

УДК 517.911.5

**ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ¹****А. В. Фоминых, В. В. Карелин, Л. Н. Полякова**

В статье рассматриваются некоторые классы задач с дифференциальными включениями, для которых разработан эффективный алгоритм их решения, базирующийся на градиентном методе. В первой части статьи описывается алгоритм решения дифференциальных включений со свободным или с закрепленным правым концом и с выпуклым непрерывным многозначным отображением, допускающим опорную функцию с непрерывной производной по фазовым координатам. Данный алгоритм состоит в сведении рассматриваемой задачи к задаче минимизации некоторого функционала в функциональном пространстве. Для этого функционала получен градиент Гато, найдены необходимые, а в некоторых случаях и достаточные условия минимума. Далее к этому функционалу применяется метод градиентного спуска. Во второй части статьи разработанный подход демонстрируется на решении трех основных классов дифференциальных включений, в частности 1) дифференциального включения, получающегося из управляемой системы с переменной областью управления, зависящей от фазовых координат, 2) дифференциального включения, содержащего в правой части прямую сумму, объединение или пересечение выпуклых множеств, 3) линейной интервальной системы ОДУ, рассматриваемой как дифференциальное включение.

Ключевые слова: дифференциальное включение, градиент Гато, опорная функция, метод градиентного спуска, линейные интервальные системы, переменная область управления.

A. V. Fominyh, V. V. Karelin, L. N. Polyakova. Gradient method for solving some types of differential inclusions.

We discuss some classes of problems with differential inclusions, for which an efficient algorithm based on the gradient method is developed. The first part of the paper describes an algorithm for solving differential inclusions with a free or a fixed right end and a convex continuous multivalued mapping that admits a support function with a continuous derivative with respect to the phase coordinates. This algorithm reduces the problem under consideration to the problem of minimizing a certain functional in a function space. For this functional, the Gâteaux gradient is obtained and necessary and, in some cases, sufficient minimum conditions are found. Further, the gradient descent method is applied to the functional. In the second part of the paper, the developed approach is illustrated by solving three main classes of differential inclusions: (1) a differential inclusion obtained from a control system with a variable control domain depending on the phase coordinates, (2) a differential inclusion containing the direct sum, union, or intersection of convex sets in the right-hand side, (3) a linear interval system of ODEs considered as a differential inclusion.

Keywords: differential inclusion, Gâteaux gradient, support function, gradient descent method, linear interval system, variable control domain.

MSC: 34A60, 49J52, 49J53

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-256-273

Введение

В управляемых системах дифференциальные включения возникают естественным образом, если систему ОДУ $\dot{x}(t) = f(x, u, t)$, $u \in U$ (с заданными краевыми условиями или без них), переписать в виде включения $\dot{x} \in F(x, t)$ (с теми же краевыми условиями), где $F(x, t) = \{f(x, u, t) \mid u \in U\}$, U — некоторое множество управлений. В дальнейшем условия на правые части системы и структура множества управлений будут уточнены. Задачи с исходной системой и полученным включением оказываются эквивалентными при естественных предположениях [1]. Однако дифференциальное включение является значительно более общим объектом, нежели объект, возникающий из указанных систем управления. В виде дифференциальных включений могут быть записаны дифференциальные неравенства, управляемые

¹Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 18-71-00006).

системы с фазовыми ограничениями, интервальные системы дифференциальных уравнений и др. Прикладная полезность таких объектов не вызывает сомнений [2–4], поэтому представляет интерес разработка эффективных методов исследования моделей, описываемых дифференциальными включениями. Особенно полезным такой подход оказывается при описании систем с неполной информацией, систем с разрывными правыми частями, а также интервальных динамических систем.

Данная статья является продолжением исследований [5; 6], в которых на основе градиентного метода в функциональном пространстве разрабатывался алгоритм решения дифференциальных включений со свободным или с закрепленным правым концом и с выпуклым непрерывным многозначным отображением, допускающим опорную функцию с непрерывной производной по фазовым координатам. Несмотря на то что такие включения являются лишь частным случаем намного более общего класса дифференциальных включений с менее ограничительными требованиями на правую часть, рассматриваемая проблема весьма широка и позволяет исследовать достаточно богатый и разнообразный набор классов задач. Так, например, случай переменной (имеется в виду переменная как по времени, так и по фазовым координатам) области управления $U(x, t)$ в приведенной выше управляемой системе приводит к такой же по форме задаче с дифференциальными включениями (в предположении сохранения указанных ограничений на опорную функцию множества, стоящего в правой части включения). Уже это замечание показывает, что постановка задачи об отыскании решений дифференциального включения существенно обобщает постановку задачи об отыскании оптимальных процессов в управляемых объектах с постоянной или переменной лишь по времени областью управления. Интересно также качественно выделить и другие классы задач, не являющиеся классическими с позиции теории управления, но описываемые на языке дифференциальных включений и достаточно эффективно решаемые с помощью разрабатываемого подхода. Это дифференциальные включения, содержащие в правой части прямую сумму, объединение или пересечение выпуклых множеств, а также линейные интервальные системы ОДУ.

В статьях [7–14] (и в литературе, указанной в их ссылках) для численного решения дифференциальных включений применяются аналоги известных методов решения ОДУ, такие как схемы Эйлера и Рунге — Кутты, методы конечных разностей и т. п. Все из перечисленных работ, кроме последней, исследуют лишь задачу со свободным правым концом (задачу Коши для включений). Заметим, что в отличие от подавляющего большинства методов оптимального управления и решения дифференциальных включений, которые являются дискретными, разрабатываемый алгоритм непрерывен. Этот подход может быть в каких-то случаях менее эффективным с вычислительной точки зрения, чем его дискретные аналоги, но теоретически интересен и оригинален тем, что не основан на какой бы то ни было дискретизации исходной задачи.

В первой части статьи для общей постановки кратко описывается алгоритм, построенный в работах [5; 6]. Во второй части его работа демонстрируется на трех качественно различных классах задач с дифференциальными включениями.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t) \tag{1.1}$$

с начальной точкой

$$x(0) = x_0 \tag{1.2}$$

и конечным условием

$$x(T) = x_T. \tag{1.3}$$

В формуле (1.1) $F(x, t)$ — заданное непрерывное многозначное отображение при $t \in [0, T]$, $x(t)$ — n -мерная непрерывная вектор-функция фазовых координат с кусочно-непрерывной и ограниченной на $[0, T]$ производной, $T > 0$ — заданный конечный момент времени. Будем полагать, что каждому моменту времени $t \in [0, T]$ и каждой фазовой точке $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $F(x, t)$ ставит в соответствие некоторый выпуклый компакт из \mathbb{R}^n . Предположим также, что опорная функция множества $F(x, t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна по совокупности переменных (x, ψ, t) на множестве $\mathbb{R}^n \times S \times [0, T]$, где S — единичная сфера в \mathbb{R}^n с центром в начале координат. В формулах (1.2), (1.3) $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданные векторы.

Требуется найти вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, которая удовлетворяет дифференциальному включению (1.1) и переводит объект из заданного начального состояния (1.2) в заданное конечное положение (1.3). Предполагаем, что такое решение существует.

Здесь $C_n[0, T]$ — пространство n -мерных непрерывных на $[0, T]$ вектор-функций с производной из пространства $P_n[0, T]$; $P_n[0, T]$ — пространство кусочно-непрерывных и ограниченных на $[0, T]$ n -мерных вектор-функций. Далее в статье также потребуется пространство $L_n^2[0, T]$ суммируемых на $[0, T]$ с квадратом n -мерных вектор-функций.

Если $t_0 \in [0, T)$ — точка разрыва вектор-функции \dot{x} , то для определенности полагаем, что $\dot{x}(t_0)$ — правосторонняя производная вектор-функции \dot{x} в точке t_0 ; $\dot{x}(T)$ — левосторонняя производная вектор-функции \dot{x} в точке T .

Для произвольного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ опишем опорную функцию вектора $\psi \in \mathbb{R}^n$ соотношением $c(F, \psi) = \sup_{f \in F} \langle f, \psi \rangle$, где $\langle a, b \rangle$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$.

