ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54

О НЕКОТОРЫХ ГРУППАХ 2-РАНГА ОДИН[1]

Б. Е. Дураков

Строение конечных групп 2-ранга 1 во многом определяется классическими теоремами Бернсайда и Брауэра–Судзуки. Бернсайд доказал, что в каждой конечной группе с циклической силовской 2-подгруппой все элементы нечетного порядка составляют нормальную подгруппу. С. И. Адян показал, что в классе периодических групп аналогичное утверждение неверно даже в случае, когда силовская 2-подгруппа имеет порядок 2 и совпадает с центром группы. Результаты Бернсайда, Брауэра и Судзуки можно сформулировать в виде одной теоремы: в конечной группе G 2-ранга 1 образ любой инволюции в фактор-группе $G/O(G)$ лежит в центре этой фактор-группы. Неизвестно, справедливо ли аналогичное утверждение, если G — периодическая группа (вопрос 4.75 В. П. Шункова из "Коуровской тетради"). Ответ неизвестен даже в случае, когда централизатор инволюции i — локально циклическая группа (вопрос 15.54 В. Д. Мазурова из "Коуровской тетради"). В теореме 1 статьи приводится частичный положительный ответ на вопрос 4.75 при дополнительном условии: в группе G инволюция i порождает с каждым элементов порядка, не делящегося на 4, конечную подгруппу. В частности, вопрос 4.75 решается положительно в классе бинарно конечных и сопряженно бинарно конечных групп. В теореме 2 статьи исследуется строение не локально конечной группы G с конечной инволюцией и инволюцией i, централизатор которой — локально циклическая 2-группа. Инволюция i группы G называется *конечной*, если для каждого $g \in G$ подгруппа $\langle i, i^g \rangle$ конечна. В частности, теорема 2 определяет структуру контрпримера (в предположении его существования) к вопросу 15.54.

Ключевые слова: группа 2-ранга 1, периодическая группа, локально конечная группа, конечная инволюция.

B. E. Durakov. On some groups of 2-rank 1.

The structure of finite groups of 2-rank 1 is largely defined by the classical Burnside and Brauer–Suzuki theorems. Burnside proved that all elements of odd order of a finite group with a cyclic 2-Sylow subgroup form a normal subgroup. S.I. Adyan showed that this statement does not hold in the class of periodic groups even in the case when a Sylow 2-subgroup has order 2 and coincides with the center of the group. The results of Burnside, Brauer, and Suzuki can be formulated as one theorem: in a finite group G of 2-rank 1, the image of any involution in the quotient group $G/O(G)$ lies in the center of this quotient group. It is unknown whether the same statement holds for a periodic group G (V.P. Shunkov's Question 4.75 from the "Kourovka Notebook"). There is no answer even when the centralizer of the involution i is a locally cyclic group (V.D. Mazurov's Question 15.54 from the "Kourovka Notebook"). In Theorem 1, we give a partial affirmative answer to Question 4.75 under an additional condition: in the group G an involution i generates a finite subgroup with any element of order not divisible by 4. In particular, Question 4.75 is solved positively in the classes of binary finite and conjugate binary finite groups. In Theorem 2, we study the structure of a nonlocally finite group G with a finite involution and an involution i whose centralizer is a locally cyclic 2-group. An involution i of a group G is called *finite* if the subgroup $\langle i, i^g \rangle$ is finite for every $g \in G$. In particular, Theorem 2 defines the structure of a counterexample (under the assumption of its existence) to Question 15.54.

Keywords: group of 2-rank 1, periodic group, locally finite group, finite involution.

MSC: 20F50, 20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-64-68

Введение

2-рангом группы G (конечной или бесконечной) называют максимум рангов ее элементарных абелевых 2-подгрупп [1, § 1.2]. К числу фундаментальных результатов о конечных группах 2-ранга 1 можно отнести теоремы Бернсайда [2, теорема 1.20(ii)] и Брауэра — Судзуки [3, Theorem 2]. Следуя Горенстейну [2, теорема 4.88], мы сформулируем их в виде следующей

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

теоремы Бернсайда — Брауэра — Судзуки. В ее формулировке и всюду далее $O(G)$ — максимальная нормальная в G периодическая подгруппа без инволюций.

