ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 519.16 + 519.85

АППРОКСИМАЦИОННАЯ СХЕМА ХАЙМОВИЧА — РИННОЯ КАНА ДЛЯ CVRP В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ФИКСИРОВАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ УДВОЕНИЯ[1]

М. Ю. Хачай, Ю. Ю. Огородников

Задача маршрутизации транспорта с ограничением на грузоподъемность (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) — одна из классических маршрутных экстремальных комбинаторных задач, обладающих большим числом приложений в области исследования операций. Оставаясь NP-трудной в сильном смысле как в общем случае, так и на евклидовой плоскости, задача CVRP допускает квазиполиномиальные и даже полиномиальные приближенные схемы (QPTAS и PTAS) в евклидовых пространствах фиксированной размерности. В то же время метрическая постановка задачи APX-полна даже в случае произвольной фиксированной грузоподъемности $q \geq 3$. В данной работе показывается, что классический алгоритм М. Хаймовича и А. Ринноя Кана реализует полиномиальную приближенную схему PTAS и эффективную полиномиальную приближенную схему (EPTAS) в произвольном метрическом пространстве фиксированной размерности при $q = o(\log\log n)$ и произвольной постоянной грузоподъемности соответственно.

Ключевые слова: задача маршрутизации транспорта с ограничением на грузоподъемность (CVRP), полиномиально приближенная схема (PTAS), метрическое пространство, размерность удвоения.

M. Yu. Khachai, Yu. Yu. Ogorodnikov. Haimovich–Rinnooy Kan polynomial-time approximation scheme for the CVRP in metric spaces of a fixed doubling dimension.

The Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP) is a classical extremal combinatorial routing problem with numerous applications in operations research. Although the CVRP is strongly NP-hard both in the general case and in the Euclidean plane, it admits quasipolynomial- and even polynomial-time approximation schemes (QPTAS and PTAS) in Euclidean spaces of fixed dimension. At the same time, the metric setting of the problem is APX-complete even for an arbitrary fixed capacity $q \geq 3$. In this paper, we show that the classical Haimovich–Rinnooy Kan algorithm implements a PTAS and an Efficient Polynomial-Time Approximation Scheme (EPTAS) in an arbitrary metric space of fixed doubling dimension for $q = o(\log\log n)$ and for an arbitrary constant capacity, respectively.

Keywords: Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP), Polynomial-Time Approximation Scheme (PTAS), metric space, doubling dimension.

MSC: 90C27, 90C59, 90B06

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-235-248

Введение

Задача маршрутизации с ограничением на грузоподъемность транспортных средств (Capacitated Vehicle Routing Problem, CVRP) — одна из наиболее известных экстремальных комбинаторных задач, обладающая широким спектром приложений в области исследования операций [11; 27]. По-видимому первая постановка задачи CVRP была приведена Г. Данцигом и Дж. Рамсером в их классической работе [9], посвященной построению экономически эффективного набора маршрутов, обеспечивающих доставку топлива с центрального терминала по сети заправочных станций, распределенной на местности.

Как и для большинства задач комбинаторной оптимизации, результаты в области алгоритмического анализа задачи CVRP условно могут быть разделены на три основных направления.

Первое направление связано с редукцией исследуемой задачи к подходящей постановке задачи целочисленной (смешанной) оптимизации и применением для поиска оптимального

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 19-07-01243 и 17-08-01385).

решения последней одной из модификаций метода ветвей и границ (см. обзор в [27]). К сожалению, ввиду известной NP-трудности задачи CVRP размеры постановок, поддающихся эффективному решению в рамках данного подхода, остаются достаточно скромными, несмотря на стремительные темпы развития вычислительной техники и очевидные успехи последних лет [22–24] в области совершенствования алгоритмов.

Второе направление связано с применением специализированных эвристик и метаэвристик, среди которых: методы локального поиска [3], переменных окрестностей (VNS) [25], поиска с запретами [26], генетические [28] и биоинспирированные алгоритмы [20], а также их комбинации [19]. Методы этой группы зачастую демонстрируют потрясающую производительность, позволяя эффективно находить близкие к оптимальным или даже точные решения для постановок CVRP чрезвычайно большого размера. Тем не менее отсутствие теоретически обоснованных оценок точности и трудоемкости влечет дополнительные трудозатраты, связанные с численным оцениванием производительности (и возможной донастройкой параметров) алгоритмов при переходе к каждому новому классу постановок. Кроме того, нередко необходимые для этого тестовые наборы данных не могут быть предоставлены заказчиком, например, из соображений безопасности.

Последнее подтверждает актуальность развития третьего направления, связанного с аппроксимируемостью задачи в классе эффективных алгоритмов с гарантированными оценками. Являясь обобщением классической задачи коммивояжера, задача CVRP NP-трудна в сильном смысле и сохраняет труднорешаемость (при условии, что грузоподъемность является частью входа) даже на евклидовой плоскости [21]. Метрическая постановка задачи APX-полна[2] [5; 12], более того, CVRP APX-трудна даже при произвольной фиксированной грузоподъемности $q \geq 3$ и метрики со значениями 0, 1 и 2.

Наибольших успехов в области аппроксимируемости задачи CVRP удалось достичь в конечномерных числовых пространствах. Известные результаты в этой области восходят к классическим работам М. Хаймовича, А. Ринноя Кана [12] и С. Ароры [4]. Так, в статье [12] предложена первая полиномиальная приближенная схема (PTAS) для планарной задачи CVRP при $q = o(\log\log n)$, которую впоследствии удалось распространить на случаи более слабых верхних оценок грузоподъемности (см., например, [5; 16]), произвольной фиксированной размерности [17;18], дополнительных ограничений на временные промежутки обслуживания [14] и неоднородность спроса [15]. Результат работы [4] — PTAS для евклидовой задачи коммивояжера — лег в основу полиномиальной приближенной схемы [2], находящей $(1+\varepsilon)$-приближенное решение для задачи CVRP на плоскости при рекордно слабой верхней оценке $q \leq 2^{\log^{\delta(\varepsilon)} n}$, и квазиполиномиальной приближенной схемы (QPTAS) [10] для наиболее общей постановки планарной CVRP в условиях отсутствия каких-либо дополнительных ограничений на грузоподъемность.

Таким образом, известные классы эффективно аппроксимируемых случаев задачи CVRP за редким исключением, быть может, случаев описанных в работе [8], исчерпываются сугубо геометрическими постановками задачи. В то же время, как показано в недавней работе Я. Бартала и коллег [7], близкая к CVRP задача коммивояжера обладает PTAS в существенно более общем случае — в произвольном метрическом пространстве конечной размерности удвоения (doubling dimension).