З а м е ч а н и е 1. Вместо траекторий из пространства $C_n[0, T]$ можно рассматривать абсолютно непрерывные на отрезке $[0, T]$ траектории с измеримыми и почти всюду ограниченными на $[0, T]$ производными (которые должны удовлетворять дифференциальному включению почти везде на $[0, T]$). Выбор пространства решений в статье объясняется возможностью их практического построения.

З а м е ч а н и е 2. Из дальнейшего будет видно, что разрабатываемый алгоритм позволяет решать как поставленную задачу (1.1)–(1.3), так и более простую задачу Коши (1.1), (1.2) (если отсутствует условие на правом конце). Поэтому заметим, что при сделанных предположениях существует [1] даже непрерывно дифференцируемое (классическое) решение задачи Коши (1.1), (1.2). Кроме того, как правило, задача (1.1), (1.2) имеет бесконечное число решений. Как было только что отмечено, этот набор решений содержит непрерывно дифференцируемое решение. Однако применяемый в статье метод не гарантирует, что будет получено непрерывно дифференцируемое решение. Возможно, будет получено лишь кусочно-дифференцируемое решение (из пространства $P_n[0, T]$) (см. пример 2 в разд. 6).

2. Сведение к вариационной задаче

Далее для краткости будем иногда писать F вместо $F(x, t)$. Поскольку $\forall t \in [0, T]$ и $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $F(x, t)$ представляет собой выпуклый компакт в \mathbb{R}^n , то включение (1.1) можно переписать иначе [15]:

$$\langle \dot{x}(t), \psi \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0, T].$$

Обозначим $z(t) = \dot{x}(t)$, $z \in P_n[0, T]$, тогда с учетом (1.2) будет

$$x(t) = x_0 + \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Положим

$$\begin{aligned} \ell(\psi, z, t) &= \langle z(t), \psi \rangle - c(F(x(t), t), \psi), \\ h(z, t) &= \max_{\psi \in S} \max\{0, \ell(\psi, z, t)\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

и составим функционал

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2(z, t) dt. \quad (2.5)$$

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{z \in P_n[0, T] \mid \varphi(z) = 0\}.$$

Нетрудно убедиться, что для функционала (2.5) справедливы соотношения

$$\begin{cases} \varphi(z) = 0 \ (z \in \Omega), & \text{если } \langle \dot{x}(t), \psi \rangle \leq c(F(x(t), t), \psi) \quad \forall \psi \in S, \quad \forall t \in [0, T], \\ \varphi(z) > 0 \ (z \notin \Omega) & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. включение (1.1) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi(z) = 0$.

Введем функционал

$$\chi(z) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T \right)^2. \quad (2.6)$$

Видно, что условие на левом конце (1.2) выполнено автоматически в силу определения функции $z(t)$, а условие на правом конце (1.3) выполнено тогда и только тогда, когда $\chi(z) = 0$.

Построим функционал

$$I(z) = \varphi(z) + \chi(z). \quad (2.7)$$

Обозначим через z^* точку глобального минимума функционала (2.7). Видно, что нахождение решения исходной задачи

$$x^*(t) = x_0 + \int_0^t z^*(\tau) d\tau$$

свелось к минимизации функционала (2.7) на пространстве $P_n[0, T]$.

Структура функционала $I(z)$ естественна, поскольку число $h(z, t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ есть евклидово расстояние от точки $z(t)$ до множества $F(x(t), t)$, функционал (2.5) — это половина квадрата отклонения в $L_n^2[0, T]$ -норме траектории $z(t)$ от множества $F(x, t)$, а функционал (2.6) — половина квадрата евклидова расстояния точки $x(T)$ от заданной точки x_T . Таким образом, целью является минимизация суммы этих расстояний.

3. Необходимые условия минимума

В работе [6] доказывается дифференцируемость по Гато функционала $I(z)$. Доказательство проводится с помощью выписывания классических вариаций функционалов $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ и опирается на теорему Лебега о мажорируемой сходимости, а также на такие известные факты, как аддитивность опорной функции по первому аргументу и теорема Лагранжа о среднем значении. Приведем соответствующую теорему.

Теорема 1 [6, теорема 1]. *Если опорная функция $c(F, \psi)$ множества $F(x, t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна, то функционал $I(z)$ дифференцируем по Гато и его градиент в точке z находится по формуле*

$$\nabla I(z) = h(z, t) \psi^*(z, t) - \int_t^T h(z, \tau) \frac{\partial c(F(x(\tau), \tau), \psi^*(z, \tau))}{\partial x} d\tau + x_0 + \int_0^T z(t) dt - x_T. \quad (3.1)$$

Заметим, что для дифференцируемости по Гато существенным фактором является непрерывность производной опорной функции множества из правой части дифференциального включения по фазовым переменным. Для дифференцируемости по Гато также существенна единственность вектора $\psi^*(z, t)$, а именно: в силу структуры функционала (2.4) легко заметить, что в случае $\ell(\psi, z, t) > 0$ максимум выражения $\max\{0, \ell(\psi, z, t)\} = \ell(\psi, z, t)$ достигается на единственном элементе $\psi^*(z, t) \in S$. Подробное, хотя и несложное, обоснование этого факта также см. в [6].

Очевидно, что необходимым и достаточным условием минимума функционала $I(z)$ является равенство $I(z^*) = 0$. Однако для построения численных методов требуется более конструктивное условие минимума: необходимо (см. [16]), чтобы градиент Гато обращался в ноль на решении z^* исходной задачи:

Теорема 2. Пусть опорная функция $c(F, \psi)$ множества $F(x, t)$ дифференцируема по x и ее производная по x непрерывна. Для того чтобы точка z^* доставляла минимум функционалу $I(z)$ необходимо выполнение следующего условия:

$$0_n = h(z^*, t)\psi^*(z^*, t) - \int_t^T h(z^*, \tau) \frac{\partial c(F(x^*(\tau), \tau), \psi^*(z^*, \tau))}{\partial x} d\tau + x_0 + \int_0^T z^*(t) dt - x_T, \quad (3.2)$$

где 0_n — нулевой элемент пространства $P_n[0, T]$.

З а м е ч а н и е 3. Если рассматривается только задача Коши (1.1), (1.2), то функционал $\chi(z)$ для учета условия на правом конце отсутствует. Тогда в формулах (3.1) и (3.2) пропадают вторые строчки, соответствующие градиенту Гато функционала $\chi(z)$. Кроме того, из единственности нулевого решения однородного интегрального уравнения Вольтерры второго рода заключаем, что условие (3.2) (в котором отсутствует вторая строчка) является в данном случае не только необходимым, но и достаточным условием (глобального) минимума.

4. Метод наискорейшего спуска

Опишем метод наискорейшего спуска [17] для поиска стационарных точек функционала $I(z)$. Фиксируем произвольную точку $z_1 \in P_n[0, T]$. Пусть уже построена точка $z_k \in P_n[0, T]$. Если выполнено условие минимума (3.2), то точка z_k является стационарной точкой функционала $I(z)$ и процесс прекращается. В противном случае положим $z_{k+1} = z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)$, где вектор-функция $x_k(t) = x_0 + \int_0^t z_k(\tau) d\tau$, а величина γ_k есть решение следующей задачи одномерной минимизации:

$$\min_{\gamma > 0} I(z_k - \gamma \nabla I(z_k)) = I(z_k - \gamma_k \nabla I(z_k)). \quad (4.1)$$

В силу (4.1) $I(z_{k+1}) \leq I(z_k)$. Если последовательность $\{z_k\}$ конечна, то последняя ее точка является стационарной точкой функционала $I(z)$ по построению.

