ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 1 2020

УДК 517.977

# О ПОСТРОЕНИИ КУСОЧНО-АФФИННОЙ ФУНКЦИИ ЦЕНЫ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВРЕМЕНИ[1]

**П. А. Точилин**

Работа посвящена приближенному решению задачи оптимального управления нелинейной системой дифференциальных уравнений на бесконечном отрезке времени с интегральным функционалом качества. Для этого использована техника кусочной линеаризации (“гибридизации”) исходной нелинейной системы, с последующим анализом получившейся системы с переключениями. Далее применен аппарат кусочно-аффинных функций цены и управления в совокупности с методом динамического программирования и принципом сравнения. В работе последовательно рассмотрены два случая: с непрерывными кусочно-аффинными функциями цены и управления, а также с функциями, допускающими разрывы первого рода. В последнем варианте за счет допущения разрывов удается повысить эффективность предложенного подхода. Сформулированы и доказаны теоремы о достаточных условиях разрешимости поставленной задачи, дающие также верхние оценки минимизируемого функционала. Удалось получить простые с точки зрения вычислений алгоритмы построения оценок функции цены для указанной задачи, а также соответствующего управления в форме обратной связи. Действие разработанного алгоритма продемонстрировано на примере задачи управления колесным роботом на плоскости.

Ключевые слова: нелинейная динамика, линеаризация, система с переключениями, оптимальное управление, динамическое программирование, кусочно-аффинная функция цены.

**P. A. Tochilin. On the construction of a piecewise affine value function in an infinite-horizon optimal control problem.**

The paper is devoted to the approximate solution of an infinite-horizon optimal control problem for a nonlinear system of differential equations with an integral cost functional. We use the technique of piecewise linearization (“hybridization”) of the original nonlinear system followed by the analysis of the resulting switched system. Then the methods of piecewise affine value and control functions, the method of dynamic programming, and the comparison principle are applied. Two cases are considered sequentially: with continuous piecewise affine value and control functions and with functions admitting discontinuities. In the latter case, it is possible to increase the effectiveness of the proposed approach by allowing gaps. Theorems on sufficient conditions for the solvability of the control problem are formulated and proved. The theorems also provide upper estimates of the minimized functional. Computationally simple algorithms are derived for the construction of estimates of the value function for this problem and of the corresponding feedback control. The operation of the proposed algorithm is demonstrated for a problem of control of a wheeled robot on the plane.

Keywords: nonlinear dynamics, linearization, switched system, optimal control, dynamic programming, piecewise affine value function.

**MSC:** 93D15, 93D30, 34H15, 49L20

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-223-238

## Введение

Данная статья посвящена разработке методов приближенного построения управления в форме обратной связи в задаче управления системой дифференциальных уравнений, нелинейных по фазовым переменным, на бесконечном отрезке времени. Необходимо перевести траекторию системы за конечное (заранее неизвестное) время в целевое множество так, чтобы при этом минимизировать заданный интегральный функционал за счет выбора управлений в форме обратной связи с известными жесткими, поточечными ограничениями. Основная идея

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19–01–00613а, 16–29–04191офи_м).

состоит в сочетании методов теории динамического программирования (и в частности, *принципа сравнения*, [1;2]) с аппаратом кусочно-аффинных функций цены и управления, заданных на совокупностях симплексов в фазовом пространстве [3;4].

Задача синтеза управлений может быть решена за счет использования *уравнения Гамильтона — Якоби — Беллмана* (ГЯБ) [2;5] для вспомогательной функции цены с заданными краевыми условиями (в точках целевого множества). В общем случае такую функцию необходимо искать в классе обобщенных решений указанного уравнения [6;7]. При этом все точки, в которых указанная функция принимает конечные значения, формируют *множество разрешимости* [8], содержащее все стартовые позиции, из которых гарантированно можно решить задачу синтеза управлений для достижения целевого множества за конечное, заранее неизвестное время. В данной работе функцию цены предлагается оценивать сверху при помощи кусочно-аффинных функций специального вида. Это позволяет получить внутренние оценки искомого множества разрешимости, верхние оценки минимального значения интегрального функционала в различных позициях, а также соответствующий кусочно-аффинный синтез управлений.

Ранее в работе [4] была предпринята попытка использования кусочно-аффинных функций управления для решения задачи о переводе автономной системы из заданного начального множества в целевое на бесконечном интервале времени. Однако предложенный алгоритм не позволял проводить оптимизацию вдоль траекторий системы. В данной статье предлагается альтернативный подход, ориентированный именно на решение задачи оптимального управления.

Предложенный в данной работе метод предполагает построение кусочно-аффинной аппроксимации исходной нелинейной системы дифференциальных уравнений на заданном разбиении области фазового пространства на симплексы. Такой подход иногда называют “гибридизацией” [9]. Далее на основе принципа сравнения для уравнения ГЯБ построена кусочно-аффинная функция цены для полученной системы с переключениями [10;11]. Основной сложностью здесь является выбор адекватной схемы пересчета значений функции цены в вершинах симплексов одновременно с построением соответствующего управления в форме обратной связи, которое должно быть допустимым, т. е. порождающим траектории исходной системы продолжаемые на некотором отрезке времени (по крайней мере до момента достижения траекторией целевого множества). Указанные проблемы в работе решены двумя разными методами. Сначала приведено описание алгоритма построения непрерывной кусочно-аффинной функции цены и соответствующего ей непрерывного кусочно-аффинного управления. Далее полученные результаты обобщены на случай, когда функции цены и управления могут иметь конечные разрывы на границах соседних симплексов.

Работа алгоритмов, основанных на предложенных схемах приближенного построения функции цены и синтеза управлений, продемонстрирована на примере задачи управления колесным роботом на плоскости.

## 1. Постановка задачи

### 1.1. Математическая модель

В пространстве $\mathbb{R}^{n_x}, n_x \in \mathbb{N}$, рассмотрим некоторое компактное множество $\Omega$, а также совокупность систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u, \quad x = x(t) \in \Omega, \quad t \in [t_0, +\infty). \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{f}(x) \in \mathbb{R}^{n_x}$ является дважды непрерывно дифференцируемой по переменной $x \in \Omega$, $\mathbf{g}(x) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$ — непрерывно дифференцируема по $x \in \Omega$, $u = u(x) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — позиционное управление, на возможные значения которого наложены “жесткие” поточечные ограничения: $u(x) \in \mathcal{P}$. Множество $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ является выпуклым компактом.

Обозначим через $\mathcal{U}_f$ класс допустимых позиционных управлений [2], содержащий многозначные отображения $u = u(x) \subseteq \mathcal{P}$, при подстановке любого из которых в уравнения (1.1) должно быть получено дифференциальное включение, имеющее решения при любом начальном векторе фазовых переменных $x_0 \in \Omega$. Решение $x(t)$ может быть определено и за пределами множества $\Omega$, но далее будем рассматривать только такие траектории, для которых $x(t) \in \Omega$ $\forall t \geq t_0$.

Под решением системы (1.1), замкнутой управлением в форме обратной связи $u(x) \in \mathcal{U}_f$, понимается абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая заданному начальному условию $x(t_0) = x_0$ и для почти всех $t \in (t_0, +\infty)$ — соответствующему дифференциальному включению, полученному из (1.1). Например, указанное условие будет выполнено, если потребовать [12], чтобы многозначные отображения $u(x)$ принимали выпуклые, компактные значения и были полунепрерывны сверху по $x \in \Omega$.

### 1.2. Задача оптимального управления на бесконечном отрезке времени

Зафиксируем некоторое компактное множество $\mathcal{X}_1 \subset \Omega$, содержащее целевые состояния системы. Также рассмотрим функционал

$$J(u(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{\tau^*} \Big(\tilde{\mathbf{f}}(x(\tau,t_0,x_0)|_u) + (\tilde{\mathbf{g}}(x(\tau,t_0,x_0)|_u))^T u(x(\tau,t_0,x_0)|_u)\Big) d\tau + \varphi(x(\tau^*,t_0,x_0)|_u), \quad (1.2)$$

определенный на некоторой траектории $x(t,t_0,x_0)|_u$ при некотором однозначном допустимом позиционном управлении $u(\cdot)$. Здесь $\tau^* \geq t_0$ — момент первого попадания траектории системы в целевое множество $\mathcal{X}_1$, функция $\tilde{\mathbf{f}}(x) \in \mathbb{R}$ является дважды, а функция $\tilde{\mathbf{g}}(x) \in \mathbb{R}^{n_u}$ — единожды непрерывно дифференцируемой по $x \in \Omega$. Кроме того, будем далее считать выполненным следующее

**Предположение 1.** *Функции $\tilde{\mathbf{f}}(x)$, $\tilde{\mathbf{g}}(x)$, $\varphi(x)$ таковы, что*

$$\tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u > 0 \ \ \forall x \in \Omega, \ \forall u \in \mathcal{P}; \quad \varphi(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathcal{X}_1.$$

З а д а ч а. Построить закон управления $u^* = u^*(\cdot) \in \mathcal{U}_f$, а также множество $\mathcal{X}_0 \subset \Omega$ такое, что при любых $x_0 \in \mathcal{X}_0$ у системы (1.1) существует траектория $x(t,t_0,x_0)|_{u^*}$, для которой

$$x(\tau,t_0,x_0)_{u^*} \in \Omega \ \ \forall \tau \geq t_0, \quad (1.3)$$

$$x(\tau^*,t_0,x_0)_{u^*} \in \mathcal{X}_1 \ \text{ при некотором } \tau^* \geq t_0. \quad (1.4)$$

Кроме того, управление $u^*$ должно минимизировать функционал (1.2) на множестве всех $u \in \mathcal{U}_f$, удовлетворяющих (1.3), (1.4).