По-видимому, в данной работе впервые удалось получить аналогичный результат для задачи CVRP.

Мы показываем, что в классе постановок CVRP, задаваемых метрикой размерности удвоения $d > 2$ такой, что расстояние $\rho(x,y)$ от произвольного потребителя x до склада y удовлетворяет соотношению $a \leq \rho(x,y) \leq b$ для наперед заданных вещественных чисел $0 < a < b$, приближенный алгоритм Хаймовича — Ринноя Кана сохраняет свойства, обоснованные ранее в классической работе [12] для случая евклидовой плоскости. А именно:

[2] Т. е. задача аппроксимируема в классе полиномиальных приближенных алгоритмов с фиксированной точностью, и построение для нее полиномиальной приближенной схемы влечет $P = NP$.

1) реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) при условии $q = o(\log\log n)$,
2) является эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS) при произвольной фиксированной грузоподъемности q.

1. Постановка задачи

Содержательная постановка задачи CVRP задается множеством потребителей X, обладающих идентичным объемом спроса на однородную продукцию (без ограничения общности полагаемым единичным), складом y, хранящим неограниченный запас этой продукции, и штатом одинаковых транспортных средств, обладающих заданной грузоподъемностью q. Задача состоит в построении набора циклических маршрутов, начинающихся и завершающихся на складе, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос и доставляющих минимальные транспортные издержки.

В свою очередь математическая постановка задачи может быть сформулирована следующим образом. Пусть заданы полный взвешенный граф $G = (X \cup \{y\}, E, w)$ и натуральное число q. Симметричная весовая функция $w\colon E \to \mathbb{R}_+$ произвольной паре узлов $\{u, v\} \subset X \cup \{y\}$ сопоставляет транспортные издержки $w(u, v)$. *Допустимым маршрутом* называется произвольный простой цикл $R = y, x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, y$ в графе G, удовлетворяющий ограничению на грузоподъемность $s \leq q$. Как обычно, *стоимостью* маршрута R называем величину $w(R) = w(y, x_{i_1}) + w(x_{i_1}, x_{i_2}) + \cdots + w(x_{i_{s-1}}, x_{i_s}) + w(x_{i_s}, y)$. Задача CVRP состоит в построении множества допустимых маршрутов $S = \{R_1, \ldots, R_l\}$ минимальной суммарной стоимости $w(S) = \sum_{j=1}^{l} w(R_j)$, удовлетворяющих совокупный потребительский спрос.

Если весовая функция w удовлетворяет *неравенству треугольника*, т. е. для произвольного подмножества $\{v_1, v_2, v_3\} \subset X \cup \{y\}$ справедливо соотношение $w(v_1, v_2) \leq w(v_1, v_3) + w(v_3, v_2)$, то величину $w(u, v)$ принято называть *расстоянием* между точками u и v, стоимость $w(R)$ произвольного маршрута R — его *длиной*, а саму задачу — *метрической*.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением исключительно метрических постановок задачи CVRP. Более того, задавшись произвольным натуральным числом $d > 2$ и вещественными числами $0 < a < b$, мы потребуем, чтобы каждая рассматриваемая постановка задачи обладала следующими свойствами.

Свойство 1. Пара (Z, ρ), в которой $Z = X \cup \{y\}$ и $\rho|_E \equiv w$, задает метрическое пространство фиксированной *размерности удвоения* $d > 2$.

Свойство 2. Расстояние $\rho(x, y)$ от произвольного потребителя $x \in X$ до склада y удовлетворяет двустороннему ограничению $a \leq \rho(x, y) \leq b$.

По традиции всюду ниже мы будем использовать обозначения $\mathrm{CVRP}^*(X)$ и $\mathrm{TSP}^*(X)$ для оптимальных значений постановок задач маршрутизации и коммивояжера, задаваемых множеством потребителей X.

2. Метрические пространства фиксированной размерности удвоения

Нам потребуется несколько определений и вспомогательных результатов, полученных в теории конечных метрических пространств (см., например, [1]).

Определение 1. Метрическое пространство (Z, ρ) имеет размерность удвоения d, если для произвольных $z_0 \in Z$ и $R > 0$ найдутся число $M \leq 2^d$ и точки $z_1, \ldots, z_M \in Z$ такие, что метрический шар

$$B(z_0, R) = \{z \in Z\colon \rho(z_0, z) \leq R\} \subset \bigcup_{j=1}^{M} B(z_j, R/2).$$

Нас будут интересовать инъективные отображения (вложения) f заданного метрического пространства (Z, ρ) в конечномерные линейные нормированные пространства.

Определение 2. Конечное метрическое пространство (Z, ρ), $|Z| = n$ вкладывается в пространство l_p^D с искажением L, если существует билипшицево вложение $f\colon Z \to l_p^D$, для которого соотношение

$$\rho(z_1, z_2) \le \|f(z_1) - f(z_2)\|_p \le L \cdot \rho(z_1, z_2)$$

выполнено для произвольных $z_1, z_2 \in Z$.

Как правило, размерность D результирующего пространства и константа Липшица L зависят от мощности исходного пространства (Z, ρ). Однако для метрических пространств (Z, ρ^α), получаемых из пространств фиксированной размерности удвоения (Z, ρ) путем возведения метрики ρ в произвольную степень $\alpha \in (0, 1)$, справедлива известная теорема П. Ассуада [6], гарантирующая вложение таких пространств с константным искажением в пространства фиксированной размерности. Для дальнейших рассуждений нам потребуется более современная версия этого результата [1, теорема 17].

Лемма 1. *Пусть (Z, ρ) — произвольное метрическое пространство размерности удвоения d, $p > 1$, $0 < \alpha < 1$, $\theta > 0$ и $2^{192/\theta} \le k \le d$. Существует билипшицево вложение $f\colon Z \to l_p^D$ такое, что*

$$L = O\big(k^{1+\theta} 2^{d/(pk)}/(1-\alpha)\big) \quad \text{и} \quad D = O\Big(\frac{d2^{d/k}}{\alpha\theta}\Big(1 - \frac{\log(1-\alpha)}{\log k}\Big)\Big).$$

В частности, для используемых нами конкретных значений параметров $p = 2$, $\alpha = 1/2$, $\theta = 192/\log\log d$ и $k = d$ лемма 1 гарантирует существование вложения $f\colon (Z, \rho) \to l_2^D$ с константой Липшица $L = \mathrm{poly}(d)$ в пространство размерности $D = O(d \log\log d)$.