Предположим, что функционал $\nabla I(z)$ равномерно непрерывен и ограничен в шаре пространства $L_n^2[0, T]$ с центром в начале координат и радиуса $r' > \sup_{z \in Z_1} \|z\|_{L_n^2[0, T]}$ (множество Лебега $Z_1 = \{z \in P_n[0, T] \mid I(z) \leq I(z_1)\}$ считаем ограниченным по норме $L_n^2[0, T]$). Если последовательность $\{z_k\}$ бесконечна, то метод сходится [18] в следующем смысле:

$$\|\nabla I(z_k)\|_{L_n^2[0, T]} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 4. Заметим, что задача (1.1)–(1.3) является в общем случае некорректно поставленной, поскольку, как уже отмечалось, в ней, как правило, будет бесчисленное множество решений. Известно, что некорректно поставленные оптимизационные задачи могут

приводить к некоторым проблемам сходимости численных методов. Однако в данной статье исследование сходимости метода ограничивается лишь приведением условий, при которых имеет место “слабая сходимость” (в смысле стремления к нулю нормы градиента Габо минимизируемого функционала). Вопросы сходимости, конечно, требуют дополнительного более подробного изучения, однако с практической точки зрения в данном случае имеется удобный критерий проверки решения: на решении построенный функционал должен обращаться в ноль. Если в найденной в ходе работы метода стационарной точке z' имеем $I(z') \neq 0$, то естественной для подобных оптимизационных методов рекомендацией является запуск алгоритма из другой начальной точки.

5. Примеры решения некоторых типов дифференциальных включений

5.1. Линейные интервальные системы ОДУ

Рассмотрим линейную нестационарную интервальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + g(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} [\underline{a}_{11} \ \bar{a}_{11}], [\underline{a}_{12} \ \bar{a}_{12}], \dots, [\underline{a}_{1n} \ \bar{a}_{1n}], \\ [\underline{a}_{21} \ \bar{a}_{21}], [\underline{a}_{22} \ \bar{a}_{22}], \dots, [\underline{a}_{2n} \ \bar{a}_{2n}], \\ \dots \\ [\underline{a}_{n1} \ \bar{a}_{n1}], [\underline{a}_{n2} \ \bar{a}_{n2}], \dots, [\underline{a}_{nn} \ \bar{a}_{nn}] \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} [\underline{g}_1(t) \ \bar{g}_1(t)], \\ [\underline{g}_2(t) \ \bar{g}_2(t)], \\ \dots \\ [\underline{g}_n(t) \ \bar{g}_n(t)] \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \quad (5.3)$$

В формуле (5.1) T — заданный конечный момент времени, $x \in C_n[0, T]$, $\dot{x} = z \in P_n[0, T]$. В формуле (5.2) $\underline{a}_{ij}(t)$ и $\bar{a}_{ij}(t)$, $\underline{a}_{ij}(t) \leq \bar{a}_{ij}(t) \ \forall t \in [0, T]$, $i, j = \overline{1, n}$, — заданные непрерывные функции, $\underline{g}_i(t)$ и $\bar{g}_i(t)$, $\underline{g}_i(t) \leq \bar{g}_i(t) \ \forall t \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$, — также заданные непрерывные функции. В дальнейшем для краткости будем писать $\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}, \underline{g}_i, \bar{g}_i$ вместо $\underline{a}_{ij}(t), \bar{a}_{ij}(t), \underline{g}_i(t), \bar{g}_i(t)$ соответственно, $i, j = \overline{1, n}$, $t \in [0, T]$. В формуле (5.3) $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ — заданные векторы. Под решением задачи (5.1), (5.3) здесь будем понимать такую вектор-функцию $x^* \in C_n[0, T]$, которая удовлетворяет системе (5.1) и краевым условиям (5.3). Это определение согласуется с определением, данным выше для общей задачи (1.1)–(1.3). Предполагаем, что такое решение существует.

Перепишем систему (5.1) в форме дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = A(t)x + g(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5.4)$$

Очевидно, $F(x, t)$ является выпуклым компактным множеством из \mathbb{R}^n для каждого момента времени $t \in [0, T]$ и для каждой фазовой точки $x \in \mathbb{R}^n$. Нетрудно также видеть, что отображение $F(x, t)$ непрерывно. Таким образом, пришли к рассматриваемой в статье постановке задачи.

В данном случае можно в общем виде выписать опорную функцию множества (5.4) и ее производную по фазовым координатам, которые требуются в формуле (3.1). Обозначим

$$c_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\underline{a}_{ij} + \bar{a}_{ij}}{2} x_j + \frac{\underline{g}_i + \bar{g}_i}{2}, \quad i = \overline{1, n},$$

и

$$r_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij}}{2} |x_j| + \frac{\bar{g}_i - \underline{g}_i}{2}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда опорная функция имеет вид

$$c(F(x, t), \psi) = \sum_{i=1}^n c_i(x) \psi_i + \sum_{i=1}^n r_i(x) |\psi_i| \quad \forall \psi \in S.$$

Получаем для каждого $\psi \in S$ (если $x_i(t) \neq 0$, $i = \overline{1, n}$)

$$\frac{\partial c(F(x, t), \psi)}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{a_{ji} + \bar{a}_{ji}}{2} \psi_j + \text{sign } x_i \sum_{j=1}^n \frac{\bar{a}_{ji} - a_{ji}}{2} |\psi_j|.$$

Видно, что производная по фазовым координатам x опорной функции множества (5.4) непрерывна при $x \neq \mathbf{0}$.

Предположим, что координата $x^i(t)$, $i = \overline{1, n}$, $t \in [0, T]$, обращается в ноль только не более чем в счетное число моментов времени $t_{ij} \in [0, T]$, $i = \overline{1, n}$. Обозначим такое множество траекторий как $X[0, T]$. Поскольку опорная функция множества $F(x, t)$ в данном классе дифференциальных включений будет обладать непрерывной производной по фазовым координатам лишь при $x \neq \mathbf{0}$, то теоремы 1, 2 остаются верными только в точках $x \in X[0, T]$ и $x^* \in X[0, T]$ соответственно. Итак, предположим, что решение x^* принадлежит множеству $X[0, T]$. Однако заметим, что сделанное предположение, по-видимому, не является обременительным, поскольку его нарушение означает, что существует такая “координата” $x^{\bar{i}}$, $\bar{i} \in \{1, \dots, n\}$, которая остается в нулевом положении (и имеет нулевую “скорость”) на некотором подмножестве интервала $[0, T]$ ненулевой меры. Такая ситуация не выглядит естественной для управляемых систем на конечном интервале $[0, T]$. Как было только что отмечено, чтобы применить метод наискорейшего спуска корректно, нужно считать, что на каждой итерации $x_k \in X[0, T]$, $k = 1, 2, \dots$. Приведем пример реализации алгоритма.

Пример 1. Рассмотрим интервальную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + [t, 2t]x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + [-t^2, 0], \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $t \in [0, 1]$. Заданы краевые условия

$$x(0) = (2, 3)', \quad x(1) = (1.5, 1)'. \quad (5.6)$$

В этом примере

$$c(F, \psi) = (-x_1 + 1.5tx_2)\psi_1 + (x_1 - 2x_2 - 0.5t^2)\psi_2 + 0.5t|x_2||\psi_1| + 0.5t^2|\psi_2|.$$

За начальное приближение была выбрана точка $z_1 = (1, 1)'$, а тогда $x_1 = (2 + t, 3 + t)'$. Было проделано 7 итераций в соответствии с предложенным алгоритмом. В результате на интервале $[0, 1]$ была получена точка

$$x^*(t) := x_7(t) = \begin{pmatrix} 2 - 1.0002t^3 + 2.4732t^2 - 1.9937t - 0.0253t^4 + 0.0425t^5 + 0.0014t^6 + 0.0022t^7 \\ 3 - 1.1473t^3 + 3.003t^2 - 4.0125t + 0.2522t^4 - 0.1034t^5 + 0.0125t^6 - 0.0044t^7 \end{pmatrix}$$

(она выписана с точностью вплоть до 4-го знака после запятой), и имеем

$$\|\nabla I(z^*)\|_{L_n^2[0,1]} \leq 10^{-5}, \quad I(z^*) \leq 2 \times 10^{-5}.$$

Можно проверить, что на 7-й итерации функция $z_1^*(t) + x_1^*(t)$ лежит “практически” “между” функциями $tx_2^*(t)$ и $2tx_2^*(t)$, а функция $z_2^*(t) - x_1^*(t) + 2x_2^*(t)$ находится “практически” “между” функциями $-t^2$ и 0 в каждый момент времени $t \in [0, 1]$; мы видим, что получено приближенное решение интервальной системы (5.5) (слова “практически” означают здесь что полученное значение функционала $I(z^*)$ отличается от требуемого нулевого значения не более, чем на величину порядка 2×10^{-5}). Легко убедиться (вычислив $x_7(0)$ и $x_7(1)$), что краевые условия (5.6) для траектории $x^*(t)$ также удовлетворены.

