ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 512.54

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ С РЕГУЛЯРНЫМ АВТОМОРФИЗМОМ ПОРЯДКА ЧЕТЫРЕ[1]

А. И. Созутов

Изучаются периодические группы вида $G = F \leftthreetimes \langle a \rangle$ с условиями $C_F(a) = 1$ и $|a| = 4$. Отображение $a : F \to F$ по правилу $t \to t^a = a^{-1}ta$ есть автоморфизм группы F без неподвижных точек (регулярный автоморфизм). Конечная группа F разрешима, и ее коммутант нильпотентен (Д. Горенстейн и И. Херстейн, 1961). Локально конечная группа F разрешима, и ее второй коммутант содержится в центре $Z(F)$ группы F(Л. Г. Ковач, 1961). Неизвестно, всегда ли локально конечна периодическая группа F (вопрос 12.100 П. В. Шумяцкого из “Коуровской тетради”). В работе доказаны следующие свойства групп. Для $\pi = \pi(F) \setminus \pi(C_F(a^2))$ группа F π'-замкнута, подгруппа $O_{\pi'}(F)$ абелева и содержится в $Z([a^2, F])$ (теорема 1). Группа F, не имеющая бесконечных элементарных абелевых a^2-допустимых подгрупп, локально конечна (теорема 2). В не локально конечной группе F есть не локально конечная a-допустимая подгруппа, факторизуемая двумя локально конечными a-допустимыми подгруппами (теорема 3). Для любого натурального числа n, кратного нечетному простому числу, указаны примеры не локально конечных периодических групп с регулярным автоморфизмом порядка n.

Ключевые слова: периодические группы, регулярный автоморфизм (автоморфизм без неподвижных точек), разрешимость, локальная конечность, нильпотентность.

A. I. Sozutov. On periodic groups with a regular automorphism of order 4.

We study periodic groups of the form $G = F \leftthreetimes \langle a \rangle$ with the conditions $C_F(a) = 1$ and $|a| = 4$. In this case, a finite group F is solvable and its commutator subgroup is nilpotent (Gorenstein and Herstein, 1961), and a locally finite group F is solvable and its second commutator subgroup is contained in the center $Z(F)$ (Kovach, 1961). A locally finite group F is solvable and its second commutator subgroup is contained in the center $Z(F)$ (Kovach, 1961). It is unknown whether a periodic group F is always locally finite (Shumyatskii's Question 12.100 from the Kourovka Notebook). We establish the following properties of groups. For $\pi = \pi(F) \setminus \pi(C_F(a^2))$, the group F is π-closed and the subgroup $O_\pi(F)$ is abelian and is contained in $Z([a^2, F])$ (Theorem 1). A group F without infinite elementary abelian a^2-admissible subgroups is locally finite (Theorem 2). In a nonlocally finite group F, there is a nonlocally finite a-admissible subgroup factorizable by two locally finite a-admissible subgroups (Theorem 3). For any positive integer n divisible by an odd prime, we give examples of nonlocally finite periodic groups with a regular automorphism of order n.

Keywords: periodic group, regular automorphism (fixed-point-free automorphism), solvability, local finiteness, nilpotency.

MSC: 20F50

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-201-209

Введение

В работе изучаются свойства периодических групп, допускающих регулярный автоморфизм (автоморфизм без неподвижных точек [1]) порядка 4. В 1961 г. Д. Горенстейн и И. Херстейн доказали [2], что конечная группа с регулярным автоморфизмом порядка 4 разрешима, а ее коммутант нильпотентен. В том же году Л. Г. Ковач [3] установил, что второй коммутант локально конечной группы, допускающей регулярный автоморфизм порядка 4, содержится в ее центре. Давно известно, что периодическая группа F с регулярным автоморфизмом порядка 2 абелева [4–6], а с регулярным расщепляющим автоморфизмом порядка 3 нильпотентна [7–9]. Но если порядок регулярного автоморфизма не является степенью числа 2, то F не обязана быть локально конечной (см. предложение 6 и пример 1) даже в случаях порядка 3 и 6.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №19-01-00566 А.

