ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.17

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫХ ГРАФОВ: ДВОЙСТВЕННЫЕ 2-СХЕМЫ

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра 3 с сильно регулярным графом Γ_3. Нахождение параметров графа Γ_3 по массиву пересечений графа Γ является прямой задачей. Нахождение массива пересечений графа Γ по параметрам графа Γ_3 является обратной задачей. Прямая и обратная задачи были решены А. А. Махневым и М. С. Нировой: если граф Γ с массивом пересечений $\{k,b_1,b_2;1,c_2,c_3\}$ имеет собственное значение $\theta_2=-1$, то дополнительный граф к Γ_3 является псевдогеометрическим для $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$. Обратно, если Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $pG_\alpha(k,t)$, то Γ имеет массив пересечений $\{k,c_2t,k-\alpha+1;1,c_2,\alpha\}$, где $k-\alpha+1\le c_2t<k$, $1\le c_2\le\alpha$. Ранее изучались дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим графом для сети или обобщенного четырехугольника. В данной работе изучаются массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим графом для двойственной 2-схемы $pG_{t+1}(l,t)$. Найдены новые серии допустимых массивов пересечений: $\{m(m^2-1),m^2(m-1),m^2;1,1,(m^2-1)(m-1)\}$, $\{m(m+1),(m+2)(m-1),m+2;1,1,m^2-1\}$, $\{2m(m-1),(2m-1)(m-1),2m-1;1,1,2(m-1)^2\}$, где $m\equiv\ \pm1\ (\mathrm{mod}\ 3)$. Известные серии 2-схем Штейнера — это унитали, схемы, отвечающие проективным плоскостям четного порядка, содержащим гиперовал, схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$ и схемы точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$. Найдены допустимые массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим графом для одной из известных 2-схем Штейнера.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф, дуальная 2-схема.

I. N. Belousov, A. A. Makhnev. Inverse problems in the theory of distance-regular graphs: Dual 2-designs.

Let Γ be a distance-regular graph of diameter 3 with a strongly regular graph Γ_3. Finding the parameters of Γ_3 from the intersection array of Γ is a direct problem, and finding the intersection array of Γ from the parameters of Γ_3 is its inverse. The direct and inverse problems were solved by A. A. Makhnev and M. S. Nirova: if a graph Γ with intersection array $\{k,b_1,b_2;1,c_2,c_3\}$ has eigenvalue $\theta_2=-1$, then the graph complementary to Γ_3 is pseudo-geometric for $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$. Conversely, if Γ_3 is a pseudo-geometric graph for $pG_\alpha(k,t)$, then Γ has intersection array $\{k,c_2t,k-\alpha+1;1,c_2,\alpha\}$, where $k-\alpha+1\le c_2t<k$ and $1\le c_2\le\alpha$. Distance-regular graphs Γ of diameter 3 for which the graph Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) is pseudogeometric for a net or a generalized quadrangle were studied earlier. In this paper we study intersection arrays of distance-regular graphs Γ of diameter 3 for which the graph Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) is pseudogeometric for a dual 2-design $pG_{t+1}(l,t)$. New infinite families of feasible intersection arrays are found: $\{m(m^2-1),m^2(m-1),m^2;1,1,(m^2-1)(m-1)\}$, $\{m(m+1),(m+2)(m-1),m+2;1,1,m^2-1\}$, and $\{2m(m-1),(2m-1)(m-1),2m-1;1,1,2(m-1)^2\}$, where $m\equiv\pm1\ (\mathrm{mod}\ 3)$. The known families of Steiner 2-designs are unitals, designs corresponding to odd-order projective planes containing a hyperoval, designs of points and lines of projective spaces $PG(n,q)$, and designs of points and lines of affine spaces $AG(n,q)$. We find feasible intersection arrays of a distance-regular graph Γ of diameter 3 for which the graph Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) is pseudogeometric for one of the known Steiner 2-designs.