5.2. Управляемые системы

Вернемся к управляемым системам, переписывание которых на языке дифференциальных включений и послужило, по существу, поводом к возникновению изначально интереса к этому математическому объекту. Заметим, что если рассмотреть управляемые системы на конечном промежутке времени $[0, T]$ (с заданным начальным условием и свободным или закрепленным правым концом), описываемые системой ОДУ $\dot{x} = f(x, u, t)$, где в правой части стоит непрерывно дифференцируемая функция $f(x, u, t)$ (по переменной t достаточно предположить лишь кусочную непрерывность и ограниченность), а управление принадлежит некоторому выпуклому компакт $U(t)$ при каждом t , то соответствующие задачи управления можно решать предложенным методом как дифференциальное включение с многозначным отображением $F(x, t) = \{f(x, u, t) \mid u \in U(t)\}$, $t \in [0, T]$, лишь бы его опорная функция удовлетворяла требованиям, наложенным на нее в постановке задачи. (При этом считаем, что фазовые траектории, их производные и управления принадлежат тем же классам функций, что и в постановке задачи с дифференциальными включениями, то есть классам $C_n[0, T]$, $P_n[0, T]$ и $P_m[0, T]$ соответственно.)

Рассмотрим ту же ситуацию, что и в предыдущем абзаце, но считаем теперь, что область управления зависит не только от времени, но и от фазовых координат; тогда имеем многозначное отображение $F(x, t) = \{f(x, u, t) \mid u \in U(x, t)\}$, $t \in [0, T]$. Несмотря на то что с позиции теории управления переменная (по фазовым переменным) область управления $U(x, t)$ существенно усложнит задачу, с точки зрения дифференциальных включений получаем такую же по форме постановку задачи, что и в случае не зависящей от x области управления. Конечно, чтобы применить предложенный в данной статье алгоритм для решения полученной задачи, нужно предположить, что наложенные в постановке задачи условия на опорную функцию множества, стоящего в правой части дифференциального включения, остаются в такой ситуации выполненными. Приведем соответствующий пример.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = [0.5x^2t, 1.5x^2t], \quad t \in [0, 1], \tag{5.7}$$

и краевые условия

$$x(0) = 1, \quad x(1) = 1.5. \tag{5.8}$$

В этом примере $c(F, \psi) = x^2t(\psi + 0.5|\psi|)$, $\frac{\partial c}{\partial x} = 2xt(\psi + 0.5|\psi|)$. За начальное приближение была взята точка $z_1 = 1$, а тогда $x_1 = 1 + t$. Применяя алгоритм статьи, на 3-й итерации

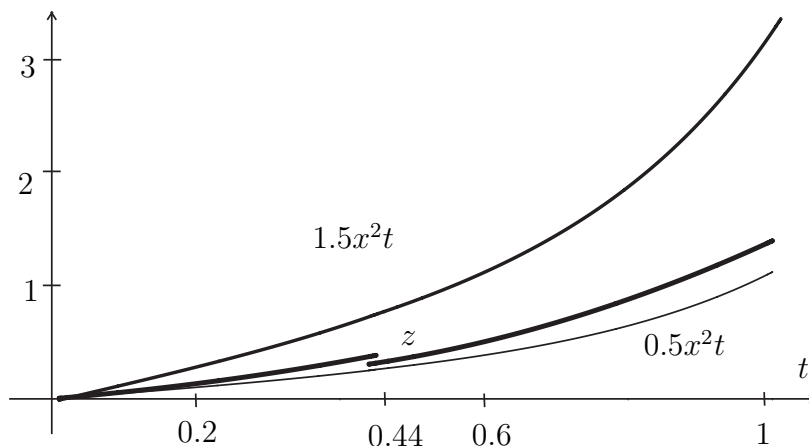


Рис. 1. Решение примера 2

получаем точку (она выписана с точностью вплоть до 4-го знака после запятой), которая является решением данного примера:

$$x^*(t) := x_3(t) = \begin{cases} 1 + 0.0554t^4 + 0.2001t^3 + 0.2793t^2, & t \in [0, 0.44], \\ 0.5918t^3 - 0.30123t^2 + 0.2289t + 0.9809, & t \in [0.44, 1], \end{cases}$$

На рис. 1 изображена функция $z(t)$ (на 3-й итерации). Поскольку функция $z(t)$ лежит “между” функциями $0.5x^2(t)t$ и $1.5x^2(t)t$ в каждый момент $t \in [0, 1]$, видно, что включение (5.7) удовлетворено. Краевые условия (5.8) также имеют место, в чем легко убедиться, вычислив $x_3(0)$ и $x_3(1)$. Итак, в примере ограничения удовлетворены точно, поэтому $I(z^*) = 0$. \square

Как уже было отмечено, дифференциальные включения часто оказываются полезными при описании разрывных систем. В связи с этим откажемся теперь от предположения непрерывной дифференцируемости и даже просто непрерывности правой части $f(x, u, t)$ по фазовым переменным x . Несмотря на то что функция $f(x, u, t)$ теперь не является непрерывной по x , оказывается, что для многозначного отображения $F(x, t) = \{f(x, u, t) \mid u \in U(x, t)\}$ опорная функция $c(F(x, t), \psi)$ может обладать непрерывной производной по фазовым координатам, как это и предполагается в постановке задачи. Представляется, что в общем случае разрывные системы устроены достаточно сложно, чтобы заранее можно было сказать о структуре исходной разрывной системы ОДУ, для которой указаный только что случай имел место. Этот вопрос еще требует тщательного исследования и представляется перспективным с точки зрения исследования некоторых классов задач с разрывными системами. Однако нетрудно привести пример, когда это действительно так, и тогда предлагаемый в статье подход позволяет строить конкретные решения подобных задач.

Пример 3. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = \omega(x_2)u_1,$$

$$\dot{x}_2 = \omega(x_2)u_2$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

При этом $t \in [0, T]$, $u \in B$ (единичный шар в \mathbb{R}^n с центром в начале координат, в данном примере $n = 2$), а функция $\omega(x_2)$ устроена следующим образом:

$$\begin{cases} \omega(x_2) = -1, & \text{если } x_2 < 0, \\ \omega(x_2) = 1, & \text{если } x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Таким образом, правая часть системы оказывается разрывной по фазовым переменным.

Несмотря на это, получающееся при переписывании данной системы дифференциальное включение оказывается очень простым:

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = B, \quad t \in [0, T], \quad (5.9)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T. \quad (5.10)$$

Опорная функция $c(F, \psi) = \|\psi\| = 1$, и $\frac{\partial c}{\partial x} = 0$, поэтому при решении задачи (5.9), (5.10) с использованием алгоритма статьи получаемые формулы будут иметь очень простой вид. \square

Как известно [19], при адекватном описании процессов, задаваемых системами с разрывными правыми частями, возникает необходимость обобщения принятого в классической теории ОДУ определения решения. Приведем один из классических вариантов такого определения [19], а также пример, который укладывается в постановку задачи данной статьи. На конечном интервале $t \in [0, T]$ рассмотрим систему $\dot{x} = f(x, u_1(x, t), \dots, u_r(x, t), t)$, в которой

вектор-функция $f(x, u_1, \dots, u_r, t)$ непрерывна по совокупности аргументов, а вектор-функции $u_i(x, t)$, $i = \overline{1, r}$, разрывны соответственно на множествах M_i , $i = \overline{1, r}$. В каждой точке (x, t) разрыва вектор-функции $u_i(x, t)$, $i = \overline{1, r}$, должно быть задано замкнутое множество $U_i(x, t)$, $i = \overline{1, r}$, — множество возможных значений аргумента u_i , $i = \overline{1, r}$, функции $f(x, u_1, \dots, u_r, t)$. В физических системах множества $U_i(x, t)$, $i = \overline{1, r}$ обычно отвечают за различные блоки. Обозначим $F(x, t) = f(x, u_1, \dots, u_r, t)$ — множество значений функции $f(x, u_1, \dots, u_r, t)$ при фиксированных $x, t \in [0, T]$, а u_1, \dots, u_r пробегает соответственно множества $U_1(x, t), \dots, U_r(x, t)$. Решениями исходного дифференциального уравнения с разрывной правой частью называются решения этого дифференциального включения. Заявленный пример имеет следующий вид.