3. Схема Хаймовича — Ринноя Кана

В классической статье М. Хаймовича и А. Ринноя Кана [12] предложен приведенный ниже приближенный алгоритм для метрической задачи CVRP и показано, что он реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) для постановок задачи на евклидовой плоскости, удовлетворяющих соотношению $q = o(\log\log n)$.

Алгоритм основан на разбиении множества X на два непересекающихся подмножества X_{out} и X_{in} внешних и внутренних потребителей соответственно. Принципиальный момент, на котором базируется обоснование полиномиальности данной схемы, состоит в том, что для поиска $(1+\varepsilon)$-приближенного решения исходной задачи можно ограничиться разбиениями, в которых $|X_{out}|$ не зависит от n, что позволяет применять для поиска решения соответствующей "внешней" подзадачи точные алгоритмы экспоненциальной трудоемкости. В свою очередь приближенное решение "внутренней" подзадачи, задаваемой подмножеством X_{in}, может быть найдено существенно более грубым, но высокопроизводительным приближенным методом итерированного разбиения маршрута (ITP) [12], принимающим на вход произвольное β-приближенное решение вспомогательной метрической задачи коммивояжера.

Алгоритм Хаймовича — Ринноя Кана

1. Упорядочить множество потребителей X по убыванию расстояния $r_i = \rho(x_i, y)$ от склада.

2. Для заданного $\varepsilon > 0$ найти наименьшее значение $\tilde{k} = \tilde{k}(\varepsilon, q, \beta)$, для которого относительная погрешность алгоритма удовлетворяет соотношению

$$e(\tilde{k}) = \frac{\mathrm{CVRP}^*(X_{out}) + \mathrm{ITP}(X_{in}) - \mathrm{CVRP}^*(X)}{\mathrm{CVRP}^*(X)} \le \varepsilon.$$

Здесь $X_{out} = \{x_1, \ldots, x_{\tilde{k}-1}\}$, $X_{in} = X \setminus X_{out}$ и $\mathrm{ITP}(X_{in})$ — верхняя оценка стоимости приближенного решения, возвращаемого алгоритмом ITP.

3. Для поиска точного решения $\mathrm{S_{DP}}$ “внешней” подзадачи и приближенного решения $\mathrm{S_{ITP}}$ “внутренней” применить схему динамического программирования Хорна [13] и алгоритм ITP соответственно.

4. Выдать приближенное решение исходной задачи в виде $S = \mathrm{S_{DP}} \cup \mathrm{S_{ITP}}$.

4. Основной результат

В этом разделе мы покажем, что результат Хаймовича — Ринноя Кана справедлив для гораздо более широкого (чем евклидова плоскость) класса постановок CVRP.

Теорема. $(1+\varepsilon)$*-приближенное решение произвольной метрической постановки задачи* CVRP*, обладающей свойствами* 1 *и* 2*, может быть получено для произвольного* $\varepsilon > 0$ *за время*

$$O\big(qk^3 2^k\big) + \mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n) + O(n^2),$$

где

$$k = k(\varepsilon, q, \beta, D, a) = O\Big(\Big(\frac{q}{\varepsilon}\Big)^D \Big(\frac{4\sqrt{2}\beta D^{(1+3/D)/2}\,L}{\sqrt{a}}\Big)^D + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}\Big)\,\Big(\exp\Big(\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big)^2,$$

$\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n)$ — *время решения вспомогательной задачи коммивояжера*, $D = O(d \log\log d)$ и $L = \mathrm{poly}(d)$.

Доказательство теоремы следует из приведенных ниже известных лемм (см., например, [5; 12]).

Лемма 2. *Стоимость* $w(\mathrm{S_{ITP}})$ *приближенного решения, получаемого методом* ITP *для произвольной (необязательно метрической) постановки* CVRP*, удовлетворяет соотношению*

$$\mathrm{ITP}(X) = w\left(S_{ITP}\right) \le 2\left\lceil\frac{n}{q}\right\rceil \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}{n} + (1-1/q)\,\mathrm{TSP}^*(X).$$

Лемма 3. *Стоимость оптимального решения* $\mathrm{CVRP}^*(X)$ *произвольной метрической постановки задачи* CVRP *допускает нижнюю оценку*

$$\mathrm{CVRP}^*(X) \ge \max\Big\{\mathrm{TSP}^*(X \cup \{y\}), 2r_1, \frac{2}{q}\sum_{i=1}^{n} r_i\Big\}.$$

Следующая лемма устанавливает верхнюю оценку неустранимой погрешности, возникающей на шаге 2 схемы Хаймовича — Ринноя Кана при декомпозиции исходной постановки.

Лемма 4. *Для произвольного* $1 \le k \le n$ *и разбиения множества потребителей* X *произвольной метрической постановки* CVRP *на подмножества* X_{in} *и* X_{out} *справедливо соотношение*

$$\mathrm{CVRP}^*(X_{in}) + \mathrm{CVRP}^*(X_{out}) \le \mathrm{CVRP}^*(X) + 4(k-1)r_k.$$

Последняя лемма из ранее доказанных устанавливает верхнюю оценку для веса оптимального решения задачи коммивояжера на множестве потребителей $X \in l_2^D$. Впервые данный технический результат был представлен в работе [17, лемма 5].

Лемма 5. *Пусть* $X \subset B(0,R) = \{x \in l_2^D : \|x\|_2 \le R\}$*. Для длины* $\mathrm{TSP}^*(X)$ *оптимального маршрута коммивояжера справедлива верхняя оценка*

$$\mathrm{TSP}^*(X) \le C_D\,R + C_D^*\,R^{1/D}\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i\Big)^{1-1/D}, \tag{1}$$

где $C_D = D^2\,2^{D+1}$ *и* $C_D^* = 4\sqrt{2}\,D^{(1+3/D)/2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Рассмотрим метрическое пространство $\mathcal{S} = (S^{D-1}, dist)$, задаваемое на поверхности единичной сферы S^{D-1} пространства l_2^D *угловым* расстоянием $dist(\xi_1, \xi_2) = \arccos(\xi_1, \xi_2)$. Проверим, что пространство $\mathcal{S}$ содержит конечное δ-плотное подмножество для произвольного достаточно малого $\delta > 0$. В самом деле, поместим сферу S^{D-1} в D-мерный гиперкуб со стороной 2. Задавшись произвольным $h \in (0, 2]$, разобьем каждое одномерное ребро гиперкуба на $\left\lceil \dfrac{2}{h} \right\rceil$ ячеек, каждая из которых, за исключением, может быть, одной, имеет длину h. В свою очередь каждая фасета гиперкуба будет содержать $\left\lceil \dfrac{2}{h} \right\rceil^{D-1}$ ячеек размерности $D-1$, а общее число ячеек на его поверхности составит

$$2D\,\lceil 2/h \rceil^{D-1} \le 2D(1 + 2/h)^{D-1} = 2^D D\, h^{1-D}(1 + h/2)^{D-1} \le \tilde{C}_D\, h^{1-D},$$

где $2\tilde{C}_D = D\,4^D$.