Keywords: distance-regular graph, dual 2-design.

MSC: 05C25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-44-51

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a,b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a. Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным* с массивом пересечений $\{b_0,\ldots,b_{d-1};c_1,\ldots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w, находящихся на расстоянии i (см. [1]). Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u).

Система инцидентности, состоящая из точек и прямых, называется *α-частичной геометрией порядка* (s,t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку, каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой (прямые пересекаются не более, чем по одной точке) и для любой точки a, не лежащей на прямой L, найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих L (обозначение $pG_\alpha(s,t)$). Если $\alpha = t+1$, то геометрия называется двойственной 2-схемой.

Точечным графом геометрии точек и прямых называется граф, вершинами которого являются точки геометрии, и две различные вершины смежны, если они лежат на прямой. Легко понять, что точечный граф частичной геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с параметрами: $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = (s-1)+(\alpha-1)t$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф, имеющий вышеуказанные параметры для некоторых натуральных чисел α, s, t, называется *псевдогеометрическим графом для* $pG_\alpha(s,t)$.

Для дистанционно регулярного графа диаметра 3 второе собственное значение θ_1 не меньше $\min\{a_3, (a_1+\sqrt{4k+a_1^2})/2\}$, причем в случае $\theta_1 = a_3$ по [2, теорема 7] имеем $\theta_1 = (a_1+\sqrt{4k+a_1^2})/2$. *Графом Шилла* называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 со вторым собственным значением θ_1, равным a_3. Для графа Шилла Γ число $a = a_3$ делит k. Массив пересечений графа Шилла имеет вид $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;1,c_2,a(b-1)\}$, где $b = b(\Gamma) = k/a$, и собственные значения θ_2, θ_3 являются корнями уравнения $x^2-(a_2+a-b-ab)x+(b-1)b_2-a_2 = 0$. Обратно, граф с указанным массивом пересечений является графом Шилла.

Прямой задачей в теории дистанционно регулярных графов является нахождение параметров симметричной структуры, отвечающей графу с данным массивом пересечений, по этому массиву. Обратной задачей является восстановление массива пересечений дистанционно регулярного графа по параметрам отвечающей ему симметричной структуры.

Например, в $AT4(p,q,r)$-графе окрестность каждой вершины является сильно регулярным графом с $k = q^2p+qp+p^2$ и неглавными собственными значениями $p, -q$ (см. [3]). Обратно, данному сильно регулярному графу Δ с параметрами $(q^2p+qp+p^2,(q+1)p,2p-q,p)$ и собственными значениями $p,-q$ отвечает натуральное число r такое, что $pq(p+q)/r$ четно, $r(p+1) < q(p+q)$, r делит $p+q$, и $AT4(p,q,r)$-граф имеет массив пересечений

$$\big\{q(pq+p+q),(q^2-1)(p+1),(r-1)q(p+q)/r,1;1,q(p+q)/r,(q^2-1)(p+1),q(pq+p+q)\big\}.$$

Банг и Кулен изучали дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 сильно регулярен [4, лемма 3.1]. Более точный результат получен в [5, лемма 3]. Из [5, лемма 3] и [1, предложение 4.2.18] следует

Предложение. *Пусть для примитивного дистанционно регулярного графа* Γ *диаметра* 3 *граф* Γ_3 *сильно регулярен. Тогда граф* $\bar\Gamma_3$ *является псевдогеометрическим для* $pG_{c_3}(k,b_1/c_2)$. *Обратно для графа* $\bar\Gamma_3$*, являющегося псевдогеометрическим для* $pG_\alpha(k,t)$*, граф* Γ *имеет массив пересечений* $\{k,tc_2,k-\alpha+1;1,c_2,\alpha\}$*, где* $k-\alpha+1 \le tc_2 < k$ *и* $c_2 \le \alpha$.

