ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 26 № 1 2020

УДК 517.977

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ДВУМЯ МАЛЫМИ СОПОДЧИНЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. Р. Данилин

Рассматривается задача оптимального граничного управления решениями уравнения эллиптического типа в ограниченной области с гладкой границей с малым коэффициентом при операторе Лапласа и малым, соподчиненным с первым, коэффициентом при граничном условии и интегральными ограничениями на управление.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon := -\varepsilon^2\Delta z + a(x)z = f(x), \quad x\in\Omega, \quad z\in H^1(\Omega), \\[2ex] l_{\varepsilon,\beta} z := \varepsilon^\beta \dfrac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), \quad x\in\Gamma, \end{cases}$$

со следующим функционалом качества

$$J(u) := \|z - z_d\|^2 + \nu^{-1}|||u|||^2 \to \inf, \quad u\in\mathcal{U},$$

где $0<\varepsilon\ll 1$, $\beta\geqslant 0$, $\beta\in\mathbb{Q}$, $\nu>0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций, $\partial z/\partial n$ — производная функции z в точке $x\in\Gamma$ по направлению внешней (по отношению к области Ω) нормали,

$$a(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot)\in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g(\cdot)\in C^\infty(\Gamma), \quad \forall\, x\in\overline{\Omega} \quad a(x)\geqslant \alpha^2 > 0,$$
$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \{u(\cdot)\in L_2(\Gamma)\colon |||u|||\leqslant r\}.$$

Здесь через $\|\cdot\|$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Omega)$, а через $|||\cdot|||$ — норма в пространстве $L_2(\Gamma)$. Получено полное асимптотическое разложение по степеням малого параметра решения рассматриваемой задачи в случае, когда $0<\beta<3/2$.

Ключевые слова: сингулярные задачи, оптимальное управление, краевые задачи для систем уравнений в частных производных, асимптотические разложения.

A. R. Danilin. Asymptotics of a solution to a problem of optimal boundary control with two small cosubordinate parameters.

We consider a problem of optimal boundary control for solutions of an elliptic type equation in a bounded domain with smooth boundary with a small coefficient at the Laplace operator, a small coefficient, cosubordinate with the first, at the boundary condition, and integral constraints on the control:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon := -\varepsilon^2\Delta z + a(x)z = f(x), \quad x\in\Omega, \quad z\in H^1(\Omega), \\[2ex] l_{\varepsilon,\beta} z := \varepsilon^\beta \dfrac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), \quad x\in\Gamma, \end{cases}$$

$$J(u) := \|z - z_d\|^2 + \nu^{-1}|||u|||^2 \to \inf, \quad u\in\mathcal{U},$$

where $0<\varepsilon\ll 1$, $\beta\geqslant 0$, $\beta\in\mathbb{Q}$, $\nu>0$, $H^1(\Omega)$ is the Sobolev function space, $\partial z/\partial n$ is the derivative of z at the point $x\in\Gamma$ in the direction of the outer (with respect to the domain Ω) normal,

$$a(\cdot), f(\cdot)\in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g(\cdot)\in C^\infty(\Gamma), \quad \forall\, x\in\overline{\Omega} \quad a(x)\geqslant \alpha^2 > 0,$$
$$\mathcal{U}=\mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \{u(\cdot)\in L_2(\Gamma)\colon |||u|||\leqslant r\}.$$

Here $\|\cdot\|$ and $|||\cdot|||$ are the norms in the spaces $L_2(\Omega)$ and $L_2(\Gamma)$, respectively. We find the complete asymptotic expansion of the solution of the problem in the powers of the small parameter in the case where $0<\beta<3/2$.

Keywords: singular problems, optimal control, boundary value problems for systems of partial differential equations, asymptotic expansions.

MSC: 35C20, 35B25, 76M45, 93C70

DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-1-102-111

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3)$ — ограниченная область с границей $\Gamma := \partial\Omega$. Будем предполагать, что $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ есть многообразие с краем Γ класса C^∞, расположенное по одну сторону от Γ.

Рассматривается следующая задача граничного оптимального управления [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.9)]

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon := -\varepsilon^2 \Delta z + a(x) z = f(x), \quad x \in \Omega, \quad z \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon,\beta} z := \varepsilon^\beta \dfrac{\partial z}{\partial n} = g(x) + u(x), \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$J(u) := \|z - z_d\|^2 + \nu^{-1} |||u|||^2 \to \inf, \quad u \in \mathcal{U}, \tag{1.2}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\beta \geqslant 0$, $\beta \in \mathbb{Q}$, $\nu > 0$, $H^1(\Omega)$ — соболевское пространство функций [2;3], $\partial z/\partial n$ — производная функции z в точке $x \in \Gamma$ по направлению внешней (по отношению к области Ω) нормали,

$$\begin{gathered} a(\cdot), f(\cdot), z_d(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g(\cdot) \in C^\infty(\Gamma), \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad a(x) \geqslant \alpha^2 > 0, \\ \mathcal{U} = \mathcal{U}_1, \quad \mathcal{U}_r := \big\{u(\cdot) \in L_2(\Gamma) \colon |||u||| \leqslant r\big\}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь через $|||\cdot|||$ обозначена норма в пространстве $L_2(\Gamma)$. Скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В пространстве $L_2(\Omega)$ для нормы и скалярного произведения используются обозначения $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ соответственно.

