписанность $\mathcal{T}_2$ в $\mathcal{T}_1$): при $m \in \mathbb{N}$ семейство $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$ вписано в $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m]$: $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m] \preccurlyeq \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$.

7. Свойство n-сцепленности подсемейств π-системы ($n \in \mathbb{N}$)

В настоящем разделе очень общие конструкции на основе (6.1), (6.5) рассматриваются в случае $\mathcal{L} \in \pi[E]$ с целью последующего исследования свойств у/ф π-системы $\mathcal{L}$. Напомним в этой связи о возможном применении у/ф в качестве ОЭ при решении абстрактных задач о достижимости в условиях ОАХ. Итак, фиксируем $\mathcal{L} \in \pi[E]$, получая свойство $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid n] \neq \varnothing \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Из определений следует, что (см. (3.1), (6.1))

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m] \qquad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{7.1}$$

Предложение 7.1. *Если $m \in \mathbb{N}$, то $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вводим $m \in \mathbb{N}$. Тогда имеем (6.6). Пусть $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. В силу (3.1), (3.2) семейство $\mathcal{V}$ замкнуто относительно конечных пересечений. Из (7.1) получаем, что $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m+1]$. Пусть $\Lambda \in \mathcal{L}$ таково, что

$$\Lambda \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i\Big) \neq \varnothing \qquad \forall (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{V}^m. \tag{7.2}$$

Фиксируем $\tilde{V} \in \mathcal{V}$ и полагаем, что $V_j \overset{\triangle}{=} \tilde{V} \;\; \forall j \in \overline{1,m}$. Тогда из (7.2) следует, что $\Lambda \cap \tilde{V} \neq \varnothing$. Поскольку выбор $\tilde{V}$ был произвольным, доказано, что $\Lambda \cap V \neq \varnothing \;\; \forall V \in \mathcal{V}$. С учетом (3.2) получаем, что $\Lambda \in \mathcal{V}$. Установлена импликация

$$\Big(\Lambda \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{m} \Sigma_i\Big) \neq \varnothing \qquad \forall (\Sigma_i)_{i \in \overline{1,m}} \in \mathcal{V}^m\Big) \Longrightarrow (\Lambda \in \mathcal{V}). \tag{7.3}$$

Поскольку выбор Λ был произвольным, из (6.6) и (7.3) вытекает, что $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$. Требуемое свойство доказано. □

В связи с предложением 7.1 отметим, что $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid 1] = \{\mathcal{L} \setminus \{\varnothing\}\}$ (тем самым поясняется роль "сдвига" на единицу в формулировке последнего утверждения). Напомним свойство вписанности (6.10), а также то, что $E \in \mathcal{E} \;\; \forall m \in \mathbb{N} \;\; \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m]$. Кроме того, из определений легко следует (см. (6.1), (6.5)), что $\forall m \in \mathcal{N} \;\; \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m] \;\; \forall \Sigma \in \mathcal{E} \;\; \forall L \in \mathcal{L}$

$$(\Sigma \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{E}). \tag{7.4}$$

Теорема 7.1. *Если $m \in \mathbb{N}$, то*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \mid \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \in \mathcal{E} \;\; \forall \Sigma_1 \in \mathcal{E} \;\; \forall \Sigma_2 \in \mathcal{E}\}. \tag{7.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через Ω семейство в правой части (7.5). Тогда из (3.1), (3.2) и предложения 7.1 вытекает, что $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \subset \Omega$. Пусть $\mathcal{V} \in \Omega$. Тогда семейство $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$ замкнуто относительно конечных пересечений. С учетом $(m+1)$-сцепленности $\mathcal{V}$ можно утверждать, что $\varnothing \notin \mathcal{V}$. В соответствии с (7.4) имеем, кроме того, свойство $\forall V \in \mathcal{V} \;\; \forall L \in \mathcal{L}$

$$(V \subset L) \Longrightarrow (L \in \mathcal{V}).$$

Таким образом, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{L})$ (см. (3.1)). Максимальность $\mathcal{V}$ легко следует из (6.5) и (7.1). Итак, $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, чем и завершается проверка вложения $\Omega \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Теорема доказана. □

Итак, мы получили естественное обобщение (4.1).

Отметим, что согласно (6.1) и (6.5) определено пересечение всех семейств $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$, $m \in \mathcal{N}$; при этом получается подсемейство $\mathcal{P}'(\mathcal{L})$.