А. А. Махневым, М. П. Голубятниковым и Го Вэнь-бинем изучались дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 является псевдогеометрическим графом для сети. А. А. Махневым и М. С. Нировой изучались дистанционно регулярные графы Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим графом для обобщенного четырехугольника.

В данной работе изучаются массивы пересечений дистанционно регулярных графов Γ диаметра 3, для которых граф Γ_3 ($\bar\Gamma_3$) является псевдогеометрическим для двойственной 2-схемы Штейнера $pG_{t+1}(l,t)$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3 *и граф* Γ_3 *является псевдогеометрическим для* $pG_{t+1}(l,t)$*. Тогда* $l=(t+1)m$, *где* $m\in\mathbb{N}$, *и выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *является графом Шилла с массивом пересечений* $\{mt,(t+1)(m-1),t+1;1,1,(m-1)t\}$, $m\le t$;

(2) *возникают следующие серии допустимых массивов пересечений*:

(i) $\{m(m^2-1),m^2(m-1),m^2;1,1,(m^2-1)(m-1)\}$ *в случае* $t+1=m^2$, $m\in\{2,3\}$;

(ii) $\{m(m+1),(m+2)(m-1),m+2;1,1,m^2-1\}$ *в случае* $t=m+1$;

(iii) $\{2m(m-1),(2m-1)(m-1),2m-1;1,1,2(m-1)^2\}$ *в случае* $t+2=2m$, $m\in\{2,3,7\}$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть S является двойственной 2-$(v,k,1)$ схемой с $r=(v-1)/(k-1)$ прямыми, проходящими через точку, и с $b=vr/k$ прямыми. Тогда S является частичной геометрией $pG_k(r-1,k-1)$ с b точками и v прямыми.

Известные бесконечные серии 2-схем Штейнера — это унитали, схемы, отвечающие проективным плоскостям четного порядка, содержащим гиперовал, схемы точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$ и схемы точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$ (см., например, [6; 7; 8, разд. 4.3]).

Теорема 2. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3*, для которого граф* Γ_3 *отвечает известной* 2*-схеме Штейнера. Тогда выполняется одно из следующих утверждений*:

(1) *унитали порядка* $q>1$ (*т.е.* 2-$(q^3+1,q+1,1)$ *схеме*) *отвечают частичная геометрия* $pG_{q+1}(q^2-1,q)$ *и граф Шилла с массивом пересечений* $\{(q-1)q,(q+1)(q-2),q+1;1,1,(q-2)q\}$;

(2) *проективной плоскости четного порядка* $2q$*, содержащей гиперовал* C*, отвечают частичная геометрия* $pG_q(2q,q-1)$ *и граф с массивом пересечений* $\{2q-2,q,q;1,1,q-1\}$*, где* $q\le 4$;

(3) *схеме точек и прямых проективного пространства* $PG(n,q)$ *отвечают частичная геометрия* $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q,q)$ *и при* $n=3$ *граф с массивом пересечений* $\{q^2,q^2-1,q+1;1,1,q(q-1)\}$*, где* $q\in\{2,7\}$;

(4) *схеме точек и прямых аффинного пространства* $AG(n,q)$ *отвечает частичная геометрия* $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q,q-1)$.

Массив пересечений $\{(q-1)q,(q+1)(q-2),q+1;1,1,(q-2)q\}$ в случае (1) теоремы 2 совпадает с массивом $\{m(m+1),(m+2)(m-1),m+2;1,1,m^2-1\}$ из п. (ii) случая (2) теоремы 1 при $q=m+1$. В случае (2) имеем нечетный граф на 7 точках с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$ или обобщенный шестиугольник порядка (2,2) с массивом пересечений $\{6,4,4;1,1,3\}$. В случае (3) снова имеем граф с массивом пересечений $\{4,3,3;1,1,2\}$ или граф с массивом пересечений $\{49,48,8;1,1,42\}$.