Легко убедиться в том, что множество $\mathcal{S}'_h$, состоящее из проекций геометрических центров построенных ячеек на поверхность сферы S^{D-1}, является искомым δ-плотным подмножеством $\mathcal{S}$ при $\delta = h\sqrt{D-1}/2$, мощность которого не превосходит $\tilde{C}_D\, h^{1-D}$.

2. Для получения искомой верхней оценки $\mathrm{TSP}^*(X)$ сделаем следующее:
— через каждую точку $\xi_j \in \mathcal{S}'_h$ проведем радиус шара $B(0, R)$, содержащего множество X;
— произвольную точку $x_i \in X$ соединим перпендикуляром с ближайшим к ней радиусом;
— построим замкнутый маршрут, проходящий по каждому из построенных радиусов от начала координат до поверхности шара $B(0, R)$, посещая при необходимости присоединенные к нему точки x_i.

Легко видеть, что длина построенного маршрута не превосходит величины

$$W(h) = 2\tilde{C}_D h^{1-D} R + h\sqrt{D-1} \sum_{i=1}^{n} r_i,$$

и, следовательно,

$$\mathrm{TSP}^*(X) \le \min\{W(h) \colon 0 < h \le 2\}. \tag{2}$$

В силу выпуклости функции $W = W(h)$ оптимум в задаче (2) достигается либо в стационарной точке

$$h^* = \left(\frac{2\tilde{C}_D R\sqrt{D-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} \right)^{1/D}, \tag{3}$$

в которой

$$W'(h) = 2\tilde{C}_D(1-D)Rh^{-D} + \sqrt{D-1} \sum_{i=1}^{n} r_i = 0,$$

либо при $h^* \ge 2$ на правой границе интервала.

Рассмотрим каждый из случаев в отдельности. Пусть $h^* < 2$, тогда

$$\mathrm{TSP}^* \le W(h^*) = 2\tilde{C}_D R \left(\frac{2\tilde{C}_D R\sqrt{D-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} \right)^{\frac{1-D}{D}} + \left(\frac{2\tilde{C}_D R\sqrt{D-1}}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} \right)^{1/D} \sqrt{D-1} \sum_{i=1}^{n} r_i$$

$$= (2\tilde{C}_D)^{1/D} \big((D-1)^{\frac{1-D}{2D}} + (D-1)^{\frac{D+1}{2D}} \big) R^{1/D} \Big(\sum_{i=1}^{n} r_i \Big)^{1-1/D} \le C^*_D R^{1/D} \Big(\sum_{i=1}^{n} r_i \Big)^{1-1/D}, \tag{4}$$

где $4D^{1/D}\big((D-1)^{\frac{1-D}{2D}} + (D-1)^{\frac{D+1}{2D}} \big) \le C^*_D = 4\sqrt{2}\, D^{(1+3/D)/2}$ при произвольном $D > 1$.

Если $h^* \geq 2$, то из соотношения (3) имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} r_i \leq 2^{1-D}\tilde{C}_D R\sqrt{D-1}$, откуда

$$\mathrm{TSP}^* \leq W(2) = 2\tilde{C}_D 2^{1-D} R + 2\sqrt{D-1}\sum_{i=1}^{n} r_i$$

$$\leq 2^{2-D}\tilde{C}_D R + 2^{2-D}(D-1)\tilde{C}_D R = 2^{1-D}\, D^2 2^{2D}\, R = D^2 2^{D+1}\cdot R. \tag{5}$$

Полагая $C_D = D^2 2^{D+1}$ и суммируя оценки (4) и (5), завершаем обоснование неравенства (1).

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь произвольную метрическую постановку задачи CVRP, обладающую свойствами 1 и 2. Зададимся произвольным непустым подмножеством $X' = X \cap B(y, R)$ множества потребителей, определим $R = \max\{r_i\colon x_i \in X'\}$ и получим верхнюю оценку длины $\mathrm{TSP}^*(X')$ оптимального маршрута коммивояжера в терминах расстояний от потребителей до складов, подобную оценке (1). Без ограничения общности полагаем $b \leq 1/2$.

Пусть $f\colon Z \to l_2^D$ — вложение пространства $(Z, \rho^{1/2})$ в конечномерное евклидово пространство, соответствующее конкретным значениям параметров $p = 2$, $\alpha = 1/2$, $\theta = 192/\log\log d$ и $k = d$, удовлетворяющее соотношению

$$\rho^{1/2}(z_1, z_2) \leq \|f(z_1) - f(z_2)\|_2 \leq L\,\rho^{1/2}(z_1, z_2). \tag{6}$$

Существование вложения f гарантируется леммой 1 для размерности $D = O(d\log\log d)$ и $L = \mathrm{poly}(d)$. По построению неравенство

$$\rho(z_1, z_2) \leq \rho^{1/2}(z_1, z_2) \leq 1 \tag{7}$$

верно для произвольной пары $\{z_1, z_2\}$ из подмножества $Z' = X' \cup \{y\}$.

Обозначим длину оптимальных маршрутов коммивояжера на множестве X' в исходной метрике ρ, метрике $\rho^{1/2}$ и на множестве $f(X') \subset l_2^D$ в метрике, порождаемой евклидовой нормой через $\mathrm{TSP}^*_{\rho}(X')$, $\mathrm{TSP}^*_{\rho^{1/2}}(X')$ и $\mathrm{TSP}^*_{l_2^D}(X')$ соответственно.