В 1992 г. П. В. Шумяцкий записал в “Коуровскую тетрадь” [10] под номером 12.100 такой вопрос: *всякая ли периодическая группа с регулярным автоморфизмом порядка 4 является локально конечной?* Изучаемые в работе группы удовлетворяют условиям этого вопроса.

Итак, пусть F — бесконечная периодическая группа, допускающая регулярный автоморфизм a порядка 4, $C = C_F(a^2)$, $\pi = \pi(C)$ — множество простых делителей порядков элементов из C и $\pi' = \pi(F) \setminus \pi$. Доказаны следующие свойства группы F.

Теорема 1. *Группа F π'-замкнута, и подгруппа $O_{\pi'}(F)$ содержится в $Z([a^2, F])$.*

Теорема 2. *Группа F с конечными a^2-допустимыми элементарными абелевыми подгруппами локально конечна.*

Из теорем 1, 2 и результатов работ [2; 3] (см. предложения 2, 3 ниже) вытекает

Следствие. *Группа F без бесконечных a^2-допустимых элементарных абелевых p-подгрупп для всех $p \in \pi(C)$ локально конечна, и ее второй коммутант содержится в $Z(F)$.*

Теорема 3. *В не локально конечной группе F есть не локально конечная a-допустимая подгруппа, факторизуемая двумя локально конечными a-допустимыми подгруппами.*

1. Определения, используемые результаты, примеры

Пусть F — группа и a — автоморфизм группы F. Образ элемента $f \in F$ под действием автоморфизма a обозначаем через f^a. Автоморфизм a называется *регулярным*, или *автоморфизмом без неподвижных точек*, если $f^a \neq f$ для любого $f \in F \setminus \{1\} = F^{\#}$; автоморфизм a называется *расщепляющим*, если $ff^a \dots f^{a^{|a|-1}} = 1$. Инволюцию i группы G называем *изолированной в G*, если для любого элемента $g \in G$ порядок произведения ii^g нечетен. Собственная подгруппа H группы G называется *сильно вложенной в G*, если в H есть инволюция и для каждого элемента $g \in G \setminus H$ в подгруппе $H \cap H^g$ инволюций нет. Множество простых делителей порядков элементов непустого множества $X \subseteq G^{\#}$ обозначаем через $\pi(X)$, а в случае $X = \{b\}$ — через $\pi(b)$. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Элемент b группы F называется *π-элементом*, когда $\pi(b) \subseteq \pi$. Следуя Б. Фишеру [11; 12], группу F называем *π-замкнутой*, если произведение любых двух π-элементов в F есть π-элемент, т. е. максимальная нормальная в F π-подгруппа $O_\pi(F)$ состоит из всех π-элементов группы F. На протяжении всей работы p и q — простые нечетные числа, m и n — натуральные числа. Далее, $y^X = \{x^{-1}yx \mid x \in X\}$, $[y, x] = y^{-1}x^{-1}yx$ — коммутатор элементов y и x, $[y, X]$ — подгруппа, порожденная всеми коммутаторами $[y, x]$. Инволюция i бесконечной группы G называется *почти регулярной*, если ее централизатор $C_G(i)$ конечен [13]. Остальные определения и обозначения можно найти в [1; 14].

Предложение 1 [4–6; 15, лемма 2.20]. *Периодическая группа F, допускающая регулярный автоморфизм i порядка 2, абелева, и $f^i = f^{-1}$ для любого $f \in F$.*

Д. Горенстейн и И. Херстейн в [2] доказали фундаментальный для наших исследований результат.

Предложение 2 [2, теоремы 1 и 2]. *Конечная группа F, допускающая автоморфизм порядка 4, оставляющий на месте только единичный элемент из F, разрешима, а ее коммутант F' нильпотентен.*

Из предложения 2 и работы Л. Г. Ковача (см. [3, введение]) вытекает следующий результат:

Предложение 3. *Если локально конечная группа допускает регулярный автоморфизм порядка четыре, то ее второй коммутант содержится в ее центре.*

Предложение 4 (теорема Шункова, [13]). *Периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально конечна, почти разрешима и обладает 2-полной частью.*

Предложение 5 [16; 15, теорема 2.14]. *Если в периодической группе G есть конечная силовская 2-подгруппа, то все силовские 2-подгруппы в G конечны и сопряжены.*

Покажем существенность условия $|a| = 4$ в вопросе 12.100 из [10] и теоремах 1, 2.