Пример 4. На заданном конечном промежутке $[0, T]$ система описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_1 = x_1 + \text{sign } x_1,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + \text{sign } x_1$$

с краевыми условиями

$$x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T.$$

При этом считается, что в реальной физической системе функция $u_1(x, t) := \text{sign } x_1$ реализуется при помощи реле и при $x_1 = 0$ (то есть при $x \in M_1$) может принимать любое значение из множества $U_1(x, t) := [-1, 1]$. Предположим, что начальная точка x_0 не находится на поверхности разрыва M_1 . Вне множества M_1 правая часть исходной системы есть однозначная функция, поэтому решение может быть найдено стандартными методами ОДУ. Пусть в некоторый момент времени $t_1 \in (0, 1)$ решение этой системы попадает на поверхность разрыва M_1 . В реально реализуемых физических системах естественна ситуация, когда решение, попав на поверхность разрыва в некоторый момент времени, будет оставаться на ней до конца всего рассматриваемого промежутка [19]. Поэтому, если имеется условие на конечное положение объекта, то его в такой ситуации естественно считать принадлежащим поверхности разрыва: $x_T = (0, x_{2T})$, где значение x_{2T} задано. На множестве M_1 решение исходной системы по только что введенному определению есть решение дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(x, t), \quad F(x, t) = (0, x_2 + [-1, 1])', \quad t \in [t_1, 1] \tag{5.11}$$

с краевыми условиями

$$x(t_1) = (0, x_{2t_1}), \quad x(T) = (0, x_{2T}), \tag{5.12}$$

где значение x_{2t_1} однозначно определяется из решения исходной системы до попадания на поверхность разрыва. Заметим, что решение этого включения автоматически удовлетворяет условию $x_1 = 0$. Таким образом, получили задачу (5.11), (5.12), которая укладывается в постановку задачи данной статьи.

5.3. Дифференциальные включения, содержащие в правой части сумму, пересечение или объединение выпуклых множеств

Рассмотрим случай, когда правая часть дифференциального включения представляет собой сумму нескольких выпуклых множеств. Для простоты изложения опишем случай только с двумя множествами. Исследуем систему $\dot{x} \in F(x, t) = F_1(x, t) + F_2(x, t)$, где многозначные отображения $F_1(x, t), F_2(x, t)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и многозначное отображение $F(x, t)$ в постановке задачи статьи. Как обычно, считаем, что заданы начальное условие и, возможно, условие на правом конце. Пользуясь простой формулой для опорной функции суммы двух выпуклых компактов, имеем $c(F(x, t), \psi) = c(F_1(x, t), \psi) + c(F_2(x, t), \psi)$. Приведем пример решения такой системы.

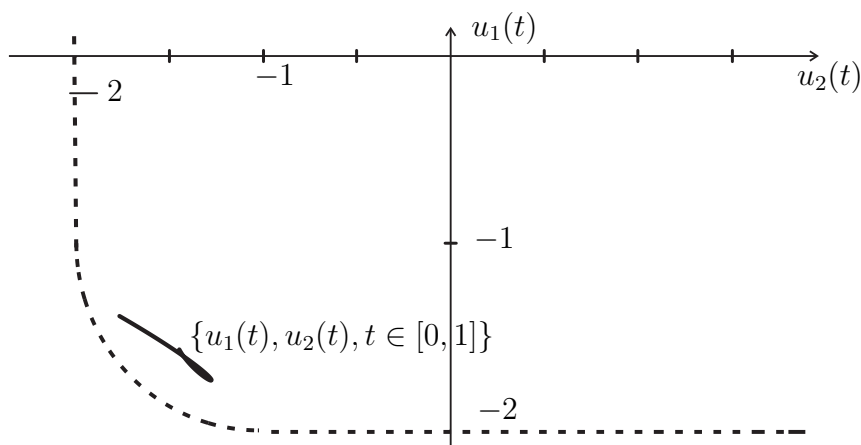


Рис. 2. Решение примера 5

Пример 5. Имеется дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + B + Q, \quad t \in [0, 1], \quad (5.13)$$

где Q — единичный квадрат в \mathbb{R}^n с центром в начале координат

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i| \leq 1 \forall i = \overline{1, n}\},$$

в данном примере $n = 2$. Заданы краевые условия

$$x(0) = (0, 1)', \quad (-1.25, -1.5)'. \quad (5.14)$$

В этом случае

$$c(F, \psi) = -x_2\psi_1 + x_1\psi_2 + \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} + |\psi_1| + |\psi_2|, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = (\psi_2, -\psi_1)'.$$

Возьмем начальную точку $z_1 = (0, -2)'$, а тогда $x_1 = (0, 1 - 2t)'$. Применение метода, предложенного в статье, привело к следующему решению:

$$x^*(t) := x_5(t) = \begin{pmatrix} 0.1965t^4 - 0.6125t^3 + 1.9355t^2 - 2.7695t \\ -0.1979t^4 + 1.1887t^3 - 2.1015t^2 - 1.3893t + 1 \end{pmatrix}$$

(решение выписано с точностью вплоть до 4-го знака после запятой). Видно, что краевые условия (5.14) удовлетворены (при $t = 0$ очевидно получаем заданную начальную точку, легко также убедиться, что $x_5(1) = (-1.25, -1.5)'$). На рис. 2 сплошная линия есть параметрическая кривая $\{u_1(t) = z_1^*(t) + x_2^*(t), u_2(t) = z_2^*(t) - x_1^*(t), t \in [0, 1]\}$. Пунктирная линия ограничивает допустимую область $B + Q$ расположения этой кривой, отсюда видно, что дифференциальное включение (5.13) выполняется. Таким образом, здесь решение удовлетворяет ограничениям точно, поэтому $I(z^*) = 0$. \square

Пусть теперь вместо суммы имеем пересечение нескольких выпуклых множеств. Для простоты изложения опишем случай только с двумя множествами. Исследуемая система имеет тогда вид $\dot{x} \in F(x, t) = F_1(x, t) \cap F_2(x, t)$, где опять многозначные отображения $F_1(x, t), F_2(x, t)$ удовлетворяют заданным требованиям. Здесь также можно искать опорную функцию этого множества по известным формулам, однако вместо ее нахождения поступим несколько иначе, а именно рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(z) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z) + \chi(z),$$

где $\chi(z)$ — функционал (2.6), а функционалы $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ строятся аналогично функционалу $\varphi(z)$ в постановке задачи. Имеем при $i = \overline{1, 2}$

$$\ell_i(\psi, z, t) = \langle z(t), \psi \rangle - c(F_i(x, t), \psi),$$

$$h_i(z, t) = \max_{\psi \in S} \max\{0, \ell_i(\psi, z, t)\},$$

$$\varphi_i(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h_i^2(z, t) dt.$$

Очевидно, что x^* — решение изучаемого в данном случае дифференциального включения тогда и только тогда, когда $I(z^*) = 0$. Приведем пример решения подобной задачи.