Теорема 7.2. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]. \tag{7.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом (6.3) и (6.5) проверяется очевидное равенство

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m] = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m+1],$$

а отсюда (см. (6.4), (6.5)) имеет место вложение

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \subset (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]. \tag{7.7}$$

Пусть $\mathcal{V}$ — элемент семейства в правой части (7.6). В этом случае (см. (7.7)) $\mathcal{V} \in (\mathrm{Cen})[\mathcal{L}]$ и, как следствие, в силу (1.11) $\{\cap\}_\sharp(\mathcal{V}) \in \beta^0[\mathcal{L}]$. Тогда (см. (3.2), (3.3)) для некоторого у/ф $\mathcal{W} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$

$$\mathcal{V} \subset \{\cap\}_\sharp(\mathcal{V}) \subset \mathcal{W} \tag{7.8}$$

(используем построения [5, §5]). Пусть $n \in \mathbb{N}$. Согласно предложению 7.1 $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid n+1]$ и, в частности, $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid n+1]$. Поскольку $\mathcal{V} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid n+1]$, то (см. (6.5), (7.8)) $\mathcal{V} = \mathcal{W}$, а потому $\mathcal{V} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Итак,

$$\bigcap_{m\in\mathbb{N}} \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \subset \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}).$$

Противоположное вложение извлекается из предложения 7.1, чем и завершается проверка (7.6). $\square$

Итак, последовательность $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$, $m \in \mathbb{N}$, всегда реализует $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ “в пределе” (см. (7.6)). Представляют интерес случаи, когда $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$, где $m \in \mathbb{N}$. Этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

8. Условия n-сцепленной реализации ультрафильтров

В настоящем разделе мы сравниваем множества $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$ при $m \in \mathbb{N}$. Речь пойдет о положениях, подобных (4.10) и предложению 4.1. Напомним, что $\mathcal{L} \in \pi[E]$.

Предложение 8.1. *Если $m \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$, то*

$$\exists (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2}\colon \bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i = \varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем m и $\mathcal{E}$ в соответствии с условиями. В силу теоремы 7.1 имеем для некоторых $M_1 \in \mathcal{E}$ и $M_2 \in \mathcal{E}$ свойство

$$M_1 \cap M_2 \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{E}. \tag{8.1}$$

Тогда согласно (6.6) и (8.1) выводим для некоторого картежа $(\Lambda_i)_{i\in\overline{1,m}} \in \mathcal{E}^m$ свойство

$$(M_1 \cap M_2) \cap \Big(\bigcap_{i=1}^{m} \Lambda_i\Big) = \varnothing. \tag{8.2}$$

Полагаем теперь, что $(\tilde\Lambda_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2}$ определяется условиями

$$(\tilde\Lambda_j \triangleq \Lambda_j \ \ \forall j \in \overline{1,m})\&(\tilde\Lambda_{m+1} \triangleq M_1)\&(\tilde\Lambda_{m+2} \triangleq M_2).$$

В силу (8.2) пересечение всех множеств $\tilde\Lambda_i$, $i \in \overline{1,m+2}$, пусто. $\square$

Получаем в качестве очевидного следствия (см. также (3.1), (3.2)), что при $m \in \mathbb{N}$

$$\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$$

$$= \Big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \;\Big|\; \exists (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2} \colon \bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i = \varnothing\Big\}. \tag{8.3}$$

Из (8.3), в свою очередь, вытекает следующее представление: если $m \in \mathbb{N}$, то

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \Big\{\mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \;\Big|\; \bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i \neq \varnothing \;\; \forall (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{E}^{m+2}\Big\}. \tag{8.4}$$

Совсем кратко отметим ряд простых следствий (8.4). Так, при $m \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) = \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m+2]$$

$$= \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \cap \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+2] \tag{8.5}$$

((8.5) согласуется с теоремой 7.2 и, по сути, уточняет эту теорему). Из (8.5) вытекает, что при $m \in \mathbb{N}$

$$(\mathcal{E} \notin \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m+2] \;\; \forall \mathcal{E} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$$

$$\&(\tilde{\mathcal{E}} \notin \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \;\; \forall \tilde{\mathcal{E}} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+2] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})).$$

Последнее свойство означает, в частности, что максимальные $(m+1)$-сцепленные системы, не являющиеся у/ф, (в отличие от последних) являются “короткоживущими” (утрачивают кратную сцепленность при увеличении параметра сцепленности на единицу).