Предложение 6. *Периодическая группа F с регулярным автоморфизмом a порядка $|a| \neq 2^k$ и циклическими абелевыми подгруппами не обязана быть локально конечной.*

В качестве доказательства данного предложения укажем в голоморфах групп Новикова — Адяна $B = B(2, n) = \langle b, d\rangle$ [17] элементы a соответствующих порядков, действующие сопряжением на подгруппе $F = \langle d^B\rangle$ регулярно (без неподвижных точек).

П р и м е р 1. Если $|a| = m$ — нечетное число, то выберем $n = mk \geq 665$ и $a \in \langle b\rangle$. В силу известных свойств групп $B(2, n)$ [12] отображение $f \to f^a = a^{-1}fa$ является регулярным автоморфизмом группы F. Отметим также, что при $m = n$ данный автоморфизм группы F является расщепляющим, а при $m = 3$ не является расщепляющим.

Если $|a| = 2^k m$, где m — нечетное число и $m > 1$, то выберем $n = mp$, где p — простое число вида $1 + r2^k$. Элемент a ищем в виде $a = a_1a_2$, где a_1 — элемент порядка m из подгруппы $\langle b\rangle$, а элемент a_2 — автоморфизм группы $B(2, n)$, централизующий подгруппу $\langle b\rangle$ и действующий на подгруппе $\langle d\rangle$ как автоморфизм порядка 2^k. Ввиду кратности $\varphi(n)$ числу 2^k (φ — функция Эйлера) и свободы группы $B(2, n)$ в многообразии групп периода n [18] такой автоморфизм a_2 существует. Элемент $a = a_1a_2$ из $\mathrm{Hol}(B(2, n))$ имеет нужный порядок $2^k m$ и содержится в нормализаторе подгруппы F. Поскольку все инволюции в группе $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ сопряжены и элемент a_1 действует на $C_F(a_2^{2^{k-1}})$ регулярно, то и a действует на F без неподвижных точек. Отметим здесь, что при $m = 3$ автоморфизм a группы F имеет порядок 6 и не является расщепляющим.

Заметим, что отображение $t : \ a \to b^{-1}, \ b \to a$ продолжается до автоморфизма порядка 4 группы $B(2, n)$, который ввиду теоремы 2 и предложения 4 не является регулярным. Приведем различные простейшие примеры разрешимых ступени 2 групп F.

П р и м е р 2. Пусть C и Q — абелевы группы без инволюций и кручения, $R = C \leftthreetimes \langle a\rangle$, где $|a| = 4$ и $c^a = c^{-1}$ для любого $c \in C$, и $X = Q \wr R = V \leftthreetimes R$ — прямое сплетение групп Q и R с базой сплетения V. Пусть собственная нормальная в X подгруппа N содержит $C_V(a^2)$, $G = X/C_V(a^2) = F \leftthreetimes \langle\overline{a}\rangle$, где $F = VC/N$ и $\overline{a} = aN$. Тогда элемент $\overline{a}$ имеет порядок 4 и действует сопряжением на F регулярно. Если C и Q — p-группы и C бесконечна, то группа F разрешима, локально нильпотентна, но не нильпотентна. Если C — квазициклическая p-группа, S — ее подгруппа порядка p, Q — p'-группа и $N = C_V(S)C_V(a^2)$, то F — группа Фробениуса с абелевым ядром V/N и дополнением CN/N; она метаабелева, но не локально нильпотентна.

Рассмотрим пример 3-ступенной разрешимой группы F минимального порядка.

П р и м е р 3. Пусть $P = \langle b, d\rangle$ — неабелева группа периода 7 и порядка 7^3 — свободная группа ранга 2 многообразия двуступенно нильпотентных групп периода 7 [18]. В силу относительной свободы группы P отображения $a : \ b \to d^{-1}, \ d \to b$ и $c : \ b \to b^2, \ d \to d^4$ продолжаются до автоморфизмов a и c группы P, при этом $|a| = 4$, $|c| = 3$ и $D = \langle a, c\rangle = \langle c\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$, $c^a = c^{-1}$. Подгруппа $F = P \leftthreetimes \langle c\rangle$ голоморфа $\mathrm{Hol}\,(P)$ 3-ступенно разрешима и $a : \ f \to f^a$ — регулярный автоморфизм группы F.