В данной работе решена еще одна обратная задача: по параметрам графа $\bar{\Gamma}_3$, являющимся псевдогеометрическим для $pG_{t+1}(l,t)$, найден массив пересечений дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3.

Теорема 3. *Пусть* Γ *является дистанционно регулярным графом диаметра* 3*, для которого граф* $\bar{\Gamma}_3$ *является псевдогеометрическим для* $pG_{t+1}(k,t)$*. Тогда выполняются следующие утверждения*:

(1) Γ *является графом с массивом пересечений* $\{k,tc_2,k-t;1,c_2,t+1\}$, $k-t\le tc_2<k$, $1\le c_2\le t+1$, $t+1$ *делит* $k(k+1)$;

(2) *для известных* 2*-схем Штейнера получим либо*

(i) *унитали порядка* $q>1$ (*т. е.* 2-$(q^3+1,q+1,1)$ *схеме*) *отвечает частичная геометрия* $pG_{q+1}(q^2-1,q)$*, либо*

(ii) *гиперовалу проективной плоскости четного порядка* $2q$ *отвечает частичная геометрия* $pG_q(2q,q-1)$ *и граф с массивом пересечений* $\{2q,2q-2,q+1;1,2,q\}$, $q=18$*, либо*

(iii) *схеме точек и прямых проективного пространства* $PG(n,q)$ *отвечает частичная геометрия* $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q,q)$, *либо*

(iv) *схеме точек и прямых аффинного пространства* $AG(n,q)$ *отвечает частичная геометрия* $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q,q-1)$ *и при* $n=2$ *антиподальный граф с массивом пересечений* $\{q,q-1,1;1,1,q\}$, $q\in\{2,6,56\}$.

1. Доказательство теорем 1 и 2

Докажем теорему 1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $pG_{t+1}(l,t)$. Граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим только в случае, когда $t+1$ делит lt. Поэтому $l=(t+1)m$, где $m\in\mathbb{N}$, и граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{(m-1)t}(mt,(t+1)(m-1))$.

Теперь по предложению граф Γ имеет массив пересечений $\{mt,c_2(t+1)(m-1),t+1;1,c_2,(m-1)t\}$. Так как $a_1=mt-1-c_2(t+1)(m-1)\geq 0$, то $c_2=1$, $m\leq t$, и Γ является графом Шилла. Возникают следующие серии допустимых массивов пересечений (Белоусов И.Н. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2=sc_2$ // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 16–26):

(i) $\{m(m^2-1),m^2(m-1),m^2;1,1,(m^2-1)(m-1)\}$ в случае $t+1=m^2$;

(ii) $\{m(m+1),(m+2)(m-1),m+2;1,1,m^2-1\}$ в случае $t=m+1$;

(iii) $\{2m(m-1),(2m-1)(m-1),2m-1;1,1,2(m-1)^2\}$ в случае $t+2=2m$.

Но в случае массива $\{m(m^2-1),m^2(m-1),m^2;1,1,(m^2-1)(m-1)\}$ по [1, предложение 4.3.3] выполняется неравенство $kv/((\lambda+1)(\lambda+2))\geq 1+((\lambda+2)/(\lambda+1))b_1+((\lambda+2)/(\lambda+1))b_1^2)$, поэтому $m\leq 3$.

В случае массива $\{2m(m-1),(2m-1)(m-1),2m-1;1,1,2(m-1)^2\}$ кратность некоторого собственного значения равна $(2m^2-m+1)(2m^2-2m+1)m/(3m-1)$, поэтому $m\in\{2,3,7\}$.

Теорема 1 доказана. □

Докажем теорему 2.