Исследование задач оптимального управления, определяемых уравнениями в частных производных, не теряет своей актуальности (см., например, [4–6] и библиографию в них).

В данной работе рассматривается обобщение задач из работ [7;8] $(\beta = 2)$ и [9] $(\beta = 0)$.

Другие сингулярные задачи оптимального управления решениями эллиптических уравнений рассматривались в [10;11].

Умножив граничное условие в (1.1) на $\varepsilon^{2-\beta}$, получим задачу стандартного вида (см. [1, гл. 2, соотношение (2.41)]) с новыми $\widetilde{g} = \varepsilon^{2-\beta} g$, $\widetilde{u} = \varepsilon^{2-\beta} u$, $\widetilde{\mathcal{U}} = \widetilde{\mathcal{U}}_{\varepsilon^{2-\beta}}$ и $\widetilde{\nu} = \nu \varepsilon^{4-2\beta}$. В силу [1, гл. 2, соотношения (2.41), (2.36), (2.49)] и [7, лемма 1, соотношение (2.5)] найдется $\widetilde{\lambda}_\varepsilon$ такое, что единственное оптимальное управление в получившейся задаче и соответствующее ему $z_\varepsilon(\cdot)$ находятся как единственное решение следующей задачи:

$$\widetilde{u}_\varepsilon(\cdot) = \widetilde{\lambda}_\varepsilon p_\varepsilon \Big|_\Gamma,$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x), & \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d(x), \quad z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ \varepsilon^2 \dfrac{\partial z_\varepsilon}{\partial n} + \widetilde{\lambda}_\varepsilon p_\varepsilon(x) = \widetilde{g}(x), & \varepsilon^2 \dfrac{\partial p_\varepsilon}{\partial n} = 0, \qquad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\widetilde{\lambda}_\varepsilon \in (0; \widetilde{\nu}] \colon \Big(\widetilde{\lambda}_\varepsilon |||p_\varepsilon||| \leqslant \varepsilon^{2-\beta}\Big) \wedge \Big((\widetilde{\nu} - \widetilde{\lambda}_\varepsilon)(\varepsilon^{2-\beta} - \widetilde{\lambda}_\varepsilon |||p_\varepsilon|||) = 0\Big). \tag{1.5}$$

Обозначив $\lambda_\varepsilon := \varepsilon^{\beta-2} \widetilde{\lambda}_\varepsilon$ и вернувшись к исходным переменным, получим (1.4) и (1.5) в виде

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = f(x), & \mathcal{L}_\varepsilon p_\varepsilon - z_\varepsilon = -z_d(x), \quad z_\varepsilon,\, p_\varepsilon \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon,\beta} z_\varepsilon + \lambda_\varepsilon p_\varepsilon(x) = g(x), & l_{\varepsilon,\beta} p_\varepsilon = 0, \qquad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.6}$$

$$u_\varepsilon(\cdot) = \lambda_\varepsilon p_\varepsilon \Big|_\Gamma, \quad \lambda_\varepsilon \in (0; \nu\varepsilon^{2-\beta}] \colon (\lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| \leqslant 1) \wedge \Big((\nu\varepsilon^{2-\beta} - \lambda_\varepsilon)(1 - \lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon|||) = 0\Big). \tag{1.7}$$

Таким образом, оптимальное управление u_ε и состояние z_ε в задаче (1.1), (1.2) определяются из решения задачи (1.6), (1.7).

В [11, теорема 1] показано, что задача вида

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z = f_1(x), & \mathcal{L}_\varepsilon p - z = f_2(x), \quad z,\, p \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon,\beta} z + \lambda p(x) = g_1(x), & l_{\varepsilon,\beta} p = g_2(x), \qquad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{1.8}$$

при выполнении условий (1.3) и

$$f_1(\cdot), f_2(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad g_1(\cdot), g_2(\cdot) \in C^\infty(\Gamma) \tag{1.9}$$

разрешима единственным образом при любом $\varepsilon > 0$ и $\lambda > 0$ и справедливы соотношения $z_\varepsilon, p_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Цель работы — изучить поведение z_ε ,p_ε и λ_ε при $\varepsilon \to 0$ и построить асимптотическое разложение $z_\varepsilon, p_\varepsilon$ и λ_ε при $\varepsilon \to 0$ с точностью до любой степени параметра ε.