Лемма 6. *Справедлива следующая оценка*:

$$\mathrm{TSP}^*_{\rho}(X') \leq \mathrm{TSP}^*_{\rho^{1/2}}(X') \leq \mathrm{TSP}^*_{l_2^D}(X') \leq \frac{C_D L}{\sqrt{a}}\,R + \frac{C_D^* L}{\sqrt{a}}\,R^{1/D}\Big(\sum_{x_i\in X'} r_i\Big)^{1-1/D}.$$

Доказательство. Неравенства $\mathrm{TSP}^*_{\rho}(X') \leq \mathrm{TSP}^*_{\rho^{1/2}}(X') \leq \mathrm{TSP}^*_{l_2^D}(X')$ следуют непосредственно из соотношений (6) и (7). В самом деле, обоснуем, например, первое из них. Пусть T — оптимальный маршрут коммивояжера в метрике $\rho^{1/2}$. Неравенство (7) влечет соотношение $w_\rho(T) \leq w_{\rho^{1/2}}(T)$ для весов маршрута T в исходной метрике и метрике $\rho^{1/2}$ соответственно. Следовательно,

$$\mathrm{TSP}^*_{\rho}(X') \leq w_\rho(T) \leq w_{\rho^{1/2}}(T) = \mathrm{TSP}^*_{\rho^{1/2}}(X').$$

Далее, по лемме 5

$$\mathrm{TSP}^*_{l_2^D}(X') \leq C_D\,\tilde{R} + C_D^*\,\tilde{R}^{1/D}\Big(\sum_{x_i\in X'} \tilde{r}_i\Big)^{1-1/D}, \tag{8}$$

где $\tilde{r}_i = \|f(x_i) - f(y)\|_2$ и $\tilde{R} = \max\{\tilde{r}_i\colon x_i \in X'\}$. Поскольку рассматриваемая постановка обладает свойством 2, для каждого $x_i \in X'$ имеем $\sqrt{r_i} \leq r_i/\sqrt{a}$, и, следовательно, в силу (6) $\tilde{r}_i \leq L\sqrt{r_i} \leq L/\sqrt{a}\,r_i$. Применяя это соображение к соотношению (8) и учитывая доказанное выше, получаем искомую оценку.

Лемма доказана.

Далее оценим относительную погрешность $e(k)$ исследуемой схемы.

Лемма 7. *Для любого $k < n$ относительная погрешность $e(k)$ может быть оценена следующим образом*:

$$e(k) \le q\Big(2k + 1 + \frac{\beta C_D L}{2\sqrt{a}}\Big)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{q\beta C_D^* L}{2\sqrt{a}}\left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\right)^{1/D},$$

где β — точность решения вспомогательной задачи коммивояжера.

Доказательство. По определению для рассматриваемой схемы $e(k)$ имеет вид

$$e(k) = \frac{\mathrm{CVRP}^*(X_{out}) + \mathrm{ITP}(X_{in}) - \mathrm{CVRP}^*(X)}{\mathrm{CVRP}^*(X)}.$$

Добавим и вычтем в числителе величину $\mathrm{CVRP}^*(X_{in})$:

$$e(k) = \frac{\mathrm{CVRP}^*(X_{out}) + \mathrm{ITP}(X_{in}) - \mathrm{CVRP}^*(X) + \mathrm{CVRP}^*(X_{in}) - \mathrm{CVRP}^*(X_{in})}{\mathrm{CVRP}^*(X)}.$$

Воспользовавшись леммами 2–6, получаем цепочку неравенств

$$e(k) \le \frac{4(k-1)r_k + \dfrac{2}{q}\sum\limits_{i=k}^{n} r_i + \beta\mathrm{TSP}^*(X_{in}) + 2r_k - \dfrac{2}{q}\sum\limits_{i=k}^{n} r_i}{\dfrac{2}{q}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}$$

$$\le \frac{4kr_k + \beta\Big(\frac{C_D L r_k}{\sqrt{a}} + \frac{C_D^* L r_k^{1/D}}{\sqrt{a}}\Big(\sum\limits_{i=k}^{n} r_i\Big)^{1-1/D}\Big) + 2r_k}{\dfrac{2}{q}\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}$$

$$\le q\Big(2k + 1 + \frac{\beta C_D L}{2\sqrt{a}}\Big)\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{q\beta C_D^* L}{2\sqrt{a}}\left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\right)^{1/D}.$$

Лемма доказана.

Доказательство существования для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ номера $k = k(\varepsilon)$, обеспечивающего верхнюю оценку относительно погрешности $e(k) < \varepsilon$, основано на следующей технической лемме.

Лемма 8. *Пусть для некоторых чисел $A, B, C > 0$ и $D > 1$ система*

$$s_k^D + \frac{2B}{2k+A}s_k - \frac{C}{2k+A} \ge 0 \qquad (1 \le k \le \tilde{k}) \tag{9}$$

обладает решением $s_1, s_2, \ldots, s_{\tilde{k}}$, для которого $\sum\limits_{k=1}^{\tilde{k}} s_k^D \le 1$. Тогда

$$\tilde{k} \le \left(\Big(\frac{C}{4B}\Big)^{-D} + A + 1\right)\exp\Big(\frac{2}{C}\Big).$$

Доказательство. В самом деле, зададимся произвольным решением $s_1, s_2, \ldots, s_{\tilde{k}}$ системы (9), удовлетворяющим соотношению $\sum\limits_{k=1}^{\tilde{k}} s_k^D \le 1$. Для произвольного $1 \le k \le \tilde{k}$ возможен один из двух вариантов

$$s_k^D \le \frac{C/2}{2k+A} \quad \text{и} \quad s_k^D > \frac{C/2}{2k+A}.$$

Пусть $K \subset \{1, \dots, \tilde{k}\}$ — подмножество номеров неравенств, для которых справедлива первая альтернатива. Для каждого $k \in K$ из соответствующего неравенства системы (9) имеем

$$\frac{2B}{2k+A} s_k \geq \frac{C/2}{2k+A},$$

т. е. $s_k^D \geq \dfrac{C}{4B}$. Таким образом,

$$1 \geq \sum_{k=1}^{\tilde{k}} s_k^D = \sum_{k \in K} s_k^D + \sum_{k \notin K} s_k^D \geq \Big(\frac{C}{4B}\Big)^D |K| + \frac{C}{2} \sum_{k \notin K} \frac{1}{2k+A} \geq \Big(\frac{C}{4B}\Big)^D |K| + \frac{C}{2} \sum_{k=|K|+1}^{\tilde{k}} \frac{1}{2k+A},$$

где справедливость последнего неравенства следует из монотонности функции $1/(2k+A)$. Поскольку для произвольного $|K| < \tilde{k}$

$$\Big(\frac{C}{4B}\Big)^D |K| + \int\limits_{|K|+1}^{\tilde{k}} \frac{C dx}{2(x+A)} = \Big(\frac{C}{4B}\Big)^D |K| + \frac{C}{2} \ln\Big(\frac{\tilde{k}+A}{|K|+1+A}\Big),$$

то

$$1 \geq \max\Big\{\frac{C}{2} \ln\Big(\frac{\tilde{k}+A}{|K|+1+A}\Big), \Big(\frac{C}{4B}\Big)^D |K|\Big\},$$

откуда

$$\tilde{k} \leq (|K|+1+A) \exp\Big(\frac{2}{C}\Big) = \Big(\Big(\frac{C}{4B}\Big)^{-D} + A + 1\Big) \exp\Big(\frac{2}{C}\Big).$$

Лемма доказана.