Заметим, что искомое множество $\mathcal{X}_0$ должно содержать в качестве подмножества $\mathcal{X}_1$, причем имеет смысл рассматривать максимальные по включению множества $\mathcal{X}_0$, удовлетворяющие указанным выше требованиям.

Поставленная задача может быть решена методом динамического программирования. Для этого рассмотрим функцию цены

$$V(x) = \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}_f} \max_{x(\cdot)} \left\{ \int\limits_{t_0}^{\tau^*} \Big(\tilde{\mathbf{f}}(x(\tau)) + (\tilde{\mathbf{g}}(x(\tau)))^T u(x(\tau))\Big) d\tau + \varphi(x(\tau^*))\colon x(t_0) = x \right\},$$

где $x(\cdot)$ — всевозможные траектории, выпущенные из начальной позиции $\{t_0, x\}$ при фиксированном управлении $u(\cdot)$. В точках дифференцируемости функция $V(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона—Якоби—Беллмана (ГЯБ) [5]

$$\min_{u\in\mathcal{P}} \left\{ V'(x;\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u) + \tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u \right\} = 0 \quad (1.5)$$

с краевым условием

$$V(x) = \varphi(x) \ \ \forall x \in \mathcal{X}_1.$$

Здесь $V'(x;l)$ — производная функции $V(x)$ в точке $x$ по направлению $l \in \mathbb{R}^{n_x}$.

В общем случае функция $V(x)$ может не быть дифференцируемой, а решение уравнения (1.5) следует понимать в обобщенном смысле [5–7].

В данной работе уравнение (1.5) не предполагается решать точно. Вместо этого основная цель — поиск приближенного его решения на основе принципа сравнения и за счет использования специального класса кусочно-аффинных функций цены. Для искомой оценки функции цены будем далее применять обозначение $W(x)$.

## 2. Линеаризация систем дифференциальных уравнений на симплексах

Построим некоторое разбиение области $\Omega$ на симплексы [13] $\Omega^{(i)}$, $i = 1,\dots,M$, пересекающиеся друг с другом только по граничным точкам. Пусть, кроме того, $\Omega \supseteq \cup_{i=1}^{M}\Omega^{(i)}$. Каждая грань симплекса $\Omega^{(i)}$, являющаяся выпуклой оболочкой $n_x$ его вершин, есть либо часть границы самого множества $\Omega$, либо грань соседнего симплекса $\Omega^{(j)}, j \neq i$. Занумеруем все вершины симплексов $g_1,\dots,g_S$, где $S$ — количество уникальных вершин. Здесь и далее верхний индекс $(i)$ обозначает соответствие рассматриваемого понятия (множество, функция, вектор, матрица) области $\Omega^{(i)}$.

Зафиксируем некоторый симплекс $\Omega^{(i)}$, и пусть $g_1^{(i)},\dots,g_{n_x+1}^{(i)}$ — его вершины (наличие верхнего индекса $(i)$ говорит о том, что для вершин используется локальная нумерация нижними индексами, а не глобальная (от 1 до $S$), по вершинам всех симплексов). Составим из векторов-столбцов $g_1^{(i)},\dots,g_{n_x+1}^{(i)}$ матрицу $G^{(i)}$. Для каждой точки $x \in \Omega^{(i)}$ найдется единственный вектор $\alpha^{(i)}(x) = (\alpha_1^{(i)},\dots,\alpha_{n_x+1}^{(i)})^T$ барицентрических координат такой, что

$$\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k^{(i)} = 1, \quad \alpha_k^{(i)} \geqslant 0 \ \ \forall k, \quad G^{(i)}\alpha^{(i)}(x) = x.$$

Дополним вектор $x$ до $\widetilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, и пусть $\widetilde{G}^{(i)} = \begin{pmatrix} g_1^{(i)} & \dots & g_{n_x+1}^{(i)} \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_x+1)\times(n_x+1)}$. Тогда указанные выше соотношения можно переписать в краткой форме: $\widetilde{G}^{(i)}\alpha^{(i)}(x) = \widetilde{x}$. Из определения симплекса следует, что $\det(\widetilde{G}^{(i)}) \neq 0$ и $\alpha^{(i)}(x) = (\widetilde{G}^{(i)})^{-1}\widetilde{x}$ имеет все неотрицательные компоненты тогда и только тогда, когда $x \in \Omega^{(i)}$. Пусть $(\widetilde{G}^{(i)})^{-1} = \begin{pmatrix} H^{(i)} & h^{(i)} \end{pmatrix}$. В этом случае $\alpha^{(i)}(x) = H^{(i)}x + h^{(i)}$.

В дальнейшем для переходов между глобальной нумерацией вершин симплексов и локальной (в рамках определенного симплекса) будем использовать следующее обозначение: пусть $\sigma(i,k)$ — это такой номер от 1 до $n_x+1$, что $g_{\sigma(i,k)}^{(i)} = g_k$, $i = 1,\dots,M$, $k = 1,\dots,S$.

При $x \in \Omega^{(i)}$ для функции $\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u$ из (1.1) справедливо следующее представление:

$$\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u = F^{(i)}\alpha^{(i)}(x) + B^{(i)}u + R^{(i)}(x) = A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + R^{(i)}(x),$$

где

$$F^{(i)} = (\mathbf{f}(g_1^{(i)}),\dots,\mathbf{f}(g_{n_x+1}^{(i)})) \in \mathbb{R}^{n_x\times(n_x+1)}, \quad A^{(i)} = F^{(i)}H^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x\times n_x},$$

$$B^{(i)} = \frac{1}{n_x+1}\sum_{k=1}^{n_x+1}\mathbf{g}(g_k^{(i)}), \quad f^{(i)} = F^{(i)}h^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_x},$$

$R^{(i)}(x)$ — погрешность локальной линеаризации.

Разложим функцию $\mathbf{f}_s(x)$, $s=1,\dots,n_x$ (т.е. $s$-ю компоненту вектор-функции) по формуле Тейлора до членов 2-го порядка включительно с центром в точке $x\in\Omega^{(i)}$, взяв итоговое значение в вершине $g_k^{(i)}$ указанного симплекса

$$\mathbf{f}_s(g_k^{(i)})=\mathbf{f}_s(x)+\Big(\frac{\partial\mathbf{f}_s}{\partial x}(x)\Big)^T(g_k^{(i)}-x)+(g_k^{(i)}-x)^T\frac{\partial^2\mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi_k)(g_k^{(i)}-x),\quad \xi_k=\xi_k(s,x,g_k^{(i)})\in\Omega^{(i)}.$$

Сложим полученные соотношения при различных $k=1,\dots,n_x+1$, домножив их на соответствующие величины $\alpha_k(x)$ [2]:

$$\big(F^{(i)}\alpha^{(i)}(x)\big)_s=\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k(x)\mathbf{f}_s(g_k^{(i)})=\mathbf{f}_s(x)+\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k(x)(g_k^{(i)}-x)^T\frac{\partial^2\mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi_k)(g_k^{(i)}-x).$$

Легко видеть, что

$$\Big|\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k(x)(g_k^{(i)}-x)^T\frac{\partial^2\mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi_k)(g_k^{(i)}-x)\Big|\le M_s^{(i)}=\max_{\xi\in\Omega^{(i)}}\rho_{\max}\Big(\frac{\partial^2\mathbf{f}_s}{\partial x^2}(\xi)\Big)\cdot d^{(i)}\quad\forall x\in\Omega^{(i)},$$

где $\rho_{\max}(R)$ — максимальное значение абсолютной величины собственного значения симметричной матрицы $R$,

$$d^{(i)}=\max\Big\{\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k\Big\|\sum_{r=1}^{n_x+1}\alpha_r(g_r^{(i)}-g_k^{(i)})\Big\|^2\colon \alpha_k\in[0,1]\ \ \forall k,\ \sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k=1\Big\}.$$

Разложим теперь функцию $\mathbf{g}_{sp}(x)$ (элемент матрицы $\mathbf{g}(x)$, стоящий в $s$-й строке и $p$-м столбце) по формуле Тейлора до членов 1-го порядка включительно

$$\mathbf{g}_{sp}(g_k^{(i)})=\mathbf{g}_{sp}(x)+\Big(\frac{\partial\mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(\zeta_k)\Big)^T(g_k^{(i)}-x),\quad \zeta_k=\zeta_k(s,p,x,g_k^{(i)})\in\Omega^{(i)}.$$

Тогда

$$B_{sp}^{(i)}=\mathbf{g}_{sp}(x)+\frac{1}{n_x+1}\sum_{k=1}^{n_x+1}\Big(\frac{\partial\mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(\zeta_k)\Big)^T(g_k^{(i)}-x),$$

$$\Big|\frac{1}{n_x+1}\sum_{k=1}^{n_x+1}\Big(\frac{\partial\mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(\zeta_k)\Big)^T(g_k^{(i)}-x)\Big|\le N_{sp}^{(i)}=\max_{x\in\Omega^{(i)}}\Big\|\frac{\partial\mathbf{g}_{sp}}{\partial x}(x)\Big\|\,r^{(i)},$$

$$r^{(i)}=\frac{1}{n_x+1}\max\Big\{\sum_{k=1}^{n_x+1}\|g_k^{(i)}-g_j^{(i)}\|\colon j=1,\dots,n_x+1\Big\}.$$