2. Априорные оценки и разрешимость краевых задач

Отметим, что решение краевой задачи (1.1) понимается в обобщенном смысле (см., например, [1, гл. 1, § 3, п. 3.4]): для любого $\varphi \in H^1(\Omega)$ справедливо равенство

$$\varepsilon^2(\nabla z_\varepsilon, \nabla\varphi) + (a(\cdot)z_\varepsilon, \varphi) - \varepsilon^{2-\beta}\langle g + u_\varepsilon, \varphi\rangle = (f, \varphi). \tag{2.1}$$

Как и в [7], для получения априорных оценок используются априорные оценки для эллиптических операторов [3, гл. 2, теорема 5.1; 12, гл. III, формула (1.11)] и частный случай неравенства Эрлинга

$$|||u|||^2 \leqslant K\bigl(\delta^{-1}\|u\|^2 + \delta\|\nabla u\|^2\bigr), \quad 0 < \delta \leqslant \delta_0 \tag{2.2}$$

(см., например, [13, гл. XIV, § 3, (3.3); 14, гл. I, § 6, (6.19)]). Отметим, что K в (2.2) зависит от δ_0.

В дальнейшем различные положительные константы, зависящие только от области Ω, коэффициента $a(\cdot)$ и неизменяемых величин (например, δ_0), часто будем обозначать одной и той же буквой — K или C.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (1.3) *и* (1.9), *а* z, p — *решение задачи* (1.8). *Тогда*

$$\|z\|^2 + \lambda\varepsilon^{2-\beta}|||p|||^2 = (f_1, p) - (f_2, z) + \varepsilon^{2-\beta}\langle g_1, p\rangle - \varepsilon^{2-\beta}\langle g_2, z\rangle. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.1) — определения обобщенного решения задачи (1.8) — для $z, p \in H^1(\Omega)$ справедливы равенства

$$\varepsilon^2(\nabla z, \nabla p) + (a(\cdot)z, p) + \varepsilon^{2-\beta}\langle \lambda p - g_1, p\rangle = (f_1, p),$$

$$\varepsilon^2(\nabla p, \nabla z) + (a(\cdot)p, z) - (z, z) - \varepsilon^{2-\beta}\langle g_2, z\rangle = (f_2, z).$$

Вычитая из первого равенства второе, получим (2.3). □

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (1.3), $\overline{f} \in L_2(\Omega)$, $q \in L_2(\Gamma)$ *и* z_ε *есть решение задачи*

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon = \overline{f}(x), \quad x \in \Omega, \quad z_\varepsilon \in H^1(\Omega), \quad l_{\varepsilon,\beta} z_\varepsilon = q(x), \quad x \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Тогда существует $K > 0$ *такое, что*

$$\max\bigl\{\|z_\varepsilon\|, \varepsilon^{1/2}|||z_\varepsilon|||, \varepsilon\|\nabla z_\varepsilon\|\bigr\} \leqslant K(\|\overline{f}\| + \varepsilon^{3/2-\beta}|||q|||) =: K \cdot D(\overline{f}, q; \varepsilon, \beta). \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (2.1) и условий (1.3) для z_ε — решения задачи (2.4) получим

$$\varepsilon^2\|\nabla z_\varepsilon\|^2+\alpha^2\|z_\varepsilon\|^2\leqslant\|z_\varepsilon\|\cdot\|\overline{f}\|+\varepsilon^{2-\beta}|||q|||\cdot|||z_\varepsilon|||$$
$$\overset{(2.2)}{\leqslant}\|z_\varepsilon\|\big(\|\overline{f}\|+K\delta^{-1}\varepsilon^{2-\beta}|||q|||\big)+\|\nabla z_\varepsilon\|K\delta\varepsilon^{2-\beta}|||q|||.$$

Решая данное квадратичное неравенство относительно величин $\|z_\varepsilon\|$ и $\|\nabla z_\varepsilon\|$, имеем

$$\begin{aligned}\|z_\varepsilon\|&\leqslant\frac{\|\overline{f}\|+K\delta^{-1}\varepsilon^{2-\beta}|||q|||}{\alpha^2}+\frac{K\delta\varepsilon^{2-\beta}|||q|||}{2\alpha\varepsilon},\\ \|\nabla z_\varepsilon\|&\leqslant\frac{K\delta\varepsilon^{2-\beta}|||q|||}{\varepsilon^2}+\frac{\|\overline{f}\|+K\delta^{-1}\varepsilon^{2-\beta}|||q|||}{2\alpha\varepsilon}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

При $\delta=\varepsilon^{1/2}$ из (2.6) получим (2.5). □

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (1.3) *и* (1.9). *Если z, p — решения задачи* (1.8), *то существует $K>0$ такое, что справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\max\{\|z\|,\varepsilon^{1/2}|||z|||,\varepsilon\|\nabla z\|\}&\leqslant K(1+\lambda\varepsilon^{1-\beta})\widetilde{D}(f_1,f_2,g_1,g_2;\varepsilon,\beta),\\ \max\{\|p\|,\varepsilon^{1/2}|||p|||,\varepsilon\|\nabla p\|\}&\leqslant K(1+\lambda\varepsilon^{1-\beta})\widetilde{D}(f_1,f_2,g_1,g_2;\varepsilon,\beta),\end{aligned}\tag{2.7}$$