Следующая лемма, устанавливающая точность алгоритма Хаймовича — Ринноя Кана, является непосредственным следствием леммы 8.

Лемма 9. *Для произвольных значений параметров $\varepsilon > 0$, $\beta \geq 1$, $D > 2$, $q > 1$ существует значение*

$$\tilde{k} = \tilde{k}(\varepsilon, q, \beta, D, a) = O\Big(\Big(\frac{q}{\varepsilon}\Big)^D \Big(\frac{4\sqrt{2}\beta D^{(1+3/D)/2} L}{\sqrt{a}}\Big)^D + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}\Big) \Big(\exp\Big(\frac{q}{\varepsilon}\Big)\Big)^2$$

такое, что условие

$$e(k) \leq q\Big(2k + 1 + \frac{\beta C_D L}{2\sqrt{a}}\Big) \frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i} + \frac{q\beta C_D^* L}{2\sqrt{a}} \left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\right)^{1/D} < \varepsilon$$

выполнено по крайней мере для одного значения k из интервала $1 \leq k \leq \tilde{k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, достаточно положить

$$s_k = \left(\frac{r_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} r_i}\right)^{1/D}, \qquad A = 1 + \frac{\beta D^2 2^D L}{2\sqrt{a}}, \qquad B = \frac{\beta\sqrt{2} D^{(1+3/D)/2} L}{\sqrt{a}}, \qquad C = \frac{\varepsilon}{q},$$

после чего применить утверждение леммы 8.

Лемма доказана.

Для завершения д о к а з а т е л ь с т в а теоремы оценим трудоемкость схемы Хаймовича — Ринноя Кана. В самом деле, трудоемкость поиска оптимального решения “внешней” подзадачи для подмножества потребителей X_{out} посредством схемы динамического программирования Хорна [13] не превосходит $O(q\tilde{k}^3 2^{\tilde{k}})$, где верхняя оценка $\tilde{k}$ приведена в лемме 9. Трудоемкость приближенного решения “внутренней” подзадачи определяется трудоемкостью $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n)$ β-приближенного алгоритма для вспомогательной метрической задачи коммивояжера[3]. Учитывая известную верхнюю оценку $O(n^2)$ времени работы алгоритма ITP, получаем суммарную общую оценку

$$O(q\tilde{k}^3 2^{\tilde{k}}) + \mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n) + O(n^2)$$

трудоемкости исследуемой схемы, чем завершаем доказательство теоремы.

Следствие. *Алгоритм Хаймовича — Ринноя Кана в классе метрических постановок* CVRP, *обладающих свойствами* 1 *и* 2, *реализует полиномиально приближенную схему* (PTAS) *при* $q = o(\log\log n)$ *и эффективную полиномиально приближенную схему* (EPTAS) *для произвольного фиксированного значения* q.

5. Заключение

В данной работе впервые показано, что семейство постановок задачи CVRP, аппроксимируемых за полиномиальное время с любой заданной точностью, не ограничено постановками, заданными в конечномерных числовых пространствах. В частности, доказано, что классический алгоритм М. Хаймовича и А. Ринноя Кана сохраняет аппроксимационные свойства, обоснованные ранее для конечномерных евклидовых пространств, в пространствах существенно более общей природы — метрических пространствах с фиксированной размерностью удвоения. Как следует из результатов статьи, данный алгоритм реализует полиномиальную приближенную схему (PTAS) при условии отделимости потребителей от склада и ограничении на грузоподъемность $q = o(\log\log n)$ и является эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS) при произвольном фиксированном q. Отметим, что процедура поиска $(1+\varepsilon)$-приближенного решения задачи CVRP реализуется исследуемым в работе алгоритмом непосредственно в исходном метрическом пространстве. Техника билипшицевого вложения метрического пространства в пространство l_2^D подходящей размерности используется в доказательстве теоремы исключительно при обосновании точности приближения. Из вопросов, оставшихся на данный момент открытыми, отметим возможность распространения результата А. Дас и К. Матье [10] об аппроксимируемости CVRP без ограничения роста грузоподъемности в классе квазиполиномиальных приближенных схем (QPTAS) на семейство метрических постановок в пространствах ограниченной размерности удвоения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Abraham I., Bartal Y., Neiman O.** Advances in metric embedding theory // Advances in Mathematics. 2011. Vol. 228, no. 6. P. 3026–3126. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.08.003
2. **Adamaszek A., Czumaj A., Lingas A.** PTAS for k-tour cover problem on the plane for moderately large values of k // Inter. J. of Foundations of Computer Science. 2010. Vol. 21, no. 06. P. 893–904. https://doi.org/10.1142/S0129054110007623
3. **Arnold F., Sörensen K.** Knowledge-guided local search for the vehicle routing problem // Comput. Oper. Res. 2019. Vol. 105. P. 32–46. https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.01.002
4. **Arora S.** Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems // J. ACM. 1998. Vol. 45. P. 753–782.

[3]Например, для алгоритма Кристофидеса — Сердюкова $\beta = 3/2$ и $\mathrm{TIME}(\mathrm{TSP}, \beta, n) = O(n^3)$.