Пример 6. Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(x), \quad F(x) = B \cap E(x), \quad t \in [0, 1], \tag{5.15}$$

где $E(x)$ — эллипс, который зависит от фазовой координаты x_1 :

$$E(x) = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(\bar{x} - 2)^2}{x_1^2 + 3} + \bar{y}^2 \leq 1 \right\}.$$

Заданы краевые условия

$$x(0) = (0, 0)', \quad (0.75, 0.5)'. \tag{5.16}$$

В данном случае

$$c(F_1, \psi) = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2} = 1, \quad c(F_2, \psi) = \sqrt{(x_1^2 + 3)\psi_1^2 + \psi_2^2} + 2\psi_1,$$

$$\frac{\partial c(F_1, \psi)}{\partial x} = (0, 0)', \quad \frac{\partial c(F_2, \psi)}{\partial x} = \left(\frac{x_1 \psi_1^2}{\sqrt{(x_1^2 + 3)\psi_1^2 + \psi_2^2}}, 0 \right)'.$$

За начальное приближение взята точка $z_1 = (1, 1)'$, а тогда $x_1 = (t, t)'$. Метод статьи позволяет прийти к следующему решению:

$$x^*(t) := x_3(t) = \begin{pmatrix} 0.7553t + 0.0002t^5 + 0.0013t^4 - 0.0078t^3 + 0.0009t^2 \\ 0.5043t + 0.00006t^5 + 0.00006t^4 + 0.0048t^3 - 0.0092t^2 \end{pmatrix}$$

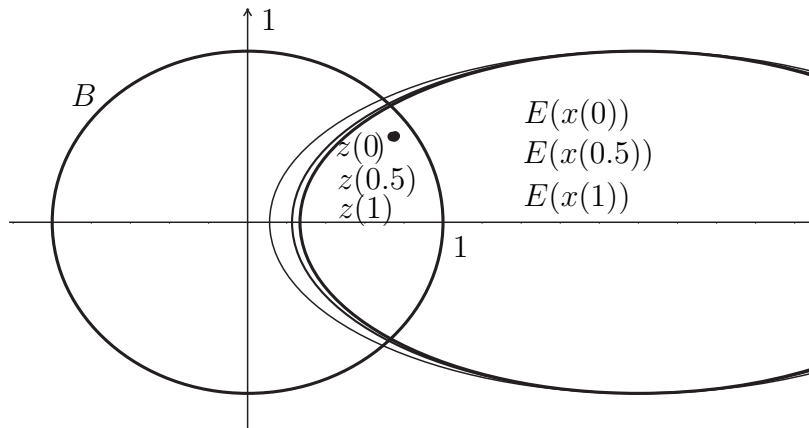


Рис. 3. Решение примера 6

(решение выписано с точностью вплоть до 4-го знака после запятой). Видно, что краевые условия (5.16) удовлетворены (при $t = 0$ очевидно имеем заданную начальную точку, легко также убедиться, что $x_3(1) = (0.75, 0.5)'$). На рис. 3 изображены точки $z(t)$ и допустимая область $B \cap E(x(t))$ расположения этих точек при некоторых значениях $t \in [0, 1]$, отсюда видно, что дифференциальное включение (5.15) выполняется для этих значений $t \in [0, 1]$ (нетрудно проверить, что это верно и для всех остальных значений $t \in [0, 1]$). В данном примере решение удовлетворяет ограничениям точно, поэтому имеем $I(z^*) = 0$. \square

Наконец, обратимся к случаю, когда в правой части дифференциального включения имеется объединение нескольких выпуклых множеств. Наметим путь решения такой задачи. Для простоты изложения опишем случай только с двумя множествами. Рассматриваемая система имеет вид $\dot{x} \in F(x, t) = F_1(x, t) \cup F_2(x, t)$, где опять многозначные отображения $F_1(x, t), F_2(x, t)$ удовлетворяют заданным требованиям. Несмотря на то что каждое из этих множеств предполагается выпуклым, понятно, что их объединение уже не будет выпуклым в общем случае. Поэтому необходимо видоизменить конструкцию функционала $I(z)$, если по-прежнему требуется, чтобы $I(z^*)$ достигал (глобального) минимума в точке z^* тогда и только тогда, когда x^* — решение рассматриваемой в этом случае задачи. Построим соответствующие функции следующим образом при $i = \overline{1, 2}$:

$$\ell_i(\psi, z, t) = \langle z(t), \psi \rangle - c(F_i(x, t), \psi),$$

$$h_i(z, t) = \max_{\psi \in S} \ell_i(\psi, z, t),$$

$$h(z, t) = \max\{0, \min\{h_1(z, t), h_2(z, t)\}\},$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^T h^2(z, t) dt,$$

$$I(z) = \varphi(z) + \chi(z).$$

Понятно, что при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ точка z принадлежит хотя бы одному из множеств $F_1(x, t), F_2(x, t)$ тогда и только тогда, когда $\min\{h_1(z, t), h_2(z, t)\} \leq 0$, поэтому требуемая эквивалентность исходной задачи и минимизации функционала $I(z)$ достигнута. Однако построенный функционал $I(z)$ уже не будет дифференцируемым по Гато (хотя он является дифференцируемым по Гато в точке (глобального) минимума и градиент Гато равен в ней нулю).

Проведем стандартную дискретизацию функционала $I(z)$ с заменой производной $z(t)$ в каждой точке на конечные разности и докажем, что при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ полученная функция (конечно-разностный аналог функционала $I(z)$) будет квазидифференцируемой [20], что позволит применить для ее минимизации известные алгоритмы недифференцируемой оптимизации, например метод квазидифференциального спуска.

Напомним определение квазидифференциала в конечномерном случае. Пусть имеется некоторое непустое множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Функция $\xi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ называется квазидифференцируемой на множестве Σ , если для каждого $\varsigma \in \Sigma$ существуют такие выпуклые компактные множества, субдифференциал $\underline{\partial}\xi(\varsigma) \subset \mathbb{R}^n$ и супердифференциал $\overline{\partial}\xi(\varsigma) \subset \mathbb{R}^n$, что для каждого допустимого приращения $\Delta\varsigma \in \mathbb{R}^n$ (т. е. $\text{co}\{\varsigma, \varsigma + \Delta\varsigma\} \in \Sigma$) соответствующее приращение функции ξ представимо по формуле

$$\xi(\varsigma + \Delta\varsigma) = \xi(\varsigma) + \max_{\sigma_1 \in \underline{\partial}\xi(\varsigma)} \langle \sigma_1, \Delta\varsigma \rangle + \min_{\sigma_2 \in \overline{\partial}\xi(\varsigma)} \langle \sigma_2, \Delta\varsigma \rangle + o(\Delta\varsigma, \varsigma),$$

где $o(\alpha\Delta\varsigma, \varsigma)/\alpha \rightarrow 0$, если $\alpha \rightarrow 0$.

Пара $D\xi(\varsigma) = [\underline{\partial}\xi(\varsigma), \overline{\partial}\xi(\varsigma)]$ называется квазидифференциалом функции ξ в точке ς . Известно [21], что необходимым условием минимума в точке ς^* квазидифференцируемой на \mathbb{R}^n функции является включение $-\overline{\partial}\xi(\varsigma^*) \subset \underline{\partial}\xi(\varsigma^*)$. Это условие конструктивно и используется при построении различных численных методов [20].

Для упрощения выкладок рассмотрим случай $n = 1$. Пусть отрезок $[0, T]$ разбит на N равных частей Δt точками $t_i, i = \overline{0, N}, t_0 = 0, \dots, t_N = T$. Положим $\mathbf{x} := (x_1, \dots, x_N)$. Возьмем на каждом отрезке значение подынтегральной функции, равным ее значению на правом конце этого отрезка.