где $\widetilde{D}(f_1,f_2,g_1,g_2;\varepsilon,\beta):=\|f_1\|+\|f_2\|+\varepsilon^{3/2-\beta}\big(|||g_1|||+|||g_2|||\big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим z и p в виде $z=z_1+z_2$ и $p=p_1+p_2$, где

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_1=f_1,\quad \mathcal{L}_\varepsilon p_1=z_1+f_2,\quad l_{\varepsilon,\beta}z_1=g_1,\quad l_{\varepsilon,\beta}p_1=g_2,$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_2=0,\quad \mathcal{L}_\varepsilon p_2-z_2=0,\quad l_{\varepsilon,\beta}z_2+\lambda p_2=-\lambda p_1,\quad l_{\varepsilon,\beta}p_2=0.$$

Для z_1 и p_1 согласно (2.5) справедливы неравенства

$$D(f_1,g_1;\varepsilon,\beta)\leqslant\widetilde{D}(f_1,f_2,g_1,g_2;\varepsilon,\beta)$$

и

$$D(f_2+z_1,g_2;\varepsilon,\beta)\leqslant\widetilde{D}(f_1,f_2,g_1,g_2;\varepsilon,\beta).$$

В силу (2.3) для z_2 и p_2 имеем

$$\|z_2\|^2+\lambda\varepsilon^{2-\beta}|||p_2|||^2=\varepsilon^{2-\beta}\langle-\lambda p_1,p_2\rangle.$$

Отсюда $\lambda\varepsilon^{2-\beta}|||p_2|||^2\leqslant\lambda\varepsilon^{2-\beta}|||p_1|||\cdot|||p_2|||$, т.е. $|||p_2|||\leqslant|||p_1|||$.

Поэтому

$$D(0,\lambda(p_1+p_2);\varepsilon,\beta)\leqslant2\lambda\varepsilon^{3/2-\beta}|||p_1|||\leqslant2\lambda\varepsilon^{3/2-\beta}\varepsilon^{-1/2}\widetilde{D}(f_1,f_2,g_1,g_2;\varepsilon,\beta),$$

а $D(z_2,0;\varepsilon,\beta)\leqslant\|z_2\|$. Наконец, вследствие неравенства треугольника выводим оценки (2.7). □

Утверждение 1. *Пусть $a(\cdot)$, $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ удовлетворяют условиям* (1.3).

Если $z_\varepsilon(\cdot),p_\varepsilon(\cdot)\in C^\infty(\overline{\Omega})$ есть решение задачи (1.6), (1.7), *то при $\varepsilon\to0$ справедливы следующие асимптотические представления*:

$$\begin{aligned}&\|z_\varepsilon\|=O(1)+O\big(\varepsilon^{3/2-\beta}\big),\quad |||z_\varepsilon|||=O(\varepsilon^{-1/2})+O\big(\varepsilon^{1-\beta}\big),\\ &\|\nabla z_\varepsilon\|=O(\varepsilon^{-1})+O\big(\varepsilon^{1/2-\beta}\big),\quad \|p_\varepsilon\|=O(1)+O\big(\varepsilon^{3/2-\beta}\big),\\ &|||p_\varepsilon|||=O(\varepsilon^{-1/2})+O\big(\varepsilon^{1-\beta}\big),\quad \|\nabla p_\varepsilon\|=O(\varepsilon^{-1})+O\big(\varepsilon^{1/2-\beta}\big).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу того что $\lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| \leqslant 1$ для z_ε, имеем

$$D(f, -\lambda p_\varepsilon + g; \varepsilon, \beta) \leqslant \|f\| + \varepsilon^{3/2-\beta}(|||p_\varepsilon||| + 1) = O(1) + O\big(\varepsilon^{3/2-\beta}\big);$$

это согласно (2.5) доказывает асимптотические оценки для z_ε. Теперь для p_ε получим

$$D(z_\varepsilon - z_d, 0; \varepsilon, \beta) \leqslant \|z_d\| + \|z_\varepsilon\| = O(1) + O\big(\varepsilon^{3/2-\beta}\big);$$

это согласно (2.5) доказывает асимптотические оценки для p_ε. □

В силу (2.8) и того, что $\lambda_\varepsilon = O\big(\varepsilon^{2-\beta}\big)$ (см. (1.7)), выводим $\lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| = O\big(\varepsilon^{3/2-\beta}\big) + O\big(\varepsilon^{3-2\beta}\big)$. Тем самым если $3 > 2\beta$, то $\lambda_\varepsilon |||p_\varepsilon||| = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно, в силу (1.7) $\lambda_\varepsilon = \nu\varepsilon^{2-\beta}$.

В дальнейшем будем считать, что

$$\frac{3}{2} > \beta, \quad \lambda_\varepsilon = \nu\varepsilon^{2-\beta}. \tag{2.9}$$

В этом случае справедлива следующая теорема аппроксимации для z_ε и p_ε.