Пусть, кроме того,

$$N_s^{(i)}=\max\Big\{\sum_{p=1}^{n_u}|u_p|N_{sp}^{(i)}\colon u\in\mathcal{P}\Big\}.$$

Таким образом, получена оценка для $s$-й компоненты погрешности линеаризации

$$|R_s^{(i)}(x)|\leqslant\mathbf{R}_s^{(i)}=M_s^{(i)}+N_s^{(i)}\quad\text{при } x\in\Omega^{(i)},$$

$$R^{(i)}(x)\in\mathcal{Q}^{(i)}=[-\mathbf{R}_1^{(i)},\mathbf{R}_1^{(i)}]\times\ldots\times[-\mathbf{R}_{n_x}^{(i)},\mathbf{R}_{n_x}^{(i)}].\tag{2.1}$$

[2]Здесь использовано соотношение $\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k(x)\big(\frac{\partial\mathbf{f}_s}{\partial x}(x)\big)^T(g_k^{(i)}-x)=\big(\frac{\partial\mathbf{f}_s}{\partial x}(x)\big)^T\big(\sum_{k=1}^{n_x+1}\alpha_k(x)g_k^{(i)}-x\big)=\big(\frac{\partial\mathbf{f}_s}{\partial x}(x)\big)^T(x-x)=0.$

Теперь положим

$$R^{(i)} = \Big(\sum_{s=1}^{n_x} \big(\mathbf{R}_s^{(i)}\big)^2\Big)^{1/2} \geqslant \|R^{(i)}(x)\|, \quad R^{(i),*} = \max_{s=1,\ldots,n_x} |\mathbf{R}_s^{(i)}|.$$

Аналогично линеаризуем функцию, стоящую под интегралом в (1.2):

$$\tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u = \widetilde{A}^{(i)} x + \widetilde{B}^{(i)} u + \widetilde{f}^{(i)} + \widetilde{R}^{(i)}(x).$$

Здесь

$$\widetilde{A}^{(i)} = (\tilde{\mathbf{f}}(g_1^{(i)}), \ldots, \tilde{\mathbf{f}}(g_{n_x+1}^{(i)}))H^{(i)} \in \mathbb{R}^{1\times n_x}, \quad \widetilde{B}^{(i)} = \frac{1}{n_x+1} \sum_{k=1}^{n_x+1} \big(\tilde{\mathbf{g}}(g_k^{(i)})\big)^T \in \mathbb{R}^{1\times n_u},$$

$$\widetilde{f}^{(i)} = (\tilde{\mathbf{f}}(g_1^{(i)}), \ldots, \tilde{\mathbf{f}}(g_{n_x+1}^{(i)}))h^{(i)} \in \mathbb{R}, \quad |\widetilde{R}^{(i)}(x)| \leqslant \widetilde{\mathbf{R}}^{(i)} = \widetilde{M}^{(i)} + \widetilde{N}^{(i)} \quad \text{при } x \in \Omega^{(i)},$$

$$\widetilde{M}^{(i)} = \max_{\xi\in\Omega^{(i)}} \rho_{\max}\Big(\frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{f}}}{\partial x^2}(\xi)\Big)\, d^{(i)}, \quad \widetilde{N}_p^{(i)} = \max_{x\in\Omega^{(i)}} \Big\|\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}_p(x)}{\partial x}\Big\|\, r^{(i)}, \quad \widetilde{N}^{(i)} = \max_{u\in\mathcal{P}} \Big\{\sum_{p=1}^{n_u} |u_p| \widetilde{N}_p^{(i)}\Big\}.$$

В дальнейшем также будет использовано линейное приближение функции $\varphi(x)$, $x \in \mathcal{X}_1$. Пусть $\mathcal{X}_1 \supseteq \Omega^{(j_1)} \cup \ldots \cup \Omega^{(j_m)}$ для некоторых $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, M\}$, $\mathcal{I}_1 = \{j_1, \ldots, j_m\}$. Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x)\varphi(g_k^{(i)}) - \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k(x)(g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\eta_k)(g_k^{(i)} - x) \quad \forall x \in \Omega^{(i)}, \quad i \in \mathcal{I}_1, \tag{2.2}$$

где $\forall x \in \Omega^{(i)}$

$$\Big|(g_k^{(i)} - x)^T \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\eta_k)(g_k^{(i)} - x)\Big| \leq K_k^{(i)} = \max_{\xi\in\Omega^{(i)}} \rho_{\max}\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(\eta)\Big) \cdot \max_{j=1,\ldots,n_x+1} \|g_k^{(i)} - g_j^{(i)}\|^2. \tag{2.3}$$

## 3. Непрерывная кусочно-аффинная функция цены

На множестве симплексов $\Omega^{(i)}$, $i = 1, \ldots, M$, рассмотрим кусочно-аффинную функцию цены следующего вида:

$$W(x) = \sum_{k=1}^{n_x+1} \alpha_k^{(i)}(x) w_k^{(i)}, \quad \text{если } x \in \Omega^{(i)}. \tag{3.1}$$

Здесь $w_k^{(i)} = W(g_k^{(i)})$ — значение функции в соответствующей вершине $g_k^{(i)}$ рассматриваемого симплекса. Предположим, что для нескольких разных симплексов $\Omega^{(i_1)}, \ldots, \Omega^{(i_r)}$, имеющих общую вершину $g_k$, соответствующие значения функции $W(x)$ в этой вершине $w_{\sigma(i_1,k)}^{(i_1)}, \ldots, w_{\sigma(i_r,k)}^{(i_r)}$ совпадают между собой; обозначим их через $w_k$. При таком условии функция $W(x)$ непрерывна. Она однозначно задается совокупностью величин $w_1, \ldots, w_S$. Пусть

$$w^{(i)} = (w_1^{(i)}, \ldots, w_{n_x+1}^{(i)})^T \in \mathbb{R}^{n_x+1}.$$

Тогда выражение (3.1) можно переписать таким образом:

$$W(x) = (w^{(i)})^T (H^{(i)} x + h^{(i)}), \ \text{ если } x \in \Omega^{(i)}. \tag{3.2}$$

Функция $W(x)$ дифференцируема по любому направлению. Однако производные по направлениям могут иметь разрывы при переходе точки $x$ через границы соседних симплексов.

Зафиксируем некоторый симплекс $\Omega^{(i)}$. Рассмотрим выражение в фигурных скобках в (1.5) при условии, что $x \in \operatorname{int}\Omega^{(i)}$ и вместо функции цены $V(x)$ использована ее оценка $W(x)$, заданная согласно (3.1), (3.2):

$$W'(x; \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u) + \tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u$$
$$= (w^{(i)})^T H^{(i)} \big(A^{(i)}x + B^{(i)}u + f^{(i)} + R^{(i)}(x)\big) + \widetilde{A}^{(i)}x + \widetilde{B}^{(i)}u + \widetilde{f}^{(i)} + \widetilde{R}^{(i)}(x). \qquad (3.3)$$

Рассмотрим многозначное кусочно-аффинное управление следующего вида:

$$\mathcal{U}(x) = \big\{Y^{(i)}(H^{(i)}x + h^{(i)}) \colon y_k^{(i)} \in \mathcal{Y}_k^{(i)}, k = 1, \ldots, n_x + 1\big\} \text{ при } x \in \Omega^{(i)}, \qquad (3.4)$$

где $Y^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_u \times (n_x+1)}$ — матрица, составленная из столбцов $y_1^{(i)}, \ldots, y_{n_x+1}^{(i)}$ — значений управления в вершинах симплекса $\Omega^{(i)}$, множества $\mathcal{Y}_k^{(i)} \subseteq \mathcal{P}$ являются выпуклыми компактами. В силу выпуклости множества $\mathcal{P}$ справедливо включение $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{P}$ $\forall x \in \Omega$. Предположим, что для любых симплексов $\Omega^{(i_1)}, \ldots, \Omega^{(i_r)}$, имеющих общую вершину $g_k$, $\mathcal{Y}^{(i_1)}_{\sigma(i_1,k)} = \ldots = \mathcal{Y}^{(i_r)}_{\sigma(i_r,k)}$. Тогда непрерывное по $x$ управление $\mathcal{U}(x)$ однозначно определяется совокупностью множеств $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_S$, сопоставленных вершинам симплексов.

Рассмотрим некоторые свойства функции цены вида (3.1) для системы, замкнутой управлением вида (3.4). В дальнейшем через $\rho(l|\mathcal{X})$ будем обозначать величину опорной функции ко множеству $\mathcal{X}$ в направлении, задаваемом вектором $l$.