2. Предварительные леммы

Пусть F — периодическая группа, допускающая регулярный автоморфизм a порядка 4. В силу регулярности автоморфизмы a и a^2 группы F внешние, образуем группу $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$.

Положим $A = \langle a \rangle$, $i = a^2$, $C = C_F(i)$, $R = C_G(i)$, $\mathfrak{N} = \{b \in F \mid b^i = b^{-1}\}$ и через J обозначим множество инволюций группы G.

Утверждения лемм данного раздела доказывались и передоказывались многократно при различных дополнительных условиях. Автор считает безнадежным и нецелесообразным поиск первоисточников таких утверждений и ссылок на них с неизбежными пояснениями. Так, например, утверждения лемм 2, 3 в классе (локально) конечных групп верны при любом порядке автоморфизма a, а в классе периодических групп для выделенных в примере 1 порядков $|a| = 3$ и $|a| = 6$ эти утверждения, очевидно, неверны. Поэтому доказательства лемм 1–10 в данном разделе приведены полностью и в них не используются результаты из [2–9], так как они были доказаны при более сильных предположениях.

Лемма 1. *Подгруппа C абелева, $C = \{c \in F \,|\, c^a = c^{-1}\}$, $R = C \leftthreetimes A$, $R \cap J = \{i\}$, группа F не содержит инволюций, инволюция i изолирована в G, $J = i^F \subseteq iF$ и подгруппа $A = \langle a \rangle$ является силовской 2-подгруппой группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию отображение $\overline{a} : C \to C$ по правилу $c \to c^a$ является регулярным автоморфизмом порядка 2 группы C. По предложению 1 $c^a = c^{-1}$ для любого элемента $c \in C$ и C — абелева группа без инволюций. Отсюда следуют равенства $C = \{c \in F \mid c^a = c^{-1}\}$, $R = C \leftthreetimes A$ и $J \cap R = \{i\}$. Из свойств конечных групп диэдра выводим, что F не содержит инволюций, A — силовская 2-подгруппа группы G, $J = i^F \subseteq iF$ и порядок элемента ik нечетен для любой инволюции $k \in J$, т. е. инволюция i изолирована в G.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любого элемента $f \in F$ элемент af сопряжен в подгруппе $\langle a, f \rangle$ с элементом a, $a^G = aF$, автоморфизм $f \to f^a$ является расщепляющим автоморфизмом группы F и отображение $t \to [a, t]$ биективно на подгруппах F и $F \cap \langle a, f \rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in F$. Из леммы 1 и предложения 5 следует, что силовская 2-подгруппа S из циклической подгруппы $\langle af \rangle$ сопряжена в G с подгруппой A. Поскольку $C_F(a) = 1$, то $C_F(af) = 1$, $(af)^4 = 1$, $\langle af \rangle$ — силовская 2-подгруппа в G и $a^G = aF$. В частности, автоморфизм $f \to f^a$ является расщепляющим, поскольку равенство $(fa^{-1})^4 = 1$ равносильно равенству $ff^a \dots f^{a^3} = 1$. По предложению 5 подгруппы A и $\langle af \rangle$ сопряжены в $\langle a, f \rangle$. Следовательно, $af = a^t$ для подходящего элемента $t \in F \cap \langle a, f \rangle$, $f = [a, t]$ и отображение $t \to [a, t]$ биективно.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любой нормальной в G собственной в F подгруппы T элемент $\overline{a} = aT$ действует на фактор-группе $\overline{F} = F/T$ без неподвижных точек. Если $F \neq TC$, то $\overline{a}$ индуцирует на $\overline{F}$ регулярный расщепляющий автоморфизм порядка 4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in F$ и $(aT)^f = aT$, то для некоторого элемента $t \in T$ имеем $a^f = at$, и в силу леммы 2 $at = a^x$ для подходящего элемента $x \in T$. Отсюда $fx^{-1} \in C_F(a) = 1$ и $f = x \in T$. Это доказывает первое утверждение леммы. Если $x^{-1}ixT = iT$, то ввиду лемм 1 и 2 $i^x = i^t$ для подходящего $t \in T$, $xt^{-1} = c \in C$ и $xT = cT \in CT/T$, что доказывает второе утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 4. (1) *Имеют место включение $C \leq N_F(\mathfrak{N})$, равенство $\mathfrak{N} = iJ$ и разложения $G = RJ = R\mathfrak{N}$ и $F = C\mathfrak{N}$. $|Rx \cap J| = |Cy \cap \mathfrak{N}| = 1$ для любых элементов $x \in G$ и $y \in F$.*