Предложение 1 (теорема Бернсайда — Брауэра — Судзуки). *Пусть G — конечная группа, содержащая инволюцию i, и силовские 2-подгруппы группы G являются либо циклическими группами, либо (обобщенными) группами кватернионов. Тогда инволюция $iO(G)$ лежит в центре фактор-группы $G/O(G)$.*

В. П. Шунков доказал [1, теорема 2.15], что 2-группа с единственной инволюцией либо локально циклическая 2-группа, либо конечная или бесконечная (обобщенная) группа кватернионов. До сих пор не решен вопрос 4.75, поставленный В. П. Шунковым в 1973 г. в “Коуровской тетради” [4] о том, справедливо ли обобщение теоремы Бернсайда — Брауэра — Судзуки в классе периодических групп.

Вопрос 1 (В. П. Шунков [4, вопрос 4.75]). *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию i, и силовские 2-подгруппы группы G являются либо локально циклическими группами, либо (обобщенными) группами кватернионов. Будет ли инволюция $iO(G)$ центральным элементом в $G/O(G)$?*

Ответ на этот вопрос неизвестен, даже если централизатор инволюции i — квазициклическая 2-группа (вопрос 15.54 В. Д. Мазурова из “Коуровской тетради” [4], поставленный в 2002 г.).

Вопрос 2 (В. Д. Мазуров [4, вопрос 15.54]). *Предположим, что периодическая группа G содержит инволюцию i, централизатор которой — локально циклическая 2-группа. Верно ли, что множество всех элементов нечетного порядка из G, инвертируемых инволюцией i, составляет подгруппу?*

Ответ на вопрос 2 положителен в случаях, когда G действует точно дважды транзитивно на множестве $G/C_G(i)$ смежных классов группы G по $C_G(i)$ [5] и когда подгруппа $C_G(i)$ не максимальна в G [6].

В статье приведены частичные решения вопросов 1 и 2 при дополнительных ограничениях на группу G. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — периодическая группа 2-ранга 1 и ее инволюция i порождает с каждым элементом, порядок которого не делится на 4, конечную подгруппу. Тогда $iO(G) \in Z(G/O(G))$.*

В частности, из теоремы 1 следует положительное решение вопроса 1 в классах бинарно конечных и сопряженно бинарно конечных групп (определения см. в [1]).

Инволюция i группы G называется *конечной*, если все подгруппы $\langle i, i^g \rangle$, где $g \in G$, конечны [7]. В периодической группе каждая инволюция конечна.

Теорема 2. *Пусть G — не локально конечная группа с конечной инволюцией и централизатор T некоторой ее инволюции i — локально циклическая 2-группа. Тогда T максимальна в G, группа G проста и изоморфна фактор-группе свободного произведения $X = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_n$ циклических групп порядка 2 и n для любого $n > 2$ из ее спектра.*

1. Доказательство теоремы 1

Будем обозначать через $J(G)$ множество инволюций группы G. Нам понадобятся следующие хорошо известные свойства групп диэдра (см., например, [8, лемма 2.8]). Пусть $D = \langle i, j \rangle$, где i и j — инволюции, $i \neq j$. Тогда i и j инвертируют элемент ij, $D = \langle ij \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle$, в случае четности числа $|ij|$ в D есть центральная инволюция $z \in \langle ij \rangle$, в случае нечетности числа $|ij|$

инволюции i и j сопряжены при помощи инволюции $k \in D$. D конечна тогда и только тогда, когда порядок $|ij|$ конечен; если в D есть конечная подгруппа диэдра, то D сама конечна.