**Лемма.** *Пусть множества $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_S \in \mathcal{P}$ и значения непрерывной кусочно-аффинной функции цены $w_1, \ldots, w_S$ в вершинах симплексов заданы таким образом, что для некоторого $i \in \{1, \ldots, M\}$ выполнено неравенство*

$$\max_{k=1,\ldots,n_x+1} \Big\{(w^{(i)})^T H^{(i)} \mathbf{f}(g_k^{(i)}) + \rho\big((H^{(i)}B^{(i)})^T w^{(i)} + (\widetilde{B}^{(i)})^T \big| \mathcal{Y}_k^{(i)}\big) + \tilde{\mathbf{f}}(g_k^{(i)}) : g_k^{(i)} \text{ — вершина } \Omega^{(i)}\Big\}$$
$$+ n_x ||H^{(i)}||_\infty R^{(i),*} \sum_{k=1}^{n_x+1} w_k^{(i)} + \widetilde{\mathbf{R}}^{(i)} \le 0 \qquad (3.5)$$

*и $w_k^{(i)} \ge 0$ $\forall k = 1, \ldots, n_x + 1$. Тогда для управления $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x)$ вида (3.4) справедливо неравенство*

$$\max_{u \in \mathcal{U}(x)} \big\{W'(x; \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)u) + \tilde{\mathbf{f}}(x) + (\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u\big\} \le 0. \qquad (3.6)$$

*Более того, функция $W(x)$ строго убывает вдоль соответствующей траектории системы (1.1) — по меньшей мере пока $x(t) \in \Omega^{(i)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что[3]

$$|(w^{(i)})^T H^{(i)} R^{(i)}(x)| \leqslant \|w^{(i)}\|_1 \cdot \|H^{(i)} R^{(i)}(x)\|_\infty \leqslant \|w^{(i)}\|_1 \cdot n_x \|H^{(i)}\|_\infty R^{(i),*}$$
$$= \Big(\sum_{k=1}^{n_x+1} w_k^{(i)}\Big) n_x \|H^{(i)}\|_\infty R^{(i),*},$$

где $w_k^{(i)}$ — неотрицательные компоненты вектора $w^{(i)}$, $\|H^{(i)}\|_\infty = \max\limits_{s_1,s_2} |H^{(i)}_{s_1 s_2}|$. Следовательно, согласно (3.3) для (3.6) достаточно выполнения условия

$$(w^{(i)})^T H^{(i)} \big(A^{(i)}x + B^{(i)}Y^{(i)}(H^{(i)}x + h^{(i)}) + f^{(i)}\big) + \widetilde{A}^{(i)}x + \widetilde{B}^{(i)}Y^{(i)}(H^{(i)}x + h^{(i)})$$
$$+ \widetilde{f}^{(i)} + n_x \|H^{(i)}\|_\infty R^{(i),*} \textstyle\sum_{k=1}^{n_x+1} w_k^{(i)} + \widetilde{\mathbf{R}}^{(i)} \le 0 \ \ \forall x \in \Omega^{(i)},\ \forall Y^{(i)} \colon y^{(i)} \in \mathcal{Y}^{(i)}. \qquad (3.7)$$

[3]Здесь $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$.

В (3.7) функция в левой части аффинная по $x$, а потому при фиксированном $Y^{(i)}$ (3.7) эквивалентно

$$\max_{k=1,\dots,n_x+1}\Big\{(w^{(i)})^T H^{(i)}\mathbf{f}(g_k^{(i)})+\big\langle (H^{(i)}B^{(i)})^T w^{(i)}, y_k^{(i)}\big\rangle+\tilde{\mathbf{f}}(g_k^{(i)})+\big\langle (\widetilde{B}^{(i)})^T, y_k^{(i)}\big\rangle\colon$$

$$g_k^{(i)}\text{ — вершина }\Omega^{(i)}\Big\}+n_x\|H^{(i)}\|_\infty R^{(i),*}\sum_{k=1}^{n_x+1} w_k^{(i)}+\widetilde{\mathbf{R}}^{(i)}\le 0\ \ \forall y_k^{(i)}\in\mathcal{Y}_k^{(i)}. \tag{3.8}$$

Взяв максимум выражения из левой части (3.8) по $y_k^{(i)}$, получим (3.5). Отсюда (3.6) является следствием (3.5).

Убывание (в строгом смысле) функции цены вдоль траектории системы теперь вытекает из предположения 1: $\forall u\in\mathcal{U}(x)$

$$W'(x;\mathbf{f}(x)+\mathbf{g}(x)u)\le -(\tilde{\mathbf{f}}(x)+(\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u)\le \max\big\{-(\tilde{\mathbf{f}}(x)+(\tilde{\mathbf{g}}(x))^T u)\colon x\in\Omega^{(i)}, u\in\mathcal{P}\big\}<0. \tag{3.9}$$

## 4. Достаточные условия решения задачи управления

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathcal{I}_0\subseteq\{1,\dots,M\}$, *причем* $\mathcal{I}_1\subset\mathcal{I}_0$. *Зафиксируем выпуклые компактные множества* $\mathcal{Y}_1,\dots,\mathcal{Y}_S\subseteq\mathcal{P}$ *и неотрицательные величины* $w_1,\dots,w_S\in\mathbb{R}$ *такие, что*:

1) *для каждого* $i\in\mathcal{I}_0\setminus\mathcal{I}_1$ *выполняется неравенство* (3.5);

2) $w_k\ge\varphi(g_k)+K_k^{(i)}>0\ \ \forall k,\ \ \forall i\in\mathcal{I}_1$: $g_k$ *— вершина* $\Omega^{(i)}$.

*Пусть*

$$W_{\max}=\min\Big\{w_k\colon g_k\text{ — \textit{вершина} }\Omega^{(i)}\text{ \textit{при некотором} }i\in\mathcal{I}_0;$$

$$\text{\textit{либо} }\exists i^*\notin\mathcal{I}_0\colon g_k\text{ — \textit{вершина} }\Omega^{(i^*)},\text{ \textit{либо} }g_k\in\partial\Omega\Big\}, \tag{4.1}$$

$$\mathcal{X}_0=\bigcup\big\{\Omega^{(i)}\,\big|\,i\in\mathcal{I}_0;\ w_k\leqslant W_{\max}\ \ \forall k\colon g_k\text{ — \textit{вершина} }\Omega^{(i)}\big\}\ne\varnothing. \tag{4.2}$$

*Тогда для любого* $x_0\in\mathcal{X}_0$ *задача перевода траектории* $x(t,t_0,x_0)$ *в целевое множество* $\mathcal{X}_1$ *за конечное время является разрешимой, причем соответствующее позиционное управление может быть найдено в виде* (3.4). *Более того,* $W(x_0)$ *— верхняя оценка функции цены* $V(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную начальную позицию $x(t_0)=x_0\in\mathcal{X}_0$. Управление (3.4) является непрерывным по $x$ многозначным отображением с выпуклыми, компактными значениями, а потому оно допустимо. У замкнутой им системы (1.1) существует траектория $x(t)=x(t,t_0,x_0)$, $t\ge t_0$, продолжаемая по крайней до момента выхода из множества $\mathcal{X}_0$. Пусть $u(x(t))$ — соответствующая однозначная ветвь многозначного отображения $\mathcal{U}(x(t))$: $u(x(t))=Y^{(i)}(H^{(i)}x(t)+h^{(i)})$.

Из условия 1) теоремы 1 и леммы следует, что вдоль построенной траектории системы непрерывная кусочно-аффинная функция $W(x)$, определенная формулой (3.1), убывает по крайней мере пока $x(t)\in\Omega^{(i(t))}$ для некоторых $i(t)\in\mathcal{I}_0\backslash\mathcal{I}_1$. Но согласно (4.1), (4.2) справедливо $W(x(t))\leqslant W_{\max}$, а значит $x(t)\in\mathcal{X}_0\ \ \forall t\geqslant t_0$.

Поскольку $W(x_0)\geqslant 0$, а в каждом из симплексов $\Omega^{(i)}, i\in\mathcal{I}_0\setminus\mathcal{I}_1$, полная производная функции $W(x)$ строго отделена от нуля некоторой константой (см. (3.9)), то за конечное время значение $W(x(t))$ должно достигнуть нулевого значения. То есть найдется такое $t^*\ge t_0$, что $x(t^*)\in\Omega^{(i^*)}\subseteq\mathcal{X}_1$ для некоторого $i^*\in\mathcal{I}_1$.

Отрезок $[t_0,t^*]$ можно представить в виде $[t_0=\tau_1,\tau_2]\cup[\tau_2,\tau_3]\cup\ldots\cup[\tau_{k-1},\tau_k=t^*]$, где на каждом из отрезков $[\tau_j,\tau_{j+1}]$ траектория $x(t)$ находится в одном (для данного отрезка) симплексе $\Omega^{(i_1)}$ либо движется по общей границе фиксированной совокупности соседних симплексов $\Omega^{(i_1)}\cap\ldots\cap\Omega^{(i_m)}$ (здесь $i_1,\dots,i_m$ зависят от $j$). На каждом из интервалов $(\tau_j,\tau_{j+1})$

производная непрерывной функции $W(x)$ вдоль построенной траектории системы является непрерывной функцией. Проинтегрировав ее, получим неравенство

$$W(x(\tau_{j+1})) - W(x(\tau_j)) \le -\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \big(\tilde{\mathbf{f}}(x(\tau)) + (\tilde{\mathbf{g}}(x(\tau)))^T u(x(\tau))\big) d\tau, \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

Из условия 2) теоремы, а также из (2.2), (2.3) следует, что $W(x(t^*)) \ge \varphi(x(t^*))$. Объединяя полученные неравенства, получим

$$\varphi(x(t^*)) \le W(t^*) \le W(x_0) - \int\limits_{t_0}^{t^*} \big(\tilde{\mathbf{f}}(x(\tau)) + (\tilde{\mathbf{g}}(x(\tau)))^T u(x(\tau))\big) d\tau,$$

откуда имеем, что $W(x_0) \ge J(u(\cdot)) \ge V(x_0)$. □

## 5. Алгоритм построения кусочно-аффинной функции цены

Целью описываемого в данном разделе алгоритма является определение значений величин $w_1, \ldots, w_S \in \mathbb{R}$, множеств $\mathcal{Y}_1, \ldots, \mathcal{Y}_S \subseteq \mathcal{P}$, а также множества индексов $\mathcal{I}_0$, для которых выполнялась бы теорема 1. При этом достаточно определить $w_k$, $\mathcal{Y}_k$ только для тех индексов $k = 1, \ldots, S$, каждому из которых соответствует $g_k$ — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(j)}$, $j \in \mathcal{I}_0$.