Лемма 1.1. *Унитали порядка* $q>1$ *отвечает граф с массивом пересечений* $\{(q-1)q,(q+1)(q-2),q+1;1,1,(q-2)q\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Униталь порядка $q>1$ — это 2-$(q^3+1,q+1,1)$ схема. По замечанию 1 она является геометрией $pG_{q+1}(q^2-1,q)$, и по предложению граф Γ имеет массив пересечений $\{(q-1)q,(q+1)(q-2),q+1;1,1,(q-2)q\}$. Заметим, что Γ является графом Шилла с $a=q,b=q-1,c_2=1,b_2=q+1$ и собственными значениями $\theta_1=a=q,\theta_2=-1,\theta_3=-q$. При $q=4$ получим унитарный граф на неизотропных векторах с массивом $\{12,10,5;1,1,8\}$, а при $q=5$ получим допустимый массив пересечений $\{20,18,6;1,1,15\}$. □

Из леммы 1.1 следует утверждение (1) теоремы 2.

Лемма 1.2. *Проективной плоскости четного порядка* $2q$, *содержащей гиперовал* C, *отвечает граф с массивом пересечений* $\{2q-2,q,q;1,1,q-1\}$, $q\leq 4$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если π — проективная плоскость четного порядка $2q$, содержащая гиперовал C, то геометрия с множеством точек, не лежащих в C, и множеством блоков, состоящим из $q(2q-1)$ прямых, не пересекающих C, является двойственной к 2-$(q(2q-1),q,1)$ схеме. По замечанию 1 этой схеме отвечает геометрия $pG_q(2q,q-1)$, а по предложению — граф с массивом пересечений $\{2q-2,q,q;1,1,q-1\}$.

При $q=3$ получим нечетный граф O_7 с массивом $\{4,3,3;1,1,2\}$, а при $q=4$ получим обобщенный шестиугольник $GH(2,2)$ с массивом $\{6,4,4;1,1,3\}$.

При $q>4$ число $a_1+1=q-2$ не делит $k=2q-2$; противоречие с тем, что окрестность вершины в графе является объединением изолированных $(q-2)$-клик. □

Из леммы 1.2 следует утверждение (2) теоремы 2.

Лемма 1.3. *Схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$, имеющей параметры* 2-$((q^{n+1}-1)/(q-1),q+1,1)$, *отвечает геометрия* $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q,q)$, *а при* $n=3$ *— граф с массивом пересечений* $\{q^2,q^2-1,q+1;1,1,q(q-1)\}$, $q\in\{2,7\}$.

Доказательство. По [8, пример 4.4.1] схема точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$ имеет параметры 2-$((q^{n+1}-1)/(q-1),q+1,1)$, отвечает геометрии $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q,q)$, а по предложению при $n=3$ — графу с массивом пересечений $\{q^2,q^2-1,q+1;1,1,q(q-1)\}$.

Граф с массивом пересечений $\{q^2,q^2-1,q+1;1,1,q(q-1)\}$ является графом Шилла с $a=b=q,c_2=1,b_2=q+1$ и имеет неглавные собственные значения $q,-1,-(q+1)$. Применяя [1, теорема 4.1.4] получаем, что кратности собственных значений равны $(q^2+q+1)(q^2+1)q/(2q+1)$, $(q^2+q+1)q$, $(q^2+1)(q^2-1)q/(2q+1)$ соответственно. Поэтому $2q+1$ делит $(q^2+1)q(q^2-1,q^2+q+1)$ и делит 15. Отсюда $q=2,7$. □

Из леммы 1.3 следует утверждение (3) теоремы 2.

Лемма 1.4. *Схеме точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$, имеющей параметры* 2-$(q^n,q,1)$, *отвечает геометрия* $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q,q-1)$.

Доказательство. По [8, пример 4.4.1.] схема точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$ имеет параметры 2-$(q^n,q,1)$, и по замечанию 1 отвечает геометрии $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q,q-1)$.