5. **Asano T., Katoh N., Tamaki H., Tokuyama T.** Covering points in the plane by k-tours: Towards a polynomial time approximation scheme for general k // Proceedings of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC '97). N Y: ACM, 1997. P. 275–283. https://doi.org/10.1145/258533.258602
6. **Assouad P.** Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$ // Bulletin de la Société Mathématique de France. 1983. Vol. 111. P. 429–448. http://eudml.org/doc/87452
7. **Bartal Y., Gottlieb L. A., Krauthgamer R.** The traveling salesman problem: Low-dimensionality implies a polynomial time approximation scheme // SIAM J. Computing. 2016. Vol. 45, no. 4. P. 1563–1581. https://doi.org/10.1137/130913328
8. **Becker A., Klein P. N., Schild A.** A PTAS for bounded-capacity vehicle routing in planar graphs // Algorithms and Data Structures / eds. Z. Friggstad., J.-R. Sack, M. Salavatipour. Cham: Springer, 2019. P. 99–111. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11646).
9. **Dantzig G. B., Ramser J. H.** The truck dispatching problem // Management science. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 80–91.
10. **Das A., Mathieu C.** A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing // Algorithmica. 2015. Vol. 73. P. 115–142. https://doi.org/10.1007/s00453-014-9906-4
11. **Demir E., Huckle K., Syntetos A., Lahy A., Wilson M.** Vehicle routing problem: Past and future // Contemporary Operations and Logistics / ed. P. Wells Cham: Springer, 2019. P. 97–117. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14493-7_7
12. **Haimovich M., Rinnooy Kan A. H. G.** Bounds and heuristics for capacitated routing problems // Math. Oper. Res. 1985. Vol. 10, no. 4. P. 527–542. https://doi.org/10.1287/moor.10.4.527
13. **van Hoorn J. J.** Dynamic programming for routing and scheduling: Optimizing sequences of decisions. Ph. D. thesis, 2016. 210 p. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14344.88329
14. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Efficient PTAS for the Euclidean CVRP with time windows // Analysis of Images, Social Networks and Texts (AIST 2018) / ed. van der W. Aalst. Cham: Springer, 2018. P. 318–328. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11179). https://doi.org/10.1007/978-3-030-11027-7_30
15. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Approximation scheme for the capacitated vehicle routing problem with time windows and non-uniform demand // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019) / eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. Cham: Springer, 2019. P. 309–327. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_22
16. **Khachay M., Ogorodnikov Y.** Improved polynomial time approximation scheme for capacitated vehicle routing problem with time windows // Optimization and Applications (OPTIMA 2018) / Y. Evtushenko, M. Jaćimović, M. Khachay, Y. Kochetov, V. Malkova, M. Posypkin. Cham: Springer, 2019. P. 155–169. (Communications in Computer and Information Science; vol. 974). https://doi.org/10.1007/978-3-030-10934-9_12
17. **Khachay M., Dubinin R.** PTAS for the Euclidean capacitated vehicle routing problem in R^d // Discrete Optimization and Operations Research / eds. Y. Kochetov, M. Khachay, V. Beresnev, E. Nurminski, P. Pardalos. Cham: Springer, 2016. P. 193–205. (Lecture Notes in Computer Science,;vol. 9869). https://doi.org/10.1007/978-3-319-44914-2_16
18. **Khachay M., Zaytseva H.** Polynomial time approximation scheme for single-depot Euclidean capacitated vehicle routing problem // Combinatorial Optimization and Applications / eds. Z. Lu, D. Kim, W. Wu, W. Li, D.Z Du. Cham: Springer, 2015. P. 178–190. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 9486). https://doi.org/10.1007/978-3-319-26626-8_14
19. **Nalepa J., Blocho M.** Adaptive memetic algorithm for minimizing distance in the vehicle routing problem with time windows // Soft Computing. 2016. Vol. 20, no. 6. P. 2309–2327. https://doi.org/10.1007/s00500-015-1642-4
20. **Necula R., Breaban M., Raschip M.** Tackling dynamic vehicle routing problem with time windows by means of ant colony system // IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), 2017. P. 2480–2487. https://doi.org/10.1109/CEC.2017.7969606
21. **Papadimitriou C.** Euclidean TSP is NP-complete // Theoret. Comput. Sci. 1977. Vol. 4. P. 237–244.
22. **Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E.** Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing // Mathematical Programming Computation. 2017. Vol. 9, no. 1. P. 61–100. https://doi.org/10.1007/s12532-016-0108-8
23. **Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E.** Enhanced branch-cut-and-price algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems // European J. Oper. Res. 2018. Vol. 270, no. 2. P. 530–543. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.04.009

24. **Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E., Vanderbeck F.** A generic exact solver for vehicle routing and related problems // Integer Programming and Combinatorial Optimization: Proc. 20th Inter. Conf. / eds. A. Lodi, V. Nagarajan. Cham: Springer, 2019, pp. 354–369. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11480). https://doi.org/10.1007/978-3-030-17953-3_27
25. **Polat O.** A parallel variable neighborhood search for the vehicle routing problem with divisible deliveries and pickups // Comput. Oper. Res. 2017. Vol. 85. P. 71–86. https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.03.009
26. **Qiu M., Fu Z., Eglese R., Tang Q.** A tabu search algorithm for the vehicle routing problem with discrete split deliveries and pickups // Comput. Oper. Res. 2018. Vol. 100. P. 102–116. https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.07.021
27. **Toth P., Vigo D.** Vehicle routing: Problems, methods and applications. Second Edition. MOS-Siam Series on Optimization, SIAM, 2 edn. 2014. 481 p.
28. **Vidal T., Crainic T. G., Gendreau M., Prins C.** A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows // Comput. Oper. Res. 2013. Vol. 40, no. 1. P. 475–489. https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.07.018

Поступила 30.08.2019
После доработки 30.09.2019
Принята к публикации 7.10.2019

Хачай Михаил Юрьевич
д-р физ.-мат. наук
профессор РАН
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
г. Екатеринбург
Омский государственный технический университет
г. Омск
e-mail: mkhachay@imm.uran.ru

Огородников Юрий Юрьевич
науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет им. Б. Н. Ельцина
г. Екатеринбург
e-mail: yogorodnikov@gmail.com

REFERENCES

1. Abraham I., Bartal Y., Neiman O. Advances in metric embedding theory. *Advances in Mathematics*, 2011, vol. 228, no. 6, pp. 3026–3126. https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.08.003
2. Adamaszek A., Czumaj A., Lingas A. PTAS for k-tour cover problem on the plane for moderately large values of k. *Inter. J. Foundations of Computer Science*, 2010, vol. 21, no. 06, pp. 893–904. https://doi.org/10.1142/S0129054110007623
3. Arnold F., Sörensen K. Knowledge-guided local search for the vehicle routing problem. *Comput. Oper. Res.*, 2019, vol. 105, pp. 32–46. https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.01.002
4. Arora S. Polynomial time approximation schemes for Euclidean traveling salesman and other geometric problems. *J. ACM*, 1998, vol. 45, pp. 753–782.
5. Asano T., Katoh N., Tamaki H., Tokuyama T. Covering points in the plane by k-tours: Towards a polynomial time approximation scheme for general k. In: *Proc. of the Twenty-ninth Annual ACM Symposium on Theory of Computing* (STOC '97), N Y, USA: ACM, 1997. P. 275–283. https://doi.org/10.1145/258533.258602
6. Assouad P. Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1983, vol. 111, pp. 429–448. http://eudml.org/doc/87452
7. Bartal Y., Gottlieb L. A., Krauthgamer R. The traveling salesman problem: Low-dimensionality implies a polynomial time approximation scheme. *SIAM J. on Computing*, 2016, vol. 45, no. 4, pp. 1563–1581. https://doi.org/10.1137/130913328