(2) *Если $b, d, bd \in \mathfrak{N}$ или $b, d, b^d \in \mathfrak{N}$, то $bd = db$, так что для любого элемента $b \in \mathfrak{N}^\#$ выполняются равенства $b^{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{N} = \{b\}$, $b^F \cap \mathfrak{N} = b^C$.*

(3) *Если B — подгруппа в G и $B \subseteq \mathfrak{N}$, то B абелева и $N_F(B) = (C_G(B) \cap \mathfrak{N}) \leftthreetimes N_C(B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенства $iJ = \mathfrak{N}$ и $J = i\mathfrak{N}$ и включения $C \leq R \leq N_F(\mathfrak{N})$ вытекают из определений множеств J и $\mathfrak{N}$ и подгрупп C и R.

По лемме 1 $R \cap J = \{i\}$ и инволюция i изолирована в G, значит, для любого элемента $g \in G \setminus R$ инволюции i и i^g сопряжены в группе диэдра $D = \langle i, i^g \rangle$ при помощи инволюции t из $D: i = i^{gt}$. Отсюда $Rg = Rt$, $G = RJ = RJi = R\mathfrak{N}$ и $F = C\mathfrak{N}$. Если $j, k \in J$ и $Rj = Rk$, то $c = jk \in C$ и $c^{ik} = c^{-1}$, что невозможно ввиду нечетности $|jk|$.

Далее, из $b, d, bd \in \mathfrak{N}$ имеем $d^{-1}b^{-1} = (bd)^{-1} = (bd)^i = b^i d^i = b^{-1}d^{-1}$ и $bd = db$. Аналогично, из $b, d, b^d \in \mathfrak{N}$ получаем $b^{-1}d^{-1}b = (b^{-1}db)^i = bd^{-1}b^{-1}$, $b^2d^{-1} = d^{-1}b^2$, и поскольку $\langle b^2 \rangle = \langle b \rangle$ по лемме 1, то $bd = db$. Отсюда $b^{\mathfrak{N}} \cap \mathfrak{N} = \{b\}$, и ввиду разложения $F = \mathfrak{N}C$ имеем $b^F \cap \mathfrak{N} = b^C$. Наконец, из доказанного выше следует справедливость п. (3) леммы.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Подгруппа* $\langle \mathfrak{N} \rangle = [a^2, \mathfrak{N}]$ *нормальна в* G, $G = [a^2, \mathfrak{N}]C$, $F' \leq [a^2, \mathfrak{N}]$ *и* $G' = F$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $G' \leq F$, в силу леммы 1 имеем $[a, C] = C$ и $[a^2, \mathfrak{N}] = \langle \mathfrak{N} \rangle$, по лемме 4 справедливо равенство $F = C\mathfrak{N}$, и, значит, $G' = F$.

Пусть f_1, f_2 — произвольные элементы из F. По лемме 4 имеем $f_1 = b_1c_1$, $f_2 = b_2c_2$, где $c_1, c_2 \in C$, $b_1, b_2 \in \mathfrak{N}$. Применяя формулы (10.2.1.2), (10.2.1.3) из [19, с. 171] и равенство $[c_1, c_2] = 1$ (см. лемму 1), получаем

$$[f_1, f_2] = [b_1c_1, f_2] = [b_1, f_2]^{c_1}[c_1, f_2], \quad [b_1, f_2] = [b_1, c_2b_2] = [b_1, c_2][b_1, b_2]^{c_2},$$

$$[c_1, f_2] = [c_1, c_2b_2] = [c_1, b_2][c_1, c_2]^{b_2} = [c_1, b_2] \text{ и } [f_1, f_2] = [b_1, c_2]^{c_1}[b_1, b_2]^{c_2c_1}[c_1, b_2].$$