В этом случае по предложению дистанционно регулярный граф должен иметь массив пересечений $\{q^{n-1}+\ldots+q,(q-1)c_2,q^{n-1}+\ldots+q^2+1;1,c_2,q\}$. По [1, предложение 4.1.6] $(q-1)c_2\geq q^{n-1}+\ldots+q^2+1$ и $c_2\leq q$; противоречие. □

Из леммы 1.4 следует утверждение (4) теоремы 2. Теорема 2 доказана. □

2. Доказательство теоремы 3

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3, для которого граф $\bar\Gamma_3$ является псевдогеометрическим для $pG_{t+1}(k,t)$. Тогда по предложению Γ является графом с массивом пересечений $\{k,tc_2,k-t;1,c_2,t+1\}$, $k_2=b_0b_1/c_2=kt$, $k_3=k_2b_2/c_3=kt(k-t)/(t+1)$ (см. [1, разд. 4.1 (1c)]), поэтому $k-t\leq tc_2<k$, $1\leq c_2\leq t+1$ и из целочисленности k_3 число $t+1$ делит $k(k+1)$.

Лемма 2.1. *Унитали порядка $q>1$ отвечает граф с массивом пересечений* $\{q^2-1,q^2-q,q^2-q-1;1,q-1,q+1\}$, $q=19$.

Доказательство. Унитали порядка $q>1$ (т.е. 2-$(q^3+1,q+1,1)$ схемы) отвечают геометрия $pG_{q+1}(q^2-1,q)$ и граф с массивом пересечений $\{q^2-1,q^2-q,q^2-q-1;1,q-1,q+1\}$.

Граф с массивом пересечений $\{q^2-1,q^2-q,q^2-q-1;1,q-1,q+1\}$ имеет неглавные собственные значения $2(q^2-q+1)(q-1)q^3/(4q^3-4q^2-4q+5-2q\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}+3\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5})$, $(q^2-q+1)(q^2-q-1)$, $2(q^2-q+1)(q-1)q^3/(4q^3-4q^2-4q+5+2q\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}-3\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}+5)$ кратностей $(\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}-1)/2$, q^2-1, $(\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}-1)/2$ соответственно.

Положим $y=\sqrt{4q^3-4q^2-4q+5}$. Тогда $y^2-2qy+3y$ делит $2(q^2-q+1)(q-1)q^3$.

Число $(y^2,q)=(4q^3-4q^2-4q+5,q)$ делит 5. Далее, $(y^2,q-1)=(4q^3-4q^2-4q+5,q-1)=1$. Имеем $(y^2,q^2-q+1)=(4q^3-4q^2-4q+5,4q^3-4q^2+4q)=(8q-5,q^2-q+1)$. Теперь $(8q^2-5q,8q^2-8q+8)=(8q-5,3q-8)$ делит 49. С учетом того, что $4q^3-4q^2-4q+5$ является квадратом, имеем $q=19$. □

Замечание 2. По [1, теорема 5.4.1] граф с массивом пересечений из утверждения леммы 2.1 не существует.

Из леммы 2.1 и замечания 2 следует утверждение (2)(i) теоремы 3.

Лемма 2.2. *Проективной плоскости четного порядка $2q$, содержащей гиперовал C, отвечает граф с массивом пересечений $\{2q, 2q-2, q+1; 1, 2, q\}$ и $q = 18$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если π — проективная плоскость четного порядка $2q$, содержащая гиперовал C, то геометрия с множеством точек, не лежащих в C, и множеством блоков, состоящим из $q(2q-1)$ прямых, не пересекающих C, является двойственной к 2-$(q(2q-1), q, 1)$ схеме. Этой схеме отвечают геометрия $pG_q(2q, q-1)$, а по предложению — граф с массивом пересечений $\{2q, 2q-2, q+1; 1, 2, q\}$. Применяя [1, теорема 4.1.4] к полученному массиву пересечений, получаем, что кратность наибольшего неглавного собственного значения графа Γ равна $m_1 = 4(4q^2-1)(q-1)/(16q - 3\sqrt{16q+1}+1)$.

В силу целочисленности m_1 имеем $16q + 1 = u^2$ для некоторого натурального числа u. Подставляя $q = (u^2-1)/16$ в формулу для m_1, имеем $m_1 = (u^2+7)(u^2-17)(u+3)/(256u)$.