Теорема 2. *Пусть функции* $f_{1,\varepsilon,m}(\cdot), f_{2,\varepsilon,m}(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Omega}), g_{1,\varepsilon,m}(\cdot), g_{2,\varepsilon,m}(\cdot) \in C^\infty(\overline{\Gamma})$ *и выполнены условия* (1.3) *и* (2.9). *Если*

$$\max\big\{\|f_{i,\varepsilon,m}\|, |||g_{i,\varepsilon,m}|||\colon i = 1,2\big\} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \to 0,$$

а z_m, p_m *— решение задачи*

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\varepsilon z_m = f(x) + f_{1,\varepsilon,m}(x), \quad \mathcal{L}_\varepsilon p_m + z_m = -z_d(x) + f_{2,\varepsilon,m}(x), \quad z_m, p_m \in H^1(\Omega), \\ l_{\varepsilon,\beta} z_m + \nu\varepsilon^{2-\beta} p_m(x) = g(x) + g_{1,\varepsilon,m}(x), \quad l_{\varepsilon,\beta} p_m = g_{2,\varepsilon,m}(x), \quad x \in \Gamma, \end{cases} \tag{2.10}$$

то для $z_{\varepsilon,m} := z_\varepsilon - z_m$ *и* $p_{\varepsilon,m} := p_\varepsilon - p_m$, *где* z_ε, p_ε, *— решение задачи* (1.6), (2.9), *справедливы следующие асимптотические оценки*:

$$\max\Big\{\|z_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{1/2}|||z_{\varepsilon,m}|||, \varepsilon\|\nabla z_{\varepsilon,m}\|, \|p_{\varepsilon,m}\|, \varepsilon^{1/2}|||p_{\varepsilon,m}|||, \varepsilon\|\nabla p_{\varepsilon,m}\|\Big\} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функции $z_{\varepsilon,m}$ и $p_{\varepsilon,m}$ удовлетворяют системе вида (2.10) с правыми частями порядка $O(\varepsilon^m)$. В силу теоремы 1 с учетом соотношения (2.9) получим

$$\widetilde{D}(f_{1,\varepsilon,m}, f_{2,\varepsilon,m}, g_{1,\varepsilon,m}, g_{2,\varepsilon,m}; \varepsilon, \beta) = O(\varepsilon^m) + O(\varepsilon^m) + \varepsilon^{3/2-\beta}\big(O(\varepsilon^m) + O(\varepsilon^m)\big) = O(\varepsilon^m). \quad \square$$

Отметим, что вследствие гладкости коэффициентов всех разложений из априорных оценок Шаудера (см., напрмер, [3, гл. 2, теорема 5.1]) и теормы вложения Соболева [2, гл. I, п. 8, теорема 1] следует, что соотношения (2.11) справедливы и в равномерной норме.

3. Построение асимптотики

В силу теоремы 2 для построения асимптотического разложения решения рассматриваемой задачи нужно построить его *формальное асимптотическое решение* (ф. а. р.) (см., например, [15, с. 10]), которое осуществляется аналогично тому, как это делается в случае одного уравнения [16; 17].

Внешнее разложение решения ищем в виде рядов

$$z_{out}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x), \quad p_{out}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x), \varepsilon \to 0. \tag{3.1}$$

Коэффициенты $z_k(x), p_k(x)$ находятся из соответствующей рекуррентной системы

$$\begin{cases} z_0(x) = -\dfrac{f(x)}{a(x)}, \qquad p_0(x) = \dfrac{z_0(x) - z_d(x)}{a(x)}, \\ z_{2k}(x) = \dfrac{\Delta z_{2k-2}}{a(x)}, \quad p_{2k} = \dfrac{\Delta p_{2k-2} + z_{2k}}{a(x)}, \quad k \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Все $z_{2k}(x), p_{2k}(x) \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, но не удовлетворяют граничным условиям.

Для того чтобы устранить невязку в граничных условиях, построим экспоненциально убывающие функции в окрестности всей границы Γ, удовлетворяющие соответствующей однородной системе.

С учетом гладкости Γ в ее малой окрестности можно ввести систему координат $(s;\tau)$, где s — это координаты на Γ, а τ — расстояние от текущей точки $x \in \Omega$ до Γ.

Пограничный слой имеет ширину порядка ε, а поправочные функции (внутреннее разложение) нужны не во всей области Ω, а лишь в ее малой окрестности. Поэтому после построения поправочные функции необходимо умножить на срезающую функцию η, т.е. функцию с носителем в малой окрестности границы и равной тождественно 1 в некоторой меньшей окрестности границы.

В пограничном слое перейдем к новым, *растянутым*, координатам (см., например, [15, с. 31–34]) $\xi = \tau\varepsilon^{-1}$.