Поскольку $C \leq N_G(\mathfrak{N})$, то $C \leq N_G(\langle \mathfrak{N} \rangle)$ и коммутаторы $[b_1, c_2]^{c_1}$, $[b_1, b_2]^{c_2c_1}$, $[c_1, b_2]$ содержатся в $\langle \mathfrak{N} \rangle$. Следовательно, $[f_1, f_2] \in \langle \mathfrak{N} \rangle$, $F' \leq \langle \mathfrak{N} \rangle$ и $\langle \mathfrak{N} \rangle$ нормальна в G. Наконец, для произвольных элементов $c \in C$ и $b \in \mathfrak{N}$ коммутатор $[a^2, cb] = [a^2, b][a^2, c]^b = b^{-1}$, и, значит, выполняется равенство $\langle \mathfrak{N} \rangle = [a^2, F]$.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Для любых элементов* $b \in \mathfrak{N}^\#$ *и* $c \in C$ *подгруппа* $L = \langle ac, b \rangle$ *есть конечная группа Фробениуса с абелевым ядром* $F_b = \langle b, b^{ac} \rangle$ *и дополнением* $\langle ac \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 1 имеем $(ac)^2 = i$, $ac \in a^C$, $ac \in N_G(\mathfrak{N})$, $b^{(ac)^2} = b^i = b^{-1}$ и $b^{(ac)^3} = (b^{ac})^{-1}$. По лемме 2 $(b(ac)^{-1})^4 = 1$, значит, $bb^{ac}b^{(ac)^2}b^{(ac)^3} = bb^{ac} \cdot b^{-1}(b^{ac})^{-1} = 1$, $bb^{ac} = b^{ac}b$ и, следовательно, подгруппа $F_b = \langle b, b^{ac} \rangle$ абелева. Значит, каждый элемент $f \in F_b$ представим в виде $f = b^k d^m$, где $d = b^{ac} \in \mathfrak{N}$, $1 \leq k, m \leq |b|$ (в том числе и в случае $F_b = \langle b \rangle$) и $f^i = b^{-k}d^{-m} = f^{-1}$. Так как по лемме 1 в F_b нет инволюций, то $L = F_b \leftthreetimes \langle ac \rangle$ — конечная группа Фробениуса с ядром F_b и дополнением $\langle ac \rangle$.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Для любого элемента* $b \in \mathfrak{N}^\#$ *подгруппа* $T_b = T = \langle b^C, b^{aC} \rangle$ *нильпотентна класса* ≤ 2, iT' *инвертирует фактор-группу* T/T', $T \cap R \leq Z(T)$, $R \leq N_G(T)$, *и* T — *прямое произведение своих силовских* p*-подгрупп* T_d, *где* $\langle d \rangle$ — *силовская* p*-подгруппа в* $\langle b \rangle$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 6 имеем $bb^{ac} = b^{ac}b$ для любого $c \in C$. Отсюда $b^{aC} \subseteq C_G(b)$ и $b^{aC} \subseteq C_G(b^c)$ для каждого $c \in C$. Значит, подгруппы $K = \langle b^C \rangle$ и $K^a = \langle b^{Ca} \rangle = \langle b^{aC} \rangle$ поэлементно перестановочны, в частности $Z = K \cap K^a \leq Z(T)$.

Понятно, что $K^i = K$, $(K^a)^i = K^a$, и если подгруппа K абелева, например, в случае $K = K^a$, то T — абелева группа, инвертируемая инволюцией i. Если K неабелева, то $K \neq K^a$, $(K^a)^a = K$, $a \in N_G(Z)$, и по лемме 3 $\overline{a} = aZ$ индуцирует регулярный автоморфизм порядка 4 на фактор-группе $\overline{T} = T/Z$. Имеем $\overline{T} = \overline{K} \times \overline{K}^{\overline{a}}$, и ввиду леммы 1 $C_{\overline{K}}(\overline{i}) = \overline{1}$. Так как $\overline{K}^{\overline{i}} = \overline{K}$, то $\overline{i} = iZ$ инвертирует подгруппы $\overline{K}$, $\overline{K}^{\overline{a}}$, по предложению 1 фактор