Из целочисленности m_1 число u может принимать только три значения 7, 17 и 119, а значит, $q \in \{3, 18, 885\}$. Граф не существует в первом случае по [1, предложение 5.4.4], а в третьем — по теореме Брука — Райзера [9, теорема 1]. $\square$

Из леммы 2.2 следует утверждение (2)(ii) теоремы 3.

Лемма 2.3. *Схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$, имеющей параметры 2-$((q^{n+1}-1)/(q-1), q+1, 1)$, отвечает геометрия $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q, q)$, а при $n = 3$ — граф с массивом пересечений $\{q^2+q, q^2, q^2; 1, q, q+1\}$, $q = 2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схеме точек и прямых проективного пространства $PG(n,q)$ отвечает геометрия $pG_{q+1}(q^{n-1}+\ldots+q, q)$, а по предложению при $n = 3$ — граф с массивом пересечений $\{q^2+q, q^2, q^2; 1, q, q+1\}$.

Граф с массивом пересечений $\{q^2+q, q^2, q^2; 1, q, q+1\}$ имеет неглавные собственные значения $2(q^2+q+1)(q^2+1)q^2/(4q^3+4q^2+1-2q\sqrt{4q^3+4q^2+1}+\sqrt{4q^3+4q^2+1})$, $(q^2+1)q^2$, $2(q^2+q+1)(q^2+1)q^2/(4q^3+4q^2+1+2q\sqrt{4q^3+4q^2+1}-\sqrt{4q^3+4q^2+1})$ кратностей $1/2\sqrt{4q^3+4q^2+1}-1/2$, q^2+q, $1/2\sqrt{4q^3+4q^2+1}-1/2$ соответственно (см. [1, теорема 4.1.4]).

Положим $z = \sqrt{4q^3+4q^2+1}$. Тогда $z^2 - 2qz + z$ делит $2(q^2+q+1)(q^2+1)q^2$. Заметим, что z взаимно просто с $2q$. Далее, $(z^2, q^2+1) = (4q^3+4q^2+1, 4q^3+4q) = (4q^2+4, 4q^2-4q+1) = (4q+3, q^2+1)$, поэтому $(z^2, q^2+1) = (3q-4, 4q+3)$ делит 25. Имеем $(z^2, q^2+q+1) = (4q^3+4q^2+1, 4q^3+4q^2+4q) = (4q-1, q^2+q+1)$. Теперь $(z^2, q^2+q+1) = (4q-1, 5q+4)$ делит 21. С учетом того, что $4q^3+4q^2+1$ является квадратом, имеем $q = 2$. $\square$

З а м е ч а н и е 3. По [1, предложение 5.4.4] граф с массивом пересечений из утверждения леммы 2.3 не существует.

Из леммы 2.3 и замечания 3 следует утверждение (2)(iii) теоремы 3.

Лемма 2.4. *Схеме точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$ отвечает геометрия $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q, q-1)$, а при $n = 2$ — антиподальный граф с массивом пересечений $\{q, q-1, 1; 1, 1, q\}$, $q \in \{2, 6, 56\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Схеме точек и прямых аффинного пространства $AG(n,q)$ отвечает $pG_q(q^{n-1}+\ldots+q, q-1)$, а по предложению при $n = 2$ — антиподальный граф с массивом пересечений $\{q, q-1, 1; 1, 1, q\}$. Кратность наибольшего неглавного собственного значения равна $m_1 = 2(q^2-1)q/(4q - \sqrt{4q+1}+1)$. Значит, $q = (t^2-1)/4$ для подходящего целого числа t и $m_1 = (t^2+3)(t^2-5)(t+1)/(32t)$. Поэтому $t \in \{3, 5, 15\}$ и $q \in \{2, 6, 56\}$. $\square$