Ниже на каждой итерации работы основного алгоритма будет использовано некоторое (произвольное) правило выбора индекса $k^*$ из заданного конечного набора $\{k_1, \ldots, k_r\}$, $r \ge 1$. Каждый конкретный алгоритм такого выбора (будем обозначать его через $k^* = \mathcal{F}(\{k_1, \ldots, k_r\})$) позволит в качестве результата получить, вообще говоря, свою функцию цены $W(x)$. В данной работе не будем конкретизировать такого рода алгоритм, предполагая, что он задан и фиксирован (например, используется случайный выбор с одинаковыми вероятностями элементарных исходов).

Каждой вершине $g_k$ сопоставим вспомогательную величину $\sigma_k \in \{-1, 0, 1\}$. Здесь $\sigma_k = 0$ соответствует тому факту, что вершина $g_k$ еще не была обработана алгоритмом, а $\sigma_k = 1$ — тому факту, что $g_k$ была обработана, причем для нее уже определены значения функции цены $w_k$ и множества управляющих параметров $\mathcal{Y}_k$ с необходимыми свойствами; $\sigma_k = -1$ соответствует обработанной вершине, для которой подходящие $w_k$, $\mathcal{Y}_k$ построить не удалось.

А л г о р и т м 1: **Построение непрерывных функций цены и управления.**

1) Для каждой вершины $g_k$, $k = 1, \ldots, S$, являющейся вершиной $\Omega^{(j)}$, $j \in \mathcal{I}_1$, положим $w_k = \varphi(g_k) + \max\{K^{(i)}_{\sigma(i,k)} : i \in \mathcal{I}_1, g_k \in \Omega^{(i)}\}$, $\mathcal{Y}_k = \mathcal{P}$, $\sigma_k = 1$. Для всех остальных вершин $g_k$ пусть $\sigma_k = 0$.

2) Определим величину $W_{\max}$:

$$W_{\max} = \min\Big\{w_s \colon \sigma_s = 1;\ \text{либо } \exists i^* \colon g_s \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)} \text{ и } \exists s^* : \\ g_{s^*} \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)}, \sigma_{s^*} \ne 1, \text{ либо } g_s \in \partial\Omega\Big\}.$$

3) Определим множество индексов

$$\mathcal{K} = \Big\{k^* \in \{1, \ldots, S\} \colon \sigma_{k^*} = 0,\ \exists j = 1, \ldots, M \colon g_{k^*} \text{ — вершина } \Omega^{(j)}, \\ \text{причем } \ \forall k \ne k^* \colon g_k \text{ — вершина } \Omega^{(j)} \Rightarrow \sigma_k = 1\Big\}.$$

4) Если $\mathcal{K} = \varnothing$, то переходим к п. 11).

5) Если $\mathcal{K} \neq \varnothing$, то пусть $k^* = \mathcal{F}(\mathcal{K})$. Вершине $g_{k^*}$ соответствуют некоторые содержащие ее симплексы $\Omega^{(i_1)}, \ldots, \Omega^{(i_m)}$, $m \geqslant 1$, все остальные вершины $g_k \neq g_{k^*}$ которых уже были ранее обработаны (т. е. для каждой из них $\sigma_k = 1$).

6) Определим величину функции цены $w_{k^*}$. Для каждого симплекса $\Omega^{(i_s)}$, $s = 1, \ldots, m$, рассмотрим неравенство (3.5) при $i = i_s$ относительно неизвестных $w_{k^*}$ и $y_{k^*} \in \mathcal{Y}_{k^*} \subseteq \mathcal{P}$. У вектора $w^{(i_s)}$ известны все компоненты, кроме $w_{k^*}$. Неравенство (3.5) может быть переписано в виде эквивалентной системы неравенств следующего вида:

$$\begin{cases} w_{k^*}(a_s^T y_{k^*} + b_{\sigma(i_s,k^*),s}) \;<\; c_s^T y_{k^*} + d_{\sigma(i_s,k^*),s}, \\ w_{k^*}(a_s^T y_k^{(i_s)} + b_{k,s}) \;<\; c_s^T y_k^{(i_s)} + d_{k,s}, \quad k = 1, \ldots, n_x+1, \quad k \neq \sigma(i_s,k^*) \;\; \forall y_k^{(i_s)} \in \mathcal{Y}_k^{(i_s)}, \end{cases}$$

где коэффициенты $a_s \in \mathbb{R}^{n_u}$, $b_{k,s} \in \mathbb{R}$, $c_s \in \mathbb{R}^{n_u}$, $d_{k,s} \in \mathbb{R}$ могут быть найдены из (3.5):

$$a_s \text{ — столбец матрицы } (H^{(i_s)} B^{(i_s)})^T \text{ с номером } \sigma(i_s,k^*), \tag{5.3}$$

$$b_{k,s} = (H^{(i_s)} f(g_k^{(i_s)}))_{\sigma(i_s,k^*)} + n_x \|H^{(i_s)}\|_\infty R^{(i_s),*}, \tag{5.4}$$

$$c_s = -\Bigl(\sum_{p \neq \sigma(i_s,k^*)} w_p^{(i_s)} \cdot \bigl\{ \text{ столбец } (H^{(i_s)} B^{(i_s)})^T \text{ с номером } p \bigr\} + (\widetilde{B}^{(i)})^T\Bigr), \tag{5.5}$$

$$d_{k,s} = -\Bigl(\sum_{p \neq \sigma(i_s,k^*)} w_p^{(i_s)} \bigl((H^{(i_s)} f(g_k^{(i_s)}))_p + n_x \|H^{(i_s)}\|_\infty R^{(i_s),*}\bigr) + \tilde{\mathbf{f}}(g_k^{(i_s)}) + \widetilde{\mathbf{R}}^{(i_s)}\Bigr). \tag{5.6}$$

Пусть[4]

$$\tilde{\mathcal{P}} = \bigl\{u \in \mathcal{P} \colon a_s^T u + b_{\sigma(i_s,k^*),s} \leqslant -\varepsilon \;\; \forall s = 1, \ldots, m\bigr\}.$$

Кроме того, для каждого $r = 1, \ldots, S$, для которого $g_r$ — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(i_1)}, \ldots, \Omega^{(i_m)}$ и $r \neq k^*$, пусть

$$\tilde{\mathcal{Y}}_r = \bigl\{u \in \mathcal{Y}_r \colon a_s^T u + b_{\sigma(i_s,r),s} \leqslant -\varepsilon \;\; \forall s = 1, \ldots, m \colon g_r \in \Omega^{(i_s)}\bigr\}.$$

7) Если для хотя бы одного $r$ $\tilde{\mathcal{Y}}_r = \varnothing$ либо $\tilde{\mathcal{P}} = \varnothing$, то положим $\sigma_{k^*} = -1$. Алгоритм переходит к п. 3).

8) Если условия предыдущего пункта не выполнены, то положим $\sigma_{k^*} = 1$,

$$w_{k^*} = \min_{u \in \tilde{\mathcal{P}}} \min_{y_r \in \tilde{\mathcal{Y}}_r} \max_{s=1,\ldots,m} \max\Biggl\{ \frac{c_s^T u + d_{\sigma(i_s,k^*),s}}{a_s^T u + b_{\sigma(i_s,k^*),s}}, \\ \max\Biggl\{ \frac{c_s^T y_k^{(i_s)} + d_{k,s}}{a_s^T y_k^{(i_s)} + b_{k,s}} : k = 1, \ldots, n_x+1, k \neq \sigma(i_s,k^*)\Biggr\}\Biggr\}. \tag{5.7}$$

Пусть также $\mathcal{P}^*$, $\mathcal{Y}_r^*$ — множества минимизаторов в (5.7). Положим $\mathcal{Y}_{k^*} = \mathcal{P}^*$, а также скорректируем управление в ранее обработанных вершинах: $\mathcal{Y}_r = \mathcal{Y}_r^*$, $\forall r = 1, \ldots, S$, где $g_r$ — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(i_1)}, \ldots, \Omega^{(i_m)}$, $r \neq k^*$.

9) Подсчитаем вспомогательную величину

$$W_{\max}^+ = \min\Bigl\{w_s \colon \sigma_s = 1; \text{ либо } \exists i^* \colon g_s \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)} \text{ и } \exists s^* : \\ g_{s^*} \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)}, \sigma_{s^*} \neq 1, \text{ либо } g_s \in \partial\Omega\Bigr\}.$$

Если $W_{\max}^+ < W_{\max}$, то дополнительно положим $w_{k^*} = W_{\max}$. В противном случае величина $w_{k^*}$ не изменяется, но положим $W_{\max} = W_{\max}^+$.

[4]Здесь $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное малое число.

10) Алгоритм переходит к п. 3) (обработке следующей вершины).