При этом оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ перейдет в оператор

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon Z = -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}Z - \varepsilon L_1 \frac{\partial}{\partial\xi}Z - \varepsilon^2 L_2 Z + \widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)Z =: -\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}Z + \widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)Z + \varepsilon\mathcal{M}_\varepsilon Z. \tag{3.3}$$

Здесь L_1 и L_2 — дифференциальные операторы 1-го и 2-го порядка, содержащие лишь дифференцирование по переменной s, с гладкими коэффициентами от s и $\tau = \varepsilon\xi$, а $\widetilde{a}(s,\tau)$ — это функция $a(x)$ в переменных s, τ.

Таким образом, однородная система для функций пограничного слоя в переменных s и ξ, соответствующая системе из (1.4), имеет вид

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_{0,\varepsilon} Z := -\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}Z + \widetilde{a}(s,\varepsilon\xi)Z = -\varepsilon\mathcal{M}_\varepsilon Z, \quad \widetilde{\mathcal{L}}_{0,\varepsilon}P - Z = -\varepsilon\mathcal{M}_\varepsilon P. \end{cases} \tag{3.4}$$

Для граничных условий, с учетом того что

$$\frac{\partial}{\partial n}Z(s,\tau/\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial\tau}Z(s,\tau/\varepsilon) = -\varepsilon^{-1}\frac{\partial}{\partial\xi}Z(s,\xi),$$

выводим следующие соотношения:

$$\begin{cases} -\varepsilon^{\beta-1}\dfrac{\partial}{\partial\xi}Z(s,0) + \varepsilon^{\beta}\widetilde{\dfrac{\partial}{\partial n}z_{out}}(s,0) + \nu\varepsilon^{2-\beta}\Big(P(s,0) + \widetilde{p_{out}}(s,0)\Big) \overset{as}{=} \widetilde{g}(s), \\ -\varepsilon^{\beta-1}\dfrac{\partial}{\partial\xi}P(s,0) + \varepsilon^{\beta}\widetilde{\dfrac{\partial}{\partial n}p_{out}}(s,0) \overset{as}{=} 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Здесь волна над функцией, определенной в переменных x, означает выражение этой функции в переменных s и τ.

Система (3.4) показывает, что если Z имеет порядок γ (т.е. $Z = O(\varepsilon^\gamma)$), то и P имеет тот же порядок. В этом случае порядки слагаемых в (3.5) таковы: $\beta - 1 + \gamma$, β, $2 - \beta + \gamma$ и $2 - \beta$. Главное слагаемое должно иметь порядок 0. В силу условий (2.9) это $\beta - 1 + \gamma$. Тем самым $\gamma = 1 - \beta$. Последнее соотношение определяет вид разложения в пограничном слое.

Пусть $\beta = \widetilde{n}/\widetilde{m}$ — несократимая дробь. Тогда

$$Z_{in}(s,\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m/\widetilde{m}}Z_m(s,\xi), \quad P_{in}(s,\xi,\varepsilon) = \varepsilon^{1-\beta}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon^{m/\widetilde{m}}P_m(s,\xi). \tag{3.6}$$

Подставляя ряды (3.6) в систему (3.4) и разлагая коэффициенты в уравнениях системы и операторов $\widetilde{\mathcal{L}}_{0,\varepsilon}$ и $\mathcal{M}_\varepsilon$, определенных в (3.3), в ряды Тейлора по переменной $\tau = \varepsilon\xi$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z_0 := -\dfrac{\partial^2}{\partial\xi^2}Z_0 + \widetilde{a}_0(s)Z_0 = 0, & \widetilde{\mathcal{L}}_0 P_0 + Z_0 = 0, \\ \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z_m = F_m(s,\xi), & \widetilde{\mathcal{L}}_0 P_m + Z_m = G_m(s,\xi), \quad m > 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $F_m(s,\xi)$ и $G_m(s,\xi)$ линейно выражаются через предыдущие функции Z_k, P_k и их производные и полиномиально зависят от ξ и гладко от s, а функция

$$a(x) = \widetilde{a}(s,\varepsilon\xi) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\xi^i\widetilde{a}_i(s)$$

разложена в ряд по степеням малого параметра.

Подстановка соответствующих рядов в граничные условия приведет к следующим системам:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial\xi}Z_0(s,0) = \widetilde{g}(s), & -\dfrac{\partial}{\partial\xi}P_0(s,0) = 0, \\ -\dfrac{\partial}{\partial\xi}Z_m(s,0) = \widetilde{g}_{1,m}(s), & -\dfrac{\partial}{\partial\xi}P_m(s,0) = \widetilde{g}_{2,m}(s), \quad m > 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

где функции $g_m(\cdot)$, $q_m(\cdot)$ определяются внешним разложением, функциями Z_k, P_k при $k < m$, при этом Z_m и P_m должны экспоненциально убывать при $\xi \to +\infty$.