Из леммы 2.4 следует утверждение (2)(iv) теоремы 3. Теорема 3 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A.** Distance-regular graphs. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989. 495 p.
2. **Koolen J.H., Park J.** Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 2010. Vol. 31. P. 2064–2073.
3. **Jurisic A., Koolen J.** Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4 // Discrete Math. 2002. Vol. 244. P. 181–202. doi: 10.1016/S0012-365X(01)00082-6 .
4. **Bang S., Koolen J.** Distance-regular graphs of diameter 3 having eigenvakue −1 // Linear Algebra Appl. 2017. Vol. 531. P. 38–53. doi: 10.1016/j.laa.2017.05.038 .
5. **Махнев А.А., Нирова М.С.** Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = c_2$ // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 5. С. 730–744. doi: 10.4213/mzm11503 .
6. **Barwick S., Ebert G.** Unitals in projective planes. N Y etc.: Springer, 2008. 193 p. doi: 10.1007/978-0-387-76366-8 .
7. **Assmus E.F., Key J.D. Jr.** Designs and their codes. Chap. 8: Steiner systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. P. 295–316. doi: 10.1017/CBO9781316529836.009 .
8. **Махнев А.А., Белоусов И.Н., Падучих Д.В.** Конечные геометрии и их автоморфизмы. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016. 188 с.
9. **Bruck R.H., Ryser H.J.** The nonexistence of certain finite projective planes // Canadian J. Math. 1949. Vol. 1. P. 88–93. doi: 10.4153/cjm-1949-009-2 .

Поступила 1.08.2019
После доработки 8.11.2019
Принята к публикации 25.11.2019

Белоусов Иван Николаевич
канд. физ.-мат. наук
зав. отделом, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: i_belousov@mail.ru

Махнев Александр Алексеевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. *Distance-regular graphs.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1989, 495 p. ISBN: 3-540-50619-5 .
2. Koolen J.H., Park J. Shilla distance-regular graphs. *Europ. J. Comb.*, 2010, vol. 31, pp. 2064–2073.
3. Jurisic A., Koolen J. Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4. *Discrete Math.*, 2002, vol. 244, pp. 181–202. doi: 10.1016/S0012-365X(01)00082-6 .
4. Bang S., Koolen J. Distance-regular graphs of diameter 3 having eigenvakue −1. *Linear Algebra Appl.*, 2017, vol. 531, pp. 38–53. doi: 10.1016/j.laa.2017.05.038 .
5. Makhnev A.A., Nirova M.S. Distance-regular Shilla graphs with $b_2 = c_2$. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 5, pp. 780–792. doi: 10.1134/S0001434618050103 .
6. Barwick S., Ebert G. *Unitals in projective planes.* N Y etc.: Springer, 2008, 193 p. doi: 10.1007/978-0-387-76366-8 .
7. Assmus E.F., Key J.D. Jr. *Designs and their codes.* Chap. 8: Steiner systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994, pp. 295–316. doi: 10.1017/CBO9781316529836.009 .

8. Makhnev A.A., Belousov I.N., Paduchikh D.V. *Konechnye geometrii i ikh avtomorfizmy* [Finite geometries and their automorphisms]. *Novosibirsk: SB RAS Publ.*, 2016, 188. ISBN: 978-5-7692-1521-6 .
9. Bruck R.H., Ryser H.J. The nonexistence of certain finite projective planes. *Canadian J. Math.*, 1949, vol. 1, pp. 88–93. doi: 10.4153/cjm-1949-009-2 .

Received August 1, 2019
Revised November 8, 2019
Accepted November 25, 2019

Ivan Nikolaevich Belousov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: i_belousov@mail.ru

Aleksandr Alekseevich Makhnev, Dr. Phys.-Math. Sci., RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: makhnev@imm.uran.ru

Cite this article as: I. N. Belousov, A. A. Makhnev. Inverse problems in the theory of distance-regular graphs: Dual 2-designs, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 44–51 .