Предложение 8.2. *Если* $m \in \mathbb{N}$, *то*

$$\Big(\exists (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{L}^{m+2} \colon (\{\Sigma_i \colon i \in \overline{1,m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m+1]) \& \Big(\bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i = \varnothing\Big)\Big)$$

$$\Longleftrightarrow (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing). \tag{8.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть истинно свойство в левой части (8.6). С учетом этого выберем $(D_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{L}^{\mathrm{m}+2}$ так, что

$$(\mathcal{D} \overset{\triangle}{=} \{D_i \colon i \in \overline{1,m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m+1]) \& \Big(\bigcap_{i=1}^{m+2} D_i = \varnothing\Big). \tag{8.7}$$

Тогда (см. (6.7), (8.7)) для некоторого $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1]$ имеем $\mathcal{D} \subset \mathcal{W}$. При этом $(D_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{W}^{m+2}$. Поэтому согласно (8.3) и (8.7) $\mathcal{W} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$. Тем самым установлена импликация

$$\Big(\exists (\Sigma_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{L}^{m+2} \colon (\{\Sigma_i \colon i \in \overline{1,m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m+1]) \& \Big(\bigcap_{i=1}^{m+2} \Sigma_i = \varnothing\Big)\Big)$$

$$\Longrightarrow (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}) \neq \varnothing).$$

Противоположная импликация легко следует из предложения 8.1 с учетом (6.1), (6.5). □

В свою очередь из предложения 8.2 вытекает, что $\forall m \in \mathbb{N}$

$$(\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E \mid m+1] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}))$$

$$\Longleftrightarrow \Big(\forall \, (L_i)_{i\in\overline{1,m+2}} \in \mathcal{L}^{m+2} \;\; (\{L_i \colon i \in \overline{1,m+2}\} \in \langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle[E \mid m+1])$$

$$\Longrightarrow \Big(\bigcap_{i=1}^{m+2} L_i \neq \varnothing\Big)\Big). \tag{8.8}$$

В связи с (8.8) напомним (4.10). Точнее, согласно [23, (5.3)]

$$(\mathcal{L} \in \pi_*^{\natural}[E]) \Longleftrightarrow (\langle \mathcal{L} - \mathrm{link}\rangle_0[E] = \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})). \tag{8.9}$$

С учетом (1.2) и (6.9) получаем в виде (8.8) нужное обобщение свойства (8.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
2. **Dvalishvili B. P.** Bitopological spaces: Theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. Nort-Holland. Mathematics studies, 2005. 422 p.
3. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
4. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2018. Т. 52. С. 86–102.
5. **Ченцов А. Г.** Фильтры и ультрафильтры в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2011. Вып. 1. С. 113–142. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
6. **Chentsov A. G.** Finitely additive measures and extensions of abstract control problem // J. Math. Sci. 2006. Vol. 133, no. 2. P. 1045–1206. doi: 10.1007/s10958-006-0030-0 .
7. **Ченцов А. Г.** Компактификаторы в конструкциях расширений задач о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 294–309.
8. **Бурбаки Н.** Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968. 272 с.
9. **Ченцов А. Г.** Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 225–239.
10. **Ченцов А. Г.** Об одном примере представления пространства ультрафильтров алгебры множеств // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 293–311.
11. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П.** Об одной задаче асимптотического анализа, связанной с построением области достижимости // Тр. МИРАН. 2015. Т. 291. С. 292–311.
12. **Ченцов А. Г., Бакланов А. П., Савенков И. И.** Задача о достижимости с ограничениями асимптотического характера // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2016. Вып. 1(47). С. 54–118.
13. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры измеримых пространств как обобщенные решения в абстрактных задачах о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 268–293.
14. **Ченцов А. Г., Пыткеев Е. Г.** Некоторые топологические конструкции расширений абстрактных задач о достижимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 312–329.
15. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы // Вестн. Удмурт. ун-та. 2017. Вып. 3. С. 122–141. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
16. **Ченцов А. Г.** Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 257–272.
17. **Федорчук В. В., Филиппов В. В.** Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.
18. **de Groot J.** Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969. P. 89–90.
19. **Mill J. van.** Supercompactness and Wallman spaces // Amsterdam. Math. Center Tract. 1977. 85. 238 p.
20. **Strok M., Szymanski A.** Compact metric spaces have binary subbases // Fund. Math. 1975. Vol. 89, № 1. P. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91 .
21. **Ченцов А. Г.** Суперрасширение как битопологическое пространство // Изв. Ин-та математики и информатики Удмурт. ун-та. 2017. Т. 49. С. 55–79.
22. **Архангельский А. В.** Компактность // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1989. Т. 50. С. 7–128.
23. **Ченцов А. Г.** Суперкомпактные пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25, № 2. С. 240–257.
24. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
25. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
26. **Александров П. С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
27. **Ченцов А. Г.** Множества притяжения в абстрактных задачах о достижимости: эквивалентные представления и основные свойства // Изв. вузов. Математика. 2013. № 11. С. 33–50.

28. **Ченцов А. Г.** Преобразования ультрафильтров и их применение в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. 2012. Вып. 3. С. 85–102. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)
29. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht;Boston;London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
30. **Ченцов А. Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. 2014. Вып. 1. С. 87–101. (Математика. Механика. Компьютерные науки.)