Таким образом, задачи для нахождения Z_m и P_m имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_0 Z = F, & \widetilde{\mathcal{L}}_0 P + Z = G, \\ -\dfrac{\partial}{\partial\xi}Z(s,0) = \widetilde{g}_1(s), & -\dfrac{\partial}{\partial\xi}P(s,0) = \widetilde{g}_2(s). \end{cases} \tag{3.9}$$

Как хорошо известно, первое уравнение из (3.9) имеет нужное нам решение вида

$$Z(s,\xi) = C_1(s)e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi} + \widehat{Z}(s,\xi), \tag{3.10}$$

где $C_1(s)$ — функция, подлежащая определению, а $\widehat{Z}(s,\xi)$ — какое-нибудь частное решение уравнения $\widetilde{\mathcal{L}}_0 Z = F$. При этом если

$$F(s,\xi) = e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}Q_l(s,\xi),$$

где $Q_l(s,\xi)$ — полином степени l по ξ с коэффициентами, зависящими от s, то

$$\widehat{Z}(s,\xi) = e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi}\xi Q_{l,1}(s,\xi).$$

Здесь $Q_{l,1}(s,\xi)$ — тоже полином степени l по ξ с коэффициентами, зависящими от s, однозначно определяемый по $Q_l(s,\xi)$.

Теперь второе уравнение из (3.9) в силу (3.10) можем записать как

$$\widetilde{\mathcal{L}}_0 P = C_1(s)e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi} + \widehat{Z}(s,\xi) + G(s,\xi),$$

а любое, экспоненциально убывающее при $\xi \to +\infty$ решение этого уравнения определяется формулой

$$P(s,\xi) = C_2(s)e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi} + C_1(s)\,\frac{\xi}{2\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}\,e^{-\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}\xi} + \widehat{P}(s,\xi), \tag{3.11}$$

где $\widehat{P}(s,\xi)$ — какое-нибудь частное решение уравнения $\widetilde{\mathcal{L}}_0 P = \widehat{Z}(s,\xi) + G(s,\xi)$.

Неизвестные функции $C_1(s)$ и $C_2(s)$ определятся из граничных условий задачи (3.9) — они (в силу (3.10) и (3.11)) являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial\xi} Z(s,0) = \sqrt{\widetilde{a}_0(s)}C_1(s) - \dfrac{\partial}{\partial\xi}\widehat{Z}(s,0) = \widetilde{g}_1(s), \\ -\dfrac{\partial}{\partial\xi} P(s,0) = \sqrt{\widetilde{a}_0(s)}C_2(s) - C_1(s)\dfrac{1}{2\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}} - \dfrac{\partial}{\partial\xi}\widehat{P}(s,0) = \widetilde{g}_2(s), \end{cases}$$

из которой получим

$$C_1(s) = \frac{\widetilde{g}_1(s) + \dfrac{\partial}{\partial\xi}\widehat{Z}(s,0)}{\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}, \quad C_2(s) = \frac{\widetilde{g}_2(s) + \dfrac{\partial}{\partial\xi}\widehat{P}(s,0) + \dfrac{C_1(s)}{2\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}}{\sqrt{\widetilde{a}_0(s)}}.$$

Таким образом, задача (3.7), (3.8) при каждом $m \geqslant 0$ имеет единственное экспоненциально убывающее решение решение $\{Z_m, P_m\}$.

Теперь ряды

$$\begin{aligned} z_{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} z_k(x) + \eta(s,\tau)\varepsilon^{1-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/\widetilde{m}} Z_m(s,\xi) \\ p_{it} &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{2k} p_k(x) + \eta(s,\tau)\varepsilon^{1-\beta} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{m/\widetilde{m}} P_m(s,\xi), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где x и τ, s связаны введенной системой координат, хорошо аппроксимируют всю задачу (1.6), (2.9). Поэтому справедлива следующая основная теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (1.3) *и* (2.9)*. Тогда ряды* (3.12)*, коэффициенты которых для рядов* (3.1) *определяются по формулам* (3.2)*, а для рядов* (3.6) *— как решения задач* (3.7), (3.8)*, суть равномерные* (*как в смысле пространства* $H^1(\Omega)$*, так и в смысле пространства* $C(\overline{\Omega})$) *асимптотические разложения при* $\varepsilon \to 0$ *функций* $z_\varepsilon(x)$ *и* $p_\varepsilon(x)$ *— решения задачи* (1.6)*,* (2.9)*.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лионс Ж.-Л.** Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. **Соболев С.Л.** Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950. 255 с.
3. **Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
4. **Casas E.** A review on sparse solutions in optimal control of partial differential equations // SeMA J. 2017. Vol. 74. P. 319–344. doi: 10.1007/s40324-017-0121-5 .
5. **Lou H., Yong J.** Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls // Math. Control Relat. Fields. 2018. Vol. 8, no. 1. P. 57–88. doi: 10.3934/mcrf.2018003 .
6. **Betz Livia M.** Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations // SIAM J. Control Optim. 2019. Vol. 57, no. 6. P. 4033–4062. doi: 10.1137/19M1239106 .

7. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотика решения задачи оптимального граничного управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15, № 4. С. 95–107.
8. **Данилин А.Р., Зорин А.П.** Асимптотическое разложение решения задачи оптимального граничного управления // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 4. С. 1—4.
9. **Зорин А.П.** Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления ограниченным потоком на границе // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19, № 1. С. 115–121.
10. **Капустян В.Е.** Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. Сер. Математика, естествознание, технические науки. 1992. № 2. С. 70–74.
11. **Данилин А.Р.** Оптимальное граничное управление в области с малой полостью // Уфим. мат. журн. 2012. Т. 4, № 2. С. 87–100.
12. **Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964. 540 с.
13. **Морен К.** Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570 с.
14. **Ладыженская О.А.** Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.
15. **Ильин А.М.** Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.
16. **Вишик М.И., Люстерник Л.А.** Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т.12, вып. 5. С.3–122.
17. **Ильин А.М.** Пограничный слой // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 34. М.: ВНИТИ, 1988. С. 175–214. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР.)

Поступила 4.11.2019
После доработки 10.01.2020
Принята к публикации 14.01.2020

Данилин Алексей Руфимович
д-р физ.-мат. наук, профессор,
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: dar@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lions J.-L. *Optimal control of systems governed by partial differential equations.* Berlin; New York: Springer-Verlag, 1971, 396 p. ISBN: 9783540051152 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi.* Moscow: Mir Publ., 1972, 414 p.
2. Sobolev S.L. *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics.* Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991, 286 p. ISBN: 0-8218-4549-7 . Original Russian text (1st ed.) published in Sobolev S.L. *Nekotorye primeneniya funktsional'nogo analiza v matematicheskoi fizike.* Leningrad: Leningr. Gos. Univ. Publ., 1950, 255 p.
3. Lions J.-L., Magenes E. *Non-homogeneous boundary value problems and their applications.* Berlin: Springer-Verlag, 1972, 357 p. ISBN: 3540053638 . Translated to Russian under the title *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya.* Moscow: Mir Publ., 1971, 371 p.
4. Casas Eduardo. A review on sparse solutions in optimal control of partial differential equations. *SeMA J.*, 2017, vol. 74, pp. 319–344. doi: 10.1007/s40324-017-0121-5 .
5. Lou H., Yong J. Second-order necessary conditions for optimal control of semilinear elliptic equations with leading term containing controls. *Math. Control Relat. Fields*, 2018, vol. 8, no. 1, pp. 57–88. doi: 10.3934/mcrf.2018003 .
6. Betz Livia M. Second-order sufficient optimality conditions for optimal control of nonsmooth, semilinear parabolic equations. *SIAM J. Control Optim.*, 2019, vol. 57, no. 6, pp. 4033–4062. doi: 10.1137/19M1239106 .

7. Danilin A.R., Zorin A.P. Asymptotics of a solution to an optimal boundary control problem. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. S81–S94. doi: 10.1134/S0081543810060088 .
8. Danilin A.R., Zorin A.P. Asymptotic expansion of solutions to optimal boundary control problems. *Dokl. Math.*., 2011, vol. 84, no. 2, pp. 665–668. doi: 10.1134/S106456241106024X .
9. Zorin A.P. Asymptotic expansion of a solution to the problem of optimal control of a bounded flow at a boundary. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 115–120 (in Russian).
10. Kapustyan V.E. Asymptotics of bounded controls in optimal elliptic problems. *Dokl. Akad. Nauk Ukrainy*, 1992, no. 2, pp. 70–74 (in Russian).
11. Danilin A.R. Optimal boundary control in a small concave domain. *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 2, pp. 87–100 (in Russian).
12. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Linear and quasilinear elliptic equations.* N Y; London: Acad. Press, 1968, 495 p. ISBN: 9780080955544 . Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya ellipticheskogo tipa.* Moscow: Nauka Publ., 1964, 540 p.
13. Maurin K. *Methods of Hilbert spaces.* Warsaw: PWN, 1967, 553 p. ISBN: 9780900318061 . Translated to Russian under the title *Metody gil'bertova prostranstva.* Moscow: Mir Publ., 1965, 570 p.
14. Ladyzhenskaya O.A. *The boundary value problems of mathematical physics.* N Y: Springer-Verlag, 1985, 332 p. ISBN: 978-1-4757-4317-3 . Original Russian text published in Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoi fiziki.* Moscow: Nauka Publ., 173. 407 p.
15. Il'in A.M. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems.* Providence: American Mathematical Society, 1992, 281 p. ISBN: 978-0-8218-4561-5 . Original Russian text published in Il'in A.M. *Soglasovanie asimtoticheskikh razlozhenii reshenii kraevykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1989, 336 p.
16. Vishik M.I., Lyusternik L.A. A regular degeneration and boundary layer for linear differential equations with a small parameter. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122 (in Russian).
17. Il'in A.M. A boundary layer. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, 1988, vol. 34, pp. 175–213 (in Russian).

Received December 14, 2019
Revised January 10, 2020
Accepted January 14, 2020

Aleksei Rufimovich Danilin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: dar@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. R. Danilin. Asymptotics of a solution to a problem of optimal boundary control with two small cosubordinate parameters, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 102–111 .