Пусть группа G и ее инволюция i удовлетворяют условиям теоремы 1. Если j, k — инволюции из G, то подгруппа $\langle j, k\rangle$ по условию конечна. Порядок элемента jk нечетен, поскольку иначе по свойствам групп диэдра в $\langle j, k\rangle$ содержалась бы четверная подгруппа Клейна 2-ранга 2. Поэтому по свойствам групп диэдра инволюции j и k сопряжены, а в силу произвольности выбора j и k все инволюции в G сопряжены и $J(G) = i^G$.

Пусть X — множество всех элементов из G, имеющих нечетный порядок, а Y — множество всех элементов из G, имеющих порядок вида $2(2n-1)$, $n \in \mathbb{N}$. Ввиду условий теоремы для любого $x \in X$ подгруппа $H_x = \langle x, i\rangle$ конечна. Поскольку образы $\overline{i}$ и $\overline{x}$ элементов i и x в фактор-группе $\overline{H_x} = H_x/O(H_x)$ в силу предложения 1 перестановочны, а порядки их взаимно просты, то $|\overline{i}\overline{x}| = 2|\overline{x}|$. Так как порядок $O(H_x)$ нечетен, то прообраз $ix \in G$ элемента $\overline{i}\overline{x}$ лежит в Y.

Аналогично, для любого $y \in Y$ подгруппа $H_y = \langle y, i\rangle$ по условию теоремы конечна. Обозначим теперь через $\overline{i}$ и $\overline{y}$ образы элементов i и y в фактор-группе $\overline{H_y} = H_y/O(H_y)$ соответственно. По второй теореме Силова [9, теорема 4.2.2] из сопряженности всех силовских 2-подгрупп в H_y и единственности инволюций в них следует сопряженность инволюций в H_y. Поэтому все инволюции в $\overline{H_y}$ сопряжены, а поскольку $\overline{i} \in Z(\overline{H_y})$ по предложению 1, то $J(\overline{H_y}) = \{\overline{i}\}$. Так как $y \in Y$, то $|\overline{y}| = 2(2k-1)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\overline{y}^{2k-1}$ — инволюция и по доказанному она равна $\overline{i}$. Поэтому $|\overline{i}\overline{y}| = 2k-1$. Отсюда из нечетности числа $|O(H_y)|$ следует, что $iy \in X$.

Таким образом, $iX \subseteq Y$ и $iY \subseteq X$, откуда следуют равенства $iX = Y$ и $iY = X$. Поэтому для каждого $g \in G$ верны равенства $(iX)^g = Y^g$ и $(iY)^g = X^g$, откуда в силу инвариантности множеств X и Y получаем $i^gX = Y$ и $i^gY = X$. Поскольку элемент g был выбран произвольно, то $jX = Y$ и $jY = X$ для любой инволюции $j \in i^G$.

Из вышеизложенного следует, что подгруппа $B = \langle i^G\rangle$ умножениями слева транзитивно действует на множестве $\{X, Y\}$. А именно, те элементы из B, которые представляются произведением четного числа инволюций, оставляют множества X и Y на месте умножениями слева и, следовательно, составляют подгруппу H — стабилизатор точек X и Y [9, теорема 5.2.1], где

$$H = \langle jk \mid j, k \in i^G\rangle = \{h \in B \mid hX = X,\ hY = Y\}.$$

Все оставшиеся элементы из B, являющиеся произведениями нечетного числа инволюций, умножением слева переставляют множества X и Y и составляют смежный класс Hi [9, теорема 5.3.1].