11) Алгоритм завершает работу. Итогом является набор величин $w_k$, множеств $\mathcal{Y}_k$ для тех вершин, для которых $\sigma_k = 1$, а также величина $W_{\max}$, соответствующая (4.1). Множество $\mathcal{X}_0$ теперь определим согласно (4.2), учитывая только те симплексы $\Omega^{(i)}$, для которых каждой вершине $g_k$ сопоставлена величина $\sigma_k = 1$.

Заметим, что для построенных $\mathcal{X}_0$, $W(x)$, $\mathcal{Y}_k$ выполняются все условия теоремы 1. $\square$

Приведенный выше метод пересчета величин $W_{\max}$ и $w_k$ в п. 9) необходим для того, чтобы у полученной кусочно-аффинной функции цены не появлялись локальные минимумы, отличные от точек множества $\mathcal{X}_1$, которые будут затем отброшены при использовании конструкций из (4.1), (4.2). Таким образом, удается увеличить множество $\mathcal{X}_0$ и избавиться от заведомо лишних расчетов.

## 6. Разрывная кусочно-аффинная функция цены

Результаты предыдущих разделов можно обобщить на случай функций цены и управлений, которые могут иметь разрывы на границах симплексов $\Omega^{(i)}$. Это позволит получить более гибкий механизм построения функций цены и управления, а также расширить область разрешимости задачи $\mathcal{X}_0$ с использованием таких функций.

Предположим, что в каждом симплексе $\Omega^{(i)}$ величины $w^{(i)}_{\sigma(i,k)}$ и множества $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}$, соответствующие фиксированной вершине $g_k$, могут различаться при разных $i$. Пусть $i_1, \ldots, i_m$ — номера всех симплексов, содержащих вершину $g_k$. Разрывная кусочно-аффинная функция цены по-прежнему может быть определена из (3.1).

Для двух соседних симплексов $\Omega^{(i^*)}$ и $\Omega^{(i^{**})}$, имеющих общую грань $\mathcal{H}_{i^*,i^{**}}$, которая является $(n_x - 1)$-мерным симплексом, будем говорить, что $\Omega^{(i^*)}$ недостижим из $\Omega^{(i^{**})}$, если выполняется условие[5]

$$\min_s \Big\{ (n_{i^*,i^{**}})^T (A^{(i^{**})} g_s + f^{(i^{**})}) - \rho(-(B^{(i^{**})})^T n_{i^*,i^{**}} | \mathcal{P}) - \rho(-n_{i^*,i^{**}} | \mathcal{Q}^{(i^{**})}) : \\ g_s \text{ — вершина } \mathcal{H}_{i^*,i^{**}} \Big\} > 0, \qquad (6.1)$$

где $n_{i^*,i^{**}}$ — единичная нормаль к $\mathcal{H}_{i^*,i^{**}}$, указывающая в сторону $\Omega^{(i^{**})}$. Если условие (6.1) не выполняется, то будем считать, что $\Omega^{(i^*)}$ достижим из $\Omega^{(i^{**})}$.

Для каждой вершины $g_k$, для каждой пары симплексов $\Omega^{(i^*)}$ и $\Omega^{(i^{**})}$, содержащих эту вершину, $i_1 \le i^* < i^{**} \le i_m$, будем говорить, что симплекс $\Omega^{(i^*)}$ достижим из $\Omega^{(i^{**})}$, если найдутся такие различные значения $i_{j_1}, \ldots, i_{j_s}$, $2 \le s \le m$, что $i_{j_1} = i^*$, $i_{j_s} = i^{**}$, $\Omega^{(i_{j_l})}$ достижим из $\Omega^{(i_{j_{l+1}})}$ для любого $l = 1, \ldots, s-1$. В противном случае будем считать, что $\Omega^{(i^*)}$ недостижим из $\Omega^{(i^{**})}$. Для любого $i \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ пусть

$$\mathcal{I}(i,k) = \Big\{ j \in \{i_1, \ldots, i_m\} \colon j \ne i,\ g_k \in \Omega^{(i_1)} \cap \ldots \cap \Omega^{(i_m)},\ \Omega^{(j)} \text{ достижим из } \Omega^{(i)} \Big\} \cup \{i\}.$$

Приведенное выше определение недостижимости является достаточным, но не необходимым условием того, что траектория не может попасть из одного симплекса в другой, соседний. Заметим, что введенное свойство достижимости одного симплекса из другого при фиксированном номере вершины $k$ обладает свойствами транзитивности и рефлексивности.

Используя введенные обозначения, теперь можно обобщить результат теоремы 1 на случай разрывных функций цены и управлений:

**Теорема 2.** *Пусть $\mathcal{I}_0 \subseteq \{1, \ldots, M\}$, $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_0$. Рассмотрим совокупность компактных множеств $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)} \subseteq \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{n_u}$ и неотрицательных величин $w^{(i)}_{\sigma(i,k)}$, $k = 1, \ldots, S$, $i = 1, \ldots, M$. Пусть выполнены следующие условия*:

[5] Множества $\mathcal{Q}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, M$, определены в (2.1).

1) *для каждого* $i \in \mathcal{I}_0 \setminus \mathcal{I}_1$ *выполняется неравенство* (3.5);

2) $w^{(i)}_{\sigma(i,k)} \geq \varphi(g_k) + K^{(i)}_{\sigma(i,k)} > 0 \ \ \forall k, \ \ \forall i \in \mathcal{I}_1 \colon g_k$ — *вершина* $\Omega^{(i)}$;

3) *для любого* $k$, *любых* $i^*, i^{**}$ *таких, что* $g_k \in \Omega^{(i^*)} \cap \Omega^{(i^{**})}$, $i^* \in \mathcal{I}(i^{**}, k)$, $i^{**} \in \mathcal{I}(i^*, k)$, $\mathcal{Y}^{(i^*)}_{\sigma(i^*,k)} = \mathcal{Y}^{(i^{**})}_{\sigma(i^{**},k)}$;

4) *для любых* $i^*$, $i^{**} \in \{1, \ldots, M\}$, $g_k \in \Omega^{(i^*)} \cap \Omega^{(i^{**})}$ *если* $i^{**} \in \mathcal{I}(i^*, k)$, *то* $w^{(i^*)}_{\sigma(i^*,k)} \geq w^{(i^{**})}_{\sigma(i^{**},k)}$.

*Пусть*

$$W_{\max} = \min_{i,k} \Big\{ w^{(i)}_{\sigma(i,k)} \colon g_k \text{ — вершина } \Omega^{(i)} \text{ при некотором } i \in \mathcal{I}_0;$$

$$\text{либо } \exists i^* \notin \mathcal{I}_0 \colon g_k \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)}, \text{ либо } g_k \in \partial\Omega \Big\}, \tag{6.2}$$

$$\mathcal{X}_0 = \bigcup \big\{ \Omega^{(i)} \big| \, i \in \mathcal{I}_0; \ w^{(i)}_{\sigma(i,k)} \leqslant W_{\max} \ \ \forall k \colon g_k \text{ — вершина } \Omega^{(i)} \big\} \neq \varnothing. \tag{6.3}$$

*Тогда* $\forall x_0 \in \mathcal{X}_0$ *задача перевода траектории* $x(t, t_0, x_0)$ *в целевое множество* $\mathcal{X}_1$ *за конечное время разрешима, причем соответствующее позиционное разрывное кусочно-аффинное управление может быть найдено в виде* (3.4). $W(x_0)$ — *верхняя оценка функции цены* $V(x_0)$.

Доказательство. Схема доказательства аналогична случаю с непрерывной функцией цены. Обозначим лишь существенные отличия, в которых проявляются возможные разрывы функции цены и управления на границах соседних симплексов. А именно условие 3) теоремы гарантирует, что построенное кусочно-аффинное управление не будет иметь разрывы на $(n_x - 1)$-мерных гранях соседних симплексов в том случае, если траектории системы могут пересекать эту грань в обоих направлениях либо двигаться вдоль нее. Это позволяет избежать проблем с продолжаемостью траекторий замкнутой системы и гарантирует допустимость построенного управления. На любой траектории на конечном отрезке времени происходит лишь конечное число разрывов функций цены и управления.

Условие 4) гарантирует невозрастание функции цены при прохождении траектории через границу соседних симплексов. Это в совокупности с рассуждениями из доказательства теоремы 1 гарантирует невозрастание $W(x)$ вдоль любой рассматриваемой траектории вплоть до попадания ее в $\mathcal{X}_1$. □

Рассмотрим теперь алгоритм построения функций цены и управления, являющийся обобщением приведенного выше алгоритма для случая непрерывной функции цены. В данном случае будут использованы аналогичные вспомогательные величины $\sigma_k$, $k = 1, \ldots, S$, а также отображение $\mathcal{F}$ для выбора очередной обрабатываемой вершины на каждом текущем шаге.

Алгоритм 2: **Построение разрывных функций цены и управления.**

1) Для любых $g_k$, $k = 1, \ldots, S$, $i \in \mathcal{I}_1$ таких, что $g_k \in \Omega^{(i)}$, положим

$$w^{(i)}_{\sigma(i,k)} = \varphi(g_k) + \max_{j,s} \Big\{ K^{(j)}_s \colon j \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}(i,k), 1 \leq s \leq n_x + 1, g^{(j)}_s = g_k \Big\},$$

$\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)} = \mathcal{P}$, $\sigma_k = 1$. Для всех остальных вершин $g_k$ пусть $\sigma_k = 0$.