Вместо соотношений (1.1)–(1.3) имеем конечно-разностный аналог

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \in F_1(x_i, t_i) \cup F_2(x_i, t_i), \quad x_0 = x(0), \quad x_N = x_T, \quad i = \overline{1, N}. \quad (5.17)$$

Вместо функционала $\varphi(z)$ — функцию

$$\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \Delta t \sum_{i=1}^N \overline{\varphi}(x_i, x_{i-1}), \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}(x_i, x_{i-1}) := \max \left\{ 0, \min \left\{ \max_{\psi \in S} \left(\left\langle \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \psi \right\rangle - c(F_1(x_i, t_i), \psi) \right) \right\}, \right. \\ \left. \max_{\psi \in S} \left(\left\langle \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \psi \right\rangle - c(F_2(x_i, t_i), \psi) \right) \right\}^2, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Вместо функционала $\chi(z)$ — следующую функцию:

$$\overline{\chi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(x_0 + \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1}) - x_T \right)^2. \quad (5.20)$$

Составим

$$\overline{I}(\mathbf{x}) = \overline{\varphi}(\mathbf{x}) + \overline{\chi}(\mathbf{x}). \quad (5.21)$$

В формулах (5.17), (5.18), (5.20) $i = \overline{0, N}$, а значение производной $z_i := z(t_i)$ заменено конечной разностью $\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, i = \overline{1, N}$. Итак, конечно-разностный аналог исходной задачи в случае $n = 1$ имеет вид минимизировать функцию (5.21) в пространстве \mathbb{R}^N .

Зафиксируем точку $(x_i, x_{i-1}), i = \overline{1, N}$, и исследуем два случая.

Очевидно, что если

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \in F_1(x_i, t_i) \cup F_2(x_i, t_i),$$

то функция $\overline{\varphi}(x_i, x_{i-1})$ дифференцируема в точке (x_i, x_{i-1}) и ее градиент в этой точке равен нулю.

Рассмотрим случай $\frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t} \notin F_1(x_i, t_i) \cup F_2(x_i, t_i)$. Примем

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}) &:= \left\langle \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \psi_1^*(x_i, x_{i-1}, t_i) \right\rangle - c(F_1(x_i, t_i), \psi_1^*(x_i, x_{i-1}, t_i)), \\ \overline{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}) &:= \left\langle \frac{x_i - x_{i-1}}{\Delta t}, \psi_2^*(x_i, x_{i-1}, t_i) \right\rangle - c(F_2(x_i, t_i), \psi_2^*(x_i, x_{i-1}, t_i)). \end{aligned}$$

Напомним, что числа $\psi_1^*(x_i, x_{i-1}, t_i)$ и $\psi_2^*(x_i, x_{i-1}, t_i)$ (точки максимума соответствующих “внутренних функций” выражения (5.19)), которые обозначим для краткости через $\psi_1^*(t_i)$ и $\psi_2^*(t_i)$ соответственно, определены в рассматриваемом случае однозначно. Найдем квазидифференциал функции $\overline{\varphi}(x_i, x_{i-1})$ в точке (x_i, x_{i-1}) , пользуясь правилами квазидифференциального исчисления и формулой для производной функции максимума по направлениям [20]. Сформулируем полученный результат в виде следующего утверждения, состоящего из трех частей.

Утверждение. 1. Пусть в точке (x_i, x_{i-1}) выполняется равенство

$$\bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}) = \bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}).$$

Тогда

$$D\bar{\varphi}(x_i, x_{i-1}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K \text{ со } \left\{ \left(\frac{\psi_1^*(t_i)}{\Delta t} - \frac{\partial c(F_1(x_i, t_i), \psi_1^*(t_i))}{\partial x_i} \right), \left(\frac{\psi_2^*(t_i)}{\Delta t} - \frac{\partial c(F_2(x_i, t_i), \psi_2^*(t_i))}{\partial x_i} \right) \right\} \right],$$

$$K = 2 \min\{\bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}), \bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1})\}.$$

2. Пусть в точке (x_i, x_{i-1}) выполняется неравенство

$$\bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}) < \bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}).$$

Тогда

$$D\bar{\varphi}(x_i, x_{i-1}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_1 \left(\frac{\psi_1^*(t_i)}{\Delta t} - \frac{\partial c(F_1(x_i, t_i), \psi_1^*(t_i))}{\partial x_i} \right) \right],$$

$$K_1 = 2\bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}).$$

3. Пусть в точке (x_i, x_{i-1}) выполняется неравенство

$$\bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}) < \bar{\varphi}_1(x_i, x_{i-1}).$$

Тогда

$$D\bar{\varphi}(x_i, x_{i-1}) = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, K_2 \left(\frac{\psi_2^*(t_i)}{\Delta t} - \frac{\partial c(F_2(x_i, t_i), \psi_2^*(t_i))}{\partial x_i} \right) \right], \quad K_2 = 2\bar{\varphi}_2(x_i, x_{i-1}).$$

Вычисляя градиент функции (5.20) и пользуясь формулой (5.18), теперь уже нетрудно выписать квазидифференциал функции $I(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x} . При $n > 1$ вычисления проводятся аналогично.

З а м е ч а н и е 5. В задаче Коши функция (5.20) отсутствует, поэтому имеем задачу минимизации функции (5.18) специального вида. Такие функции часто называют аддитивными, и для них разработаны эффективные алгоритмы нахождения глобального минимума, например алгоритм “киевский веник” [22] или метод локальных вариаций [23], которые не накладывают на функцию требования дифференцируемости.

З а м е ч а н и е 6. Приведенные рассуждения, конечно, не претендуют еще на алгоритм решения задачи в рассматриваемом случае. Требуется обоснование проведенной дискретизации, применение к построенной конечномерной задаче методов негладкой оптимизации, оценка их эффективности и т. п. Однако эти исследования не являются целью настоящей статьи. Описан лишь общий подход к решению задачи в случае, когда правая часть дифференциального включения есть объединение выпуклых множеств.

Заключение

В данной статье описан метод решения дифференциальных включений (со свободным или закрепленным правым концом) с выпуклым непрерывным многозначным отображением, допускающим непрерывную производную опорной функции по фазовым координатам. Этот метод базируется на сведении исходной задачи к минимизации некоторого функционала в пространстве кусочно-непрерывных функций с дальнейшим применением к нему градиентного метода. Рассмотрены некоторые классы задач, которые не являются классическими с точки зрения теории управления (интервальные системы, системы с переменной по фазовым координатам областью управления, системы с суммой, пересечением или объединением выпуклых множеств в правой части), однако сводимые к дифференциальным включениям, удовлетворяющим названным требованиям и, следовательно, допускающим их исследование с помощью разрабатываемого в статье метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Благодатских В.И., Филиппов А.Ф.** Дифференциальные включения и оптимальное управление // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 194–252.
2. **Watbled F.** On singular perturbations for differential inclusions on the infinite interval // J. Math. Anal. Appl. 2005. Vol. 310, no. 2. P. 362–378. doi: 10.1016/j.jmaa.2005.01.067.
3. **Gama R., Smirnov G.** Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method // Set-Valued and Variational Analysis. 2014. Vol. 22, no. 2. P. 349–374. doi: 10.1007/s11228-013-0261.
4. **Cheng Y.** Existence of solutions for a class of nonlinear evolution inclusions with nonlocal conditions // J. Optim. Theory Appl. 2014. Vol. 162, no. 1. P. 13–33. doi:10.1007/s10957-013-0446-x.
5. **Fominyh A.V.** A method for solving differential inclusions with fixed right end // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2018. Т. 14, № 4. С. 302–315. doi: 10.21638/11702/spbu10.2018.403.
6. **Fominyh A.V.** A numerical method for finding the optimal solution of a differential inclusion // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. 2018. Vol. 51, no. 4. P. 397–406. doi: 10.3103/S1063454118040076.
7. **Sandberg M.** Convergence of the forward Euler method for nonconvex differential inclusions // SIAM J. Numer. Anal. 2008. Vol. 47, no. 1. P. 308–320. doi: 10.1137/070686093.
8. **Bastien J.** Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik. 2013. Vol. 64. P. 955–966. doi: 10.1007/s00033-012-0276-y.
9. **Bejn W-J., Rieger J.** The implicit Euler scheme for one-sided Lipschitz differential inclusions // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2010. Vol. 14, no. 2. P. 409–428. doi: 10.3934/dcdsb.2010.14.409.
10. **Lempio F.** Modified Euler methods for differential inclusions // Set-Valued Analysis and Differential Inclusions / eds A.B. Kurzhanski, M. Veliov. (A Collection of Papers Resulting from A Workshop Held in Pamporovo, Bulgaria, September 17–21, 1990). Boston, Basel, Berlin, Birkhauser Verlag Publ., 1993. P. 131–148. (Progr. Systems Control Theory).
11. **Taubert K.** Dierenzenverfahren fiir Schwingungen mit trockener und zdher Reibung und fiir Regelungssysteme // Numerische Mathematik. 1976. No. 26. P. 379–395. doi: 10.1007/BF01409960.
12. **Veliov V.** Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions // Systems and Control Letters. 1989. Vol 13, no. 3. P. 263–269. doi: 10.1016/0167-6911(89)90073-X.
13. **Dontchev A., Lempio F.** Difference methods for differential inclusions: A surve // SIAM Review. 1992. Vol. 34, no. 2. P. 263–294. doi: 10.1137/1034050.
14. **Schilling K.** An algorithm to solve boundary value problems for differential inclusions and applications in optimal control // Numer. Funct. Anal. Optim. 1989. Vol. 10, no. 7. P. 733–764. doi: 10.1080/01630568908816328.
15. **Благодатских В.И.** Введение в оптимальное управление. М.: Высшая школа, 200. 239 с.
16. **Демьянов В.Ф.** Условия экстремума и вариационное исчисление. М.: Высшая школа, 2005. 335 с.
17. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
18. **Penot J.P.** On the convergence of descent algorithms // Comput. Optim. Appl. 2002. Vol. 23, no. 3. P. 279–284.
19. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 226 с.
20. **Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 432 с.
21. **Полякова Л.Н.** Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций // Вестн. Ленингр. ун-та. 1980. № 13. С. 57–62.
22. **Михалевич В.С.** Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение // Кибернетика. 1965. Т. 1, № 1. С. 44–55.
23. **Крылов И.А., Черноусько Ф.Л.** Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1966 Т. 6, №1. С. 203–217.