Таким образом, $B = H \leftthreetimes \langle i\rangle$. Подгруппы H и B порождаются инвариантными множествами и, следовательно, нормальны в G. Поэтому в фактор-группе $\overline{G} = G/H$ образ подгруппы B — нормальная подгруппа $\overline{B}$, изоморфная по свойствам полупрямого произведения [10, гл. 10, § 1] подгруппе $\langle i\rangle$. Следовательно, $\overline{B}$ порождается образом $\overline{i}$ инволюции i, и $\overline{i} \in Z(\overline{G})$. Если $O(G) = H$, то теорема доказана; если же $O(G) > H$, то $G/O(G) \simeq (G/H)/(O(G)/H)$ [11, гл. 2, §10], а поскольку группа $\overline{O(G)} = O(G)/H$ нечетного порядка, то образ инволюции $\overline{i}$ в фактор-группе $\overline{G}/\overline{O(G)}$ является инволюцией $iO(G)$. Подгруппа $\langle iO(G)\rangle$ нормальна в $\overline{G}/\overline{O(G)}$ как образ нормальной подгруппы $\overline{B}$ [11, гл. 2, § 10]. Следовательно, инволюция $iO(G)$ лежит в центре фактор-группы $\overline{G}/\overline{O(G)} \simeq G/O(G)$, и теорема доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Пусть группа G, ее инволюция i и подгруппа $T = C_G(i)$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Если T не максимальна в G, то по теореме А. И. Созутова [6] G локально конечна, что противоречит условию теоремы. Следовательно, T максимальна в G. Если для некоторого неединичного элемента $x \notin i^G$ подгруппы $\langle i, x^g\rangle$ для каждого $g \in G$ конечны, то G локально конечна [8, теорема 2.12] вопреки условиям. Следовательно, в каждом неединичном классе x^G, отличном от i^G, найдется элемент a такой, что подгруппа $K = \langle i, a\rangle$ бесконечна. Тогда очевидно, что $a \notin T$ и $K \neq T$.

Если $K > T$, то в силу максимальности T имеем $K = G$. Пусть теперь $K \not> T$. Поскольку $i \in K$, то $H = K \cap T > 1$, и в силу строения локально циклической 2-группы T подгруппа H конечна. Инволюция i конечна в K, поскольку она конечна в G, и по теореме В. В. Беляева [12] группа K локально конечна и в силу своей двупорожденности конечна. Получившееся противоречие доказывает, что $G = \langle i, a\rangle$. В силу того, что элемент x мы можем взять любого порядка $n > 2$ из спектра группы, этим доказано третье утверждение теоремы.

Докажем теперь от противного, что группа G проста. Пусть $H \lhd G$. Если $i \in H$, то поскольку в централизаторе инволюции i нет четверных подгрупп Клейна, по свойствам групп диэдра для всякой инволюции $j \in i^G \setminus \{i\}$ произведение ij имеет нечетный порядок, и класс сопряженных с jk элементов содержится в подгруппе H в силу ее нормальности в G. Следовательно, H содержит отличные от $\{1\}$ и i^G классы сопряженных элементов. В каждом из таких классов x^G по доказанному найдется такой элемент a, что $G = \langle i, a\rangle$. Но тогда $H = G$; противоречие.

Если теперь $i \notin H$, то $C_H(i) = H \cap T = 1$. Кроме того, как и в предыдущем случае, в H найдется такой элемент a, что $G = \langle i, a\rangle$. Имеем $G = \langle H, i\rangle = H \leftthreetimes \langle i\rangle$. Но тогда $T = C_G(i) = \langle i\rangle \cdot C_H(i) = \langle i\rangle$; противоречие. Следовательно, G проста, и тем самым теорема 2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Изд-во Сиб. федер. ун-та, 2011. 149 с.
2. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Москва: Мир, 1985. 352 с.
3. **Brauer R., Suzuki M.** On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1959. Vol. 45, no. 12. P. 1757–1759. doi: 10.1073/pnas.45.12.1757.
4. Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook / eds. E.I. Khukhro, V.D. Mazurov: [e-resource]. 248 p. Available at: *ArXiv*:1401.0300v13 [math.GR] June 2018.
5. **Сучков Н.М.** О конечности некоторых точно дважды транзитивных групп // Алгебра и логика. 2001. Vol. 40, № 3. С. 190–193.
6. **Созутов А.И.** О группах с квазициклическим централизатором конечной инволюции // Сиб. мат. журн. 2016. Vol. 57, no. 5. С. 1127–1130.
7. **Созутов А.И.** О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. 2000. Vol. 39, № 5. С. 602–617.
8. **Попов А.М., Созутов А.И., Шунков В.П.** Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: ИПЦ Краснояр. гос. техн. ун-та, 2004. 211 с.
9. **Холл М.** Теория групп. Москва: ИЛ, 1962. 468 с.
10. **Винберг Э.Б.** Курс алгебры. 2-е изд., испр. и доп. Москва: Факториал Пресс, 2001. 544 с.
11. **Курош А.Г.** Теория групп. 3-е изд. Москва: Наука, 1967. 648 с.
12. **Беляев В.В.** Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1987. Vol. 26, no. 5. С. 531–535.