2) Определим величину $W_{\max}$:

$$W_{\max} = \min_{k,i} \Big\{ w^{(i)}_{\sigma(i,k)} \colon g_k \in \Omega^{(i)}, \ \sigma_s = 1 \ \ \forall s \colon g_s \in \Omega^{(i)}; \text{ либо } \exists i^* \colon g_k \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)} \text{ и } \exists k^* :$$

$$g_{k^*} \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)}, \sigma_{k^*} \neq 1, \text{ либо } g_k \in \partial\Omega \Big\}.$$

3) Определим множество индексов

$$\mathcal{K} = \Big\{ k \in \{1, \ldots, S\} \colon \sigma_k = 0, \ \exists j = 1, \ldots, M \colon g_k \text{ — вершина } \Omega^{(j)},$$

$$\text{причем } \ \forall k^* \neq k \colon g_{k^*} \text{ — вершина } \Omega^{(j)} \Rightarrow \sigma_{k^*} = 1 \Big\}.$$

4) Если $\mathcal{K} = \varnothing$, то переходим к п. 12).

5) Если $\mathcal{K} \neq \varnothing$, то пусть $k^* = \mathcal{F}(\mathcal{K})$. Вершине $g_{k^*}$ соответствуют некоторые содержащие ее симплексы $\Omega^{(i_1)}, \ldots, \Omega^{(i_m)}$, $m \geqslant 1$, для которых все остальные вершины $g_k \neq g_{k^*}$, уже были ранее обработаны (т. е. для каждой из них $\sigma_k = 1$).

6) Для каждого $i = i_1, \ldots, i_m$, для каждого $k \in \{1, \ldots, S\}$: $g_k \in \Omega^{(i)}$, $\sigma_k = 1$ (т. е. для каждой ранее обработанной вершины симплекса с единственной необработанной вершиной) определим:

6a) величину $w^{(i)}_{\sigma(i,k)}$, используя условия на возможные разрывы функции цены на границах симплексов (см. условие 4) в теореме 2):

$$w^{(i)}_{\sigma(i,k)} = \max\Big\{W_{\max}, \max_j \big\{w^{(j)}_{\sigma(j,k)} \colon j \in \mathcal{I}(i,k), \sigma_s = 1 \ \ \forall s = 1, \ldots, S \colon g_s \in \Omega^{(j)}\big\}\Big\};$$

6b) ограничения на управления $\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)}$, удовлетворяющие условию 3) из теоремы 2:

$$\mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k)} = \begin{cases} \mathcal{Y}^{(j)}_{\sigma(j,k)}, & \text{если } \exists j \in \mathcal{I}(i,k) \colon i \in \mathcal{I}(j,k), \ \sigma_s = 1 \ \ \forall s = 1, \ldots, S \colon g_s \in \Omega^{(j)}, \\ \mathcal{P}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

7) Определим величины $w^{(i)}_{\sigma(i,k^*)}$, $i = i_1, \ldots, i_m$. Для каждого симплекса $\Omega^{(i_s)}$, $s = 1, \ldots, m$, рассмотрим неравенство (3.5) при $i = i_s$ относительно неизвестных

$$w^{(i)}_{\sigma(i,k^*)} \ \text{ и } \ y^{(i)}_{\sigma(i,k^*)} \in \mathcal{Y}^{(i)}_{\sigma(i,k^*)} \subseteq \mathcal{P}:$$

$$\begin{cases} w^{(i)}_{\sigma(i,k^*)}(a_s^T y^{(i)}_{\sigma(i,k^*)} + b_{\sigma(i_s,k^*),s}) < c_s^T y^{(i)}_{\sigma(i,k^*)} + d_{\sigma(i_s,k^*),s}, \\ w^{(i)}_{\sigma(i,k^*)}(a_s^T y^{(i_s)}_r + b_{r,s}) < c_s^T y^{(i_s)}_r + d_{r,s}, \ 1 \leq r \leq n_x + 1, \ r \neq \sigma(i_s, k^*) \ \ \forall y^{(i_s)}_r \in \mathcal{Y}^{(i_s)}_r. \end{cases}$$

где коэффициенты $a_s \in \mathbb{R}^{n_u}$, $b_{r,s} \in \mathbb{R}$, $c_s \in \mathbb{R}^{n_u}$, $d_{r,s} \in \mathbb{R}$ могут быть найдены из (5.3)–(5.6).

Пусть $\forall i = i_1, \ldots, i_m$

$$\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} = \Big\{u \in \mathcal{P} : a_s^T u + b_{\sigma(i_s,k^*),s} \leqslant -\varepsilon \ \ \forall s = 1, \ldots, m : i \in \mathcal{I}(i_s, k^*), i_s \in \mathcal{I}(i, k^*)\Big\},$$

и для каждого $r = 1, \ldots, S$, для которого $g_r$ — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(i_1)}, \ldots, \Omega^{(i_m)}$, $r \neq k^*$, пусть

$$\tilde{\mathcal{Y}}^{(i)}_r = \Big\{u \in \mathcal{Y}^{(i_s)}_r : a_s^T u + b_{\sigma(i_s,r),s} \leqslant -\varepsilon \ \ \forall s = 1, \ldots, m : i \in \mathcal{I}(i_s, k^*), i_s \in \mathcal{I}(i, k^*)\Big\}.$$

8) Если существует $i = i_1, \ldots, i_m$ такое, что хотя бы для одного $r$ $\tilde{\mathcal{Y}}^{(i)}_r = \varnothing$ либо $\tilde{\mathcal{P}}^{(i)} = \varnothing$, то положим $\sigma_{k^*} = -1$. Алгоритм переходит к п. 3).

9) Если условия предыдущего пункта не выполнены, то положим $\sigma_{k^*} = 1$, и $\forall i = i_1, \ldots, i_m$

$$\begin{aligned} w^{(i)}_{\sigma(i,k^*)} = \min_{u \in \tilde{\mathcal{P}}^{(i)}} \min_{y_r \in \tilde{\mathcal{Y}}^{(i)}_r} \max_{s=1,\ldots,m} \Bigg\{ \max\Bigg\{ & \frac{c_s^T u + d_{\sigma(i_s,k^*),s}}{a_s^T u + b_{\sigma(i_s,k^*),s}}, \\ & \max\Bigg\{\frac{c_s^T y^{(i_s)}_k + d_{k,s}}{a_s^T y^{(i_s)}_k + b_{k,s}} \colon k = 1, \ldots, n_x + 1, k \neq \sigma(i_s, k^*)\Bigg\}\Bigg\} \colon i_s \in \mathcal{I}(i, k^*)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Пусть также $\mathcal{P}^{(i),*}$, $\mathcal{Y}^{(i),*}_r$ — множества минимизаторов в (6.4). Заметим, что $\forall i, j \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, для которых $i \in \mathcal{I}(j, k^*)$, $j \in \mathcal{I}(i, k^*)$, справедливы равенства: $w^{(i)}_{\sigma(i,k^*)} = w^{(j)}_{\sigma(j,k^*)}$, $\mathcal{P}^{(i),*} = \mathcal{P}^{(j),*}$, $\mathcal{Y}^{(i),*}_r = \mathcal{Y}^{(j),*}_r \ \ \forall r \colon g_r \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)}$.

Положим $\mathcal{Y}_{k^*}^{(i)} = \mathcal{P}^{(i),*}$, $\forall i = i_1, \ldots, i_m$. Также скорректируем управление в ранее обработанных вершинах: $\forall r = 1, \ldots, S$, где $g_r$ — вершина хотя бы одного из симплексов $\Omega^{(i_1)}, \ldots, \Omega^{(i_m)}$, $r \neq k^*$,

$$\mathcal{Y}_r^{(i)} = \mathcal{Y}_r^{(i),*} \;\; \forall i = i_1, \ldots, i_m \colon g_r \in \Omega^{(i)};$$

$$\mathcal{Y}_r^{(i)} = \mathcal{Y}_r^{(j)} \;\; \forall i, j \colon g_r \in \Omega^{(i)} \cap \Omega^{(j)},\; i \in \mathcal{I}(j, r),\; j \in \mathcal{I}(i, r),\; j \in \{i_1, \ldots, i_m\},\; i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}.$$

10) Подсчитаем вспомогательную величину

$$W_{\max}^{+} = \min_{k,i} \Big\{ w_{\sigma(i,k)}^{(i)} \colon g_k \in \Omega^{(i)},\; \sigma_s = 1 \;\; \forall s \colon g_s \in \Omega^{(i)}; \text{либо } \exists i^* \colon g_k \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)} \text{ и } \exists k^* : \\ g_{k^*} \text{ — вершина } \Omega^{(i^*)}, \sigma_{k^*} \neq 1,\; \text{либо } g_k \in \partial\Omega \Big\}.$$

Если $W_{\max}^{+} < W_{\max}$, то дополнительно положим $w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)} = \max\{w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)}, W_{\max}\}$, $\forall i = i_1, \ldots, i_m$. В противном случае величины $w_{\sigma(i,k^*)}^{(i)}$ не изменяются, $W_{\max} = W_{\max}^{+}$.

11) Алгоритм переходит к п. 3) (обработке следующей вершины).

12) Алгоритм завершает работу. Итогом является набор величин $w_{\sigma(i,k)}^{(i)}$, множеств $\mathcal{Y}_{\sigma(i,k)}^{(i)}$ для тех вершин, для которых $\sigma_k = 1$, а также величина $W_{\max}$, соответствующая (6.2). Множество $\mathcal{X}_0$ теперь определим согласно (6.3).