Поступила 15.11.2019
После доработки 25.12.2019
Принята к публикации 14.01.2020

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [Theory of Stochastic Processes]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. ISBN: 5-9221-0335-0 .
2. Dvalishvili B.P. *Bitopological spaces: theory, relations with generalized algebraic structures, and applications*. Ser. Nort-Holland Mathematics Studies, vol. 199, Amsterdam; Boston; Heidelberg; London; N Y: Elsevier, 2005, 422 p. ISBN: 9780444517937 .
3. Engelking R. *General topology*. Ser. Sigma series in pure mathematics, vol. 6. Berlin: Heldermann Verlag, 1989, 535 p. ISBN: 3885380064 . Translated to Russian inder the title *Obshchaya topologiya*. Moscow: Mir Publ., 1986, 752 p.
4. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions. *Izv. IMI UdGU*, 2018, vol. 52, pp. 86–102 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2018-52-07 .
5. Chentsov A.G. Filters and ultrafilters in the constructions of attraction sets. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2011, no. 1, pp. 113–142 (in Russian).
6. Chentsov A.G. Finitely additive measures and extensions of abstract control problems. *J. Math. Sci.*, 2006, vol. 133, no. 2, pp. 1045–1206. doi: 10.1007/s10958-006-0030-0 .
7. Chentsov A.G. Compactifiers in extension constructions for reachability problems with constraints of asymptotic nature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 296, suppl. 1, pp. 102–118. doi: 10.1134/S0081543817020109 .
8. Bourbaki N. *General topology. Chapters 1–4*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1995, 437 p. ISBN: 978-3-642-61701-0 . Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya. Osnovnye struktury*. Moscow: Nauka Publ., 1968, 272 p.
9. Chentsov A.G. One representation of the results of action of approximate solutions in a problem with constraints of asymptotic nature. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2012, vol. 276, suppl. 1, pp. S48–S62. doi: 10.1134/S0081543812020046 .
10. Chentsov A.G. On one example of representing the ultrafilter space for an algebra of sets. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2011, vol. 17, no. 4, pp. 293–311 (in Russian).
11. Chentsov A.G., Baklanov A.P. On an asymptotic analysis problem related to the construction of an attainability domain. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 279–298. doi: 10.1134/S0081543815080222 .
12. Chentsov A.G., Baklanov A.P., Savenkov I.I. A problem of attainability with constraints of asymptotic nature. *Izv. IMI UdGU*, 2016, no. 1(47), pp. 54–118 (in Russian).
13. Chentsov A.G. Ultrafilters of measurable spaces as generalized solutions in abstract attainability problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. S12–S39. doi: 10.1134/S0081543811090021 .

14. Chentsov A.G., Pytkeev E.G. Some topological structures of extensions of abstract reachability problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2016, vol. 292, suppl. 1, pp. 36–54. doi: 10.1134/S0081543816020048 .
15. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 365–388 (in Russian). doi: 10.20537/vm170307 .
16. Chentsov A.G. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257–272 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272 .
17. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii* [General topology: Basic constructions]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 336 p. ISBN: 5-9221-0618-X
18. de Groot J. Superextensions and supercompactness. *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications.* Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
19. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces.* Ser. Math. Center Tracts, no. 85. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 238 p. ISBN: 90-6196-151-3 .
20. Strok M, Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases. *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91 .
21. Chentsov A.G. Superextension as bitopological space. *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 49, pp. 55–79 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-03 .
22. Arkhangel'skii A.V. Compactness. *General topology II. Encycl. Math. Sci.*, 1996, vol. 50, pp. 1–117.
23. Chentsov A.G. Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 240–257 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257 .
24. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* ISBN: 9780444534170 . Warszawa: PWN - Polish Scientific Publishers, 1968, 417 p. Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv.* Moscow: Mir Publ., 1970, 416 p.
25. Neveu J. *Mathematical foundations of the calculus of probability.* San Francisco: Holden-Day, 1965, 223 p. Translated to Russian under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei.* Moscow: Mir Publ., 1969, 309 p.
26. Alexandroff P.S. *Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie* [Introduction to set theory and to general topology]. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1984, 336 p. Original Russian text published in Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu.* Moscow: Editorial URSS, 2004, 368 p.
27. Chentsov A.G. Attraction sets in abstract attainability problems: equivalent representations and basic properties. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 28–44. doi: 10.3103/S1066369X13110030 .
28. Chentsov A.G. The transformation of ultrafilters and their application in constructions of attraction sets. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 85–102. (in Russian)
29. Chentsov A.G., Morina S.I. *Extensions and relaxations*, Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ., 2002, 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0 .
30. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 87–101 (in Russian).

Received November 15, 2019
Revised December 25, 2019
Accepted January 14, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00410).

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. G. Chentsov. Ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 274–292 .