Поступила 5.08.2019
После доработки 26.09.2019
Принята к публикации 30.09.2019

Дураков Борис Евгеньевич
аспирант
Институт математики и фундаментальной информатики,
Сибирский федеральный университет
г. Красноярск
e-mail: durakov96@gmail.com

REFERENCES

1. Sozutov A.I., Suchkov N.M., and Suchkova N.G. *Beskonechnye gruppy s involyutsiyami* [Infinite Groups with Involutions]. Krasnoyarsk: Sib. Fed. Univ. Press, 2011, 149 p. ISBN: 978-5-7638-2127-7 .
2. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification.* University Series in Mathematics, N Y: Plenum Publishing Corp., 1982, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu*, Moscow: Mir Publ., 1985, 352 p.
3. Brauer R., Suzuki M. On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1959, vol. 45, no. 12, pp. 1757–1759. doi: 10.1073/pnas.45.12.1757 .
4. Khukhro E.I., Mazurov V.D. (eds.) *Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook.* 248 p. Available at: *ArXiv*:1401.0300v13 [math.GR] June 2018.
5. Suchkov N.M. Finiteness of some sharply doubly transitive groups. *Algebra and Logic*, 2001, vol. 40, no. 3, pp. 190–193. doi: 10.1023/A:1010216519782 .
6. Sozutov A.I. Groups with the quasicyclic centralizer of a finite involution. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 5, pp. 881–883. doi: 10.1134/S0037446616050189 .
7. Sozutov A.I. On some infinite groups with a strongly embedded subgroup. *Algebra and Logic*, 2000, vol. 39, no. 5, pp. 345–353. doi: 10.1007/BF02681619 .
8. Popov A.M., Sozutov A.I., Shunkov V.P. *Gruppy s sistemami frobeniusovykh podgrupp* [Groups with systems of Frobenius subgroups]. Krasnoyarsk: KSTU Publ., 2004, 211 p. ISBN: 5-7636-0654-X .
9. Hall M. *The theory of groups.* N Y: The Macmillan Co., 1959, 434 p. ISBN: 9780486816906 . Translated to Russian under the title *Teoriya grupp.* Moscow: Izd. Inostr. Lit., 1962, 468 p.
10. Vinberg E.B. *A course in algebra.* Graduate Studies in Mathematics, 56. Providence, RI: AMS, 2003, 511 p. ISBN: 978-0821834138 . Translated to Russian under the title *Kurs algebry.* Moscow: Faktorial Press, 2001, 544 p.
11. Kurosh A.G. *The theory of groups.* Transl. from the 2nd Russian ed., N Y: Chelsea Publishing Co., 1960, vol. 1: 272 p., ISBN: 978-0828401074 , vol. 2: 308 p. ISBN: 978-0821834770 . Original Russian text (3rd ed.) published in Kurosh A.G. *Teoriya grupp.* Moscow: Nauka Publ., 1967, 648 p.
12. Belyaev V.V. Groups with an almost-regular involution. *Algebra and Logic*, 1987, vol. 26, no. 5, pp. 315–317. doi: 10.1007/BF01978688 .

Received August 5, 2019
Revised September 26, 2019
Accepted September 30, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-01-00566 A).

Boris Evgenievich Durakov, doctoral student, Institute of Mathematics and Computer Science of the Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: durakov96@gmail.com .

Cite this article as: B. E. Durakov. On some groups of 2-rank 1, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 64–68 .