Для построенных множеств $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{Y}_{\sigma(i,k)}^{(i)}$, а также функции $W(x)$ выполняются все условия теоремы 2. □

## 7. Пример

В качестве иллюстрации описанных в предыдущих разделах методов рассмотрим задачу управления для математической модели движения колесного робота на плоскости, содержащей следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos(x_3), \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin(x_3), \\ \dot{x}_3 = u_2. \end{cases}$$

Здесь $(x_1, x_2)$ — положение объекта на плоскости, $x_3$ — угол его ориентации. На управляющие параметры наложены следующие ограничения: $|u_1| \leq u_{1,\max}$, $\;u_2 \in [0, u_{2,\max}]$. Рассмотрим

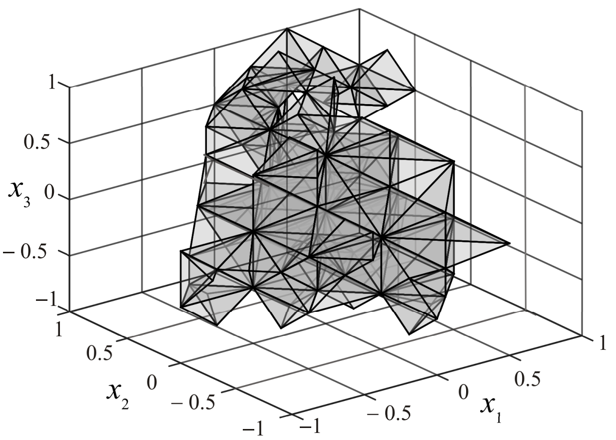


Рис. 1. Множество разрешимости в случае непрерывной функции цены

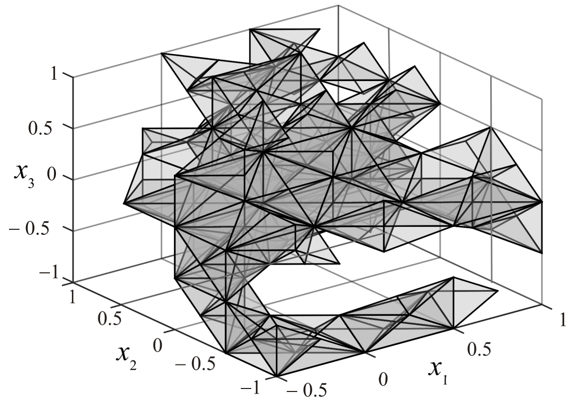


Рис. 2. Множество разрешимости в случае разрывной функции цены

задачу перевода объекта в целевое множество $\mathcal{X}_1 = \{(x_1, x_2, x_3)^T : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le \delta\}$, $\delta > 0$, за наименьшее время. То есть $\mathbf{f}(x) = 0, \ \tilde{\mathbf{f}}(x) = 1, \ \tilde{\mathbf{g}}(x) = 0, \ \varphi(x) = 0,$

$$\mathbf{g}(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_3) & 0 \\ \sin(x_3) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На рис. 1 и 2 представлены оценки множеств разрешимости $\mathcal{X}_0$ для задачи управления, построенные соответственно при помощи непрерывных и разрывных кусочно-аффинных функций цены. При этом $\delta = 0.1$, $u_{1,\max} = 1$, $u_{2,\max} = 2$ и была использована сетка из $M = 2004$ симплексов с $S = 508$ вершинами.

## Заключение

Рассмотренные в предыдущих разделах достаточные условия разрешимости задачи управления на бесконечном временном горизонте с интегральным функционалом, а также соответствующие им алгоритмы позволяют получать приближенные решения в достаточно простой с точки зрения вычислений форме. Однако остается еще нерешенным вопрос о том, как именно следует определить правило выбора $\mathcal{F}$, от которого зависят конкретная аппроксимация множества разрешимости и соответствующее управление. Кроме того, на данный момент остается открытым вопрос о том, можно ли за счет объединения предложенных здесь оценок для разных правил $\mathcal{F}$ получать сколь угодно точные аппроксимации множества разрешимости и оценки минимума интегрального функционала. Решению этих проблем будут посвящены дальнейшие исследования автора по теме данной работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Куржанский А.Б.** Принцип сравнения для уравнения типа Гамильтона — Якоби в теории управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12, № 1. С. 173–183.
2. **Kurzhanski A.B., Varaiya P.** Dynamics and control of trajectory tubes. Basel: Birkhäuser, 2014. 445 p.
3. **Habets L.C.G.J.M., Collins P.J., van Schuppen J.H.** Reachability and control synthesis for piecewise-affine hybrid systems on simplices // IEEE Trans Automatic Control. 2006. Vol. 51, no. 6. P. 938–948. doi: 10.1109/TAC.2006.876952 .
4. **Girard A., Martin S.** Synthesis of constrained nonlinear systems using hybridization and robust controllers on simplices // IEEE Trans Automatic Control. 2012. Vol. 57, no. 4. P. 1046–1051. doi: 10.1109/TAC.2011.2168874 .
5. **Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I.** Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. Boston: Birkhäuser, 2008. 570 p.
6. **Субботин А.И.** Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.
7. **Fleming W.H., Soner H.M.** Controlled Markov processes and viscosity solutions. N Y: Springer, 2006. 429 p.
8. **Куржанский А.Б., Точилин П.А.** Слабо инвариантные множества гибридных систем // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. С. 1523–1533.
9. **Asarin E., Dang T., Girard A.** Hybridization methods for the analysis of nonlinear systems // Acta Informatica. 2007. Vol. 43, iss. 7. P. 451–476. doi: 10.1007/s00236-006-0035-7 .
10. **Точилин П.А.** О построении невыпуклых аппроксимаций множеств достижимости кусочно-линейной системы // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 11. С. 1503–1515.
11. **Mayantsev K.S., Tochilin P.A.** The feedback control problem for switched system with uncertainties // IFAC Proceedings Volumes. 2017. Vol. 50, iss. 1. P. 2187–2192. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.279.
12. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
13. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.

Поступила 20.10.2019
После доработки 22.01.2020
Принята к публикации 27.01.2020

Точилин Павел Александрович
канд. физ.-мат. наук
доцент факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М. В. Ломоносова, г. Москва
e-mail: tochilin@cs.msu.ru

**REFERENCES**

1. Kurzhanski A.B. Comparison principle for equations of the Hamilton-Jacobi type in control theory. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 253, no. 1, pp. S185–S195. doi: 10.1134/S0081543806050130 .
2. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and control of trajectory tubes.* Basel: Birkhäuser, 2014, 445 p. ISBN: 978-3-319-10277-1 .
3. Habets L.C.G.J.M., Collins P.J., van Schuppen J.H. Reachability and control synthesis for piecewise-affine hybrid systems on simplices. *IEEE Trans Automatic Control*, 2006, vol. 51, no. 6, pp. 938–948. doi: 10.1109/TAC.2006.876952 .
4. Girard A., Martin S. Synthesis of constrained nonlinear systems using hybridization and robust controllers on simplices. *IEEE Trans Automatic Control*, 2012, vol. 57, no. 4, pp. 1046–1051. doi: 10.1109/TAC.2011.2168874 .
5. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations.* Boston: Birkhäuser, 2008, 570 p. ISBN: 0817647546 .
6. Subbotin A.I. *Generalized solutions of first-order PDEs. The dynamical optimization perspective.* Basel: Birkhäuser, 1995, 314 p. doi: 10.1007/978-1-4612-0847-1 . Translated to Russian under the title *Obobshchennye resheniya uravnenii v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka: Perspektivy dinamicheskoi optimizatsii.* Izhevsk: Inst. Komp'yuter. Issled. Publ., 2003, 336 p.
7. Fleming W.H., Soner H.M. *Controlled Markov processes and viscosity solutions.* N Y: Springer, 2006. 429 p. ISBN: 978-0-387-31071-8 .
8. Kurzhanski A.B., Tochilin P.A. Weakly invariant sets of hybrid systems. *Diff. Eq.*, 2008, vol. 44, no. 11, pp. 1585–1594. doi: 10.1134/S0012266108110104 .
9. Asarin E., Dang T., Girard A. Hybridization methods for the analysis of nonlinear systems. *Acta Informatica*, 2007, vol. 43, no. 7, pp. 451–476. doi: 10.1007/s00236-006-0035-7 .
10. Tochilin P.A. On the construction of nonconvex approximations to reach sets of piecewise linear systems. *Diff. Eq.*, 2015, vol. 51, no. 11, pp. 1503–1515. doi: 10.1134/S0012266115110117 .
11. Mayantsev K.S., Tochilin P.A. The feedback control problem for switched system with uncertainties. *IFAC Proceedings Volumes*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 2187–2192. doi: 10.1016/j.ifacol.2017.08.279 .
12. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides.* Dordrecht: Springer, 1988, 304 p. doi: 10.1007/978-94-015-7793-9 . Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu.* Moscow: Nauka Publ., 1985, 225 c.
13. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 319 p.

Received October 20, 2019
Revised January 22, 2020
Accepted January 27, 2020

**Funding Agency**: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19–01–00613a and no. 16–29–04191ofi_m).

*Pavel Aleksandrovich Tochilin,* Cand. Sci. (Phys.-Math.), Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Moscow, 119991 Russia,
e-mail: tochilin@cs.msu.ru .

Cite this article as: P. A. Tochilin. On the construction of a piecewise affine value function in an infinite-horizon optimal control problem, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 223–238 .