Поступила 23.12.2019

После доработки 31.01.2020

Принята к публикации 3.02.2020

Фоминых Александр Владимирович,
канд. физ.-мат. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: alexfomster@mail.ru

Карелин Владимир Витальевич,
канд. физ.-мат. наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: vlkarelin@mail.ru

Полякова Людмила Николаевна,
д-р физ.-мат. наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный университет
г. Санкт-Петербург
e-mail: lnpol07@mail.ru

REFERENCES

1. Blagodatskikh V.I., Filippov A.F. Differential inclusions and optimal control. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1986, vol. 169, pp. 199–259.
2. Watbled F. On singular perturbations for differential inclusions on the infinite interval. *J. Math. Anal. Appl.*, 2005, vol. 310, no. 2, pp. 362–378. doi: 10.1016/j.jmaa.2005.01.067.
3. Gama R., Smirnov G. Stability and optimality of solutions to differential inclusions via averaging method. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2014, vol. 22, no. 2, pp. 349–374. doi: 10.1007/s11228-013-0261.
4. Cheng Y. Existence of solutions for a class of nonlinear evolution inclusions with nonlocal conditions. *J. Optim. Theory Appl.*, 2014, vol. 162, no. 1, pp. 13–33. doi: 10.1007/s10957-013-0446-x.
5. Fominyh A.V. A method for solving differential inclusions with fixed right end. *Vestn. St. Petersburg. Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Contr. Proc.*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 302–315. doi: 10.21638/11702/spbu10.2018.403.
6. Fominyh A.V. A numerical method for finding the optimal solution of a differential inclusion. *Vestnik St. Petersburg University: Mathematics*, 2018, vol. 51, no. 4, pp. 397–406. doi: 10.3103/S1063454118040076.
7. Sandberg M. Convergence of the forward Euler method for nonconvex differential inclusions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2008, vol. 47, no. 1, pp. 308–320. doi: 10.1137/070686093.
8. Bastien J. Convergence order of implicit Euler numerical scheme for maximal monotone differential inclusions. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 2013, vol. 64, no. 4, pp. 955–966. doi: 10.1007/s00033-012-0276-y.
9. Beyn W.-J., Rieger J. The implicit Euler scheme for one-sided Lipschitz differential inclusions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*, 2010, vol. 14, no. 2, pp. 409–428. doi: 10.3934/dcdsb.2010.14.409.
10. Lempio F. Modified Euler methods for differential inclusions. “*Set-Valued Analysis and Differential Inclusions*”. A Collection of Papers Resulting from A Workshop Held in Pamporovo, Bulgaria, September 17–21, eds. by A. B. Kurzhanski, M. Veliov, 1990, pp. 131–148. Ser. Progr. Systems Control Theory. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser Verlag Publ., 1993.
11. Taubert K. Dierenzenverfahren fiir Schwingungen mit trockener und zdher Reibung und fiir Regelungssysteme. *Numerische Mathematik*, 1976, no. 26, pp. 379–395. doi: 10.1007/BF01409960.
12. Veliov V. Second order discrete approximations to strongly convex differential inclusions. *Systems and Control Letters*, 1989, vol 13, no. 3, pp. 263–269. doi: 10.1016/0167-6911(89)90073-X.
13. Dontchev A., Lempio F. Difference methods for differential inclusions: A Survey. *SIAM Review*, 1992, vol. 34, no 2, pp. 263–294. doi: 10.1137/1034050.
14. Schilling K. An algorithm to solve boundary value problems for differential inclusions and applications in optimal control. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 1989, vol. 10, no. 7, pp. 733–764. doi: 10.1080/01630568908816328.

15. Blagodatskih V.I. *Vvedenie v optimalnoe upravleniye* [Introduction to optimal control]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 2001, 239 p.
16. Demyanov V.F. *Usloviya ehkstremita i variatsionnoe ischislenie* [Extremum conditions and variation calculus]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 2005, 335 p.
17. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis*. Oxford: Pergamon Press, 1982, 604 p. ISBN: 9781483138251. Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz*. Moscow: Nauka Publ., 1977, 741 p.
18. Penot J.P. On the convergence of descent algorithms. *Comput. Optim. Appl.*, 2002, vol. 23, no. 3, pp. 279–284. doi: 10.1023/A:1020570126636.
19. Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoii chast'yu* [Differential equations with discontinuous right-hand side]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 226 p.
20. Dem'yanov V.F., Rubinov A.M. *Foundations of Nonsmooth Analysis and Quasi-Differential Calculus* [Osnovy nekladkogo analiza i kvazidifferentsial'noe ischislenie]. Moscow: Nauka Publ., 1990, 432 p. ISBN: 5-02-014241-7.
21. Polyakova L.N. Necessary conditions for an extremum of quasi-differentiable functions. *Vestnik Leningrad Univer. Math.*, 1981, no. 13, pp. 241–247.
22. Mikhalevich V.C. Consecutive optimization algorithms and their application. I. *Kibernetika*, 1965, vol. 1, no. 1, pp. 44–55 (in Russian).
23. Krylov I.A., Chernous'ko F.L. Solution of the problems of optimal control by the method of local variations. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1966, vol. 6, no. 2, pp. 12–31. doi: 10.1016/0041-5553(66)90055-3.

Received Dezember 23, 2019

Revised January 31, 2020

Accepted February 3, 2020

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Found (project no. 18-71-00006).

Alexander Vladimirovich Fominyh, Cand. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: alexfomster@mail.ru.

Vladimir Vital'evich Karelin, Cand. Sci. (Phys.-Math.), St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034 Russia, e-mail: vlkarelin@mail.ru.

Lyudmila Nickolaevna Polyakova, Dr. Phys.-Math. Sci., St. Petersburg State University, St. Petersburg, 199034, Russia, e-mail: lnpol07@mail.ru.

Cite this article as: A. V. Fominyh, V. V. Karelin, L. N. Polyakova. Gradient method for solving some types of differential inclusions, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 256–273.