8. Becker A., Klein P. N., Schild A. A PTAS for bounded-capacity vehicle routing in planar graphs. In: Friggstad Z., Sack J.-R., Salavatipour M. (eds), *Algorithms and Data Structures*, 2019, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11646, Cham: Springer, pp. 99–111.
9. Dantzig G. B., Ramser J. H. The truck dispatching problem. *Management science*, 1959, vol. 6, no. 1, pp. 80–91.
10. Das A., Mathieu C. A quasipolynomial time approximation scheme for Euclidean capacitated vehicle routing. *Algorithmica*, 2015, vol. 73, pp. 115–142. https://doi.org/10.1007/s00453-014-9906-4
11. Demir E., Huckle K., Syntetos A., Lahy A., Wilson M. Vehicle routing problem: Past and future. In: Wells P. (ed.), *Contemporary Operations and Logistics*, Cham: Springer, 2019, pp. 97–117. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14493-7_7
12. Haimovich M., Rinnooy Kan A. H. G. Bounds and heuristics for capacitated routing problems. *Math. Oper. Res.* , 1985, vol. 10, no. 4, pp. 527–542. https://doi.org/10.1287/moor.10.4.527
13. van Hoorn J. J. Dynamic programming for routing and scheduling: Optimizing sequences of decisions. *Ph. D. thesis*, 2016, 210 p. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.14344.88329
14. Khachay M., Ogorodnikov Y. Efficient PTAS for the Euclidean CVRP with time windows. In: van der Aalst W. et al. (eds), *Analysis of Images, Social Networks and Texts* (AIST 2018), Lecture Notes in Computer Science, vol. 11179, Cham: Springer, 2018, pp. 318–328. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11027-7_30
15. Khachay M., Ogorodnikov Y. Approximation scheme for the capacitated vehicle routing problem with time windows and non-uniform demand. In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds), *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (MOTOR 2019), Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, Cham: Springer, 2019, pp. 309–327. https://doi.org/10.1007/978-3-030-22629-9_22
16. Khachay M., Ogorodnikov Y. Improved polynomial time approximation scheme for capacitated vehicle routing problem with time windows. In: Evtushenko Y., Jaćimović M., Khachay M., Kochetov Y., Malkova V., Posypkin M. (eds), *Optimization and Applications* (OPTIMA 2018), Communications in Computer and Information Science, vol. 974, Cham: Springer, 2019, pp. 155–169. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10934-9_12
17. Khachay M., Dubinin R. PTAS for the Euclidean capacitated vehicle routing problem in R^d. In: Kochetov Y., Khachay M., Beresnev V., Nurminski E., Pardalos P. (eds), *Discrete Optimization and Operations Research*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 9869, Cham: Springer, 2016, pp. 193–205. https://doi.org/10.1007/978-3-319-44914-2_16
18. Khachay M., Zaytseva H. Polynomial time approximation scheme for single-depot Euclidean capacitated vehicle routing problem. In: Lu Z., Kim D., Wu W., Li W., Du D.Z. (eds), *Combinatorial Optimization and Applications*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 9486, Cham: Springer, 2015, pp. 178–190. https://doi.org/10.1007/978-3-319-26626-8_14
19. Nalepa J., Blocho M. Adaptive memetic algorithm for minimizing distance in the vehicle routing problem with time windows. *Soft Computing*, 2016, vol. 20, no. 6, pp. 2309–2327. https://doi.org/10.1007/s00500-015-1642-4
20. Necula R., Breaban M., Raschip M. Tackling dynamic vehicle routing problem with time windows by means of ant colony system. *IEEE Congress on Evolutionary Computation* (CEC), 2017, pp. 2480–2487. https://doi.org/10.1109/CEC.2017.7969606
21. Papadimitriou C. Euclidean TSP is NP-complete *Theoret. Comput. Sci.*, 1977, vol. 4, pp. 237–244.
22. Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Uchoa E. Improved branch-cut-and-price for capacitated vehicle routing. *Math. Programming Computation*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 61–100. https://doi.org/10.1007/s12532-016-0108-8
23. Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E. Enhanced branch-cut-and-price algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems. *European J. Oper. Res.,* 2018, vol. 270, no. 2, pp. 530–543. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.04.009
24. Pessoa A. A., Sadykov R., Uchoa E., Vanderbeck F. A generic exact solver for vehicle routing and related problems. In: Lodi A., Nagarajan V. (eds), *Proc. 20th Inter. Conf. “Integer Programming and Combinatorial Optimization”* (IPCO), Lecture Notes in Computer Science, vol. 11480, Cham: Springer, 2019, pp. 354–369. https://doi.org/10.1007/978-3-030-17953-3_27
25. Polat O. A parallel variable neighborhood search for the vehicle routing problem with divisible deliveries and pickups. *Comput. Oper. Res.*, 2017, vol. 85, pp. 71–86. https://doi.org/10.1016/j.cor.2017.03.009
26. Qiu M., Fu Z., Eglese R., Tang Q. A tabu search algorithm for the vehicle routing problem with discrete split deliveries and pickups. *Comput. Oper. Res.*, 2018, vol. 100, pp. 102–116. https://doi.org/10.1016/j.cor.2018.07.021

27. Toth P., Vigo D. *Vehicle routing: Problems, methods and applications.* Philadelphia: SIAM, 2014, 481 p.
28. Vidal T., Crainic T. G., Gendreau M., Prins C. A hybrid genetic algorithm with adaptive diversity management for a large class of vehicle routing problems with time-windows. *Comput. Oper. Res.*, 2013, vol. 40, no. 1, pp. 475–489. https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.07.018

Received August 30, 2019
Revised September 30, 2019
Accepted October 7, 2019

Funding Agency: This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 19-07-01243 and 17-08-01385).

Mikhail Yur'evich Khachai, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia; Omsk State Technical University, Omsk, 644050 Russia, e-mail: mkhachay@imm.uran.ru .

Yurii Yur'evich Ogorodnikov, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, Ural Federal University, Yekaterinburg, 6200083 Russia, e-mail: yogorodnikov@gmail.com .

Cite this article as: M. Yu. Khachai, Yu. Yu. Ogorodnikov. Haimovich–Rinnooy Kan polynomial-time approximation scheme for the CVRP in metric spaces of a fixed doubling dimension, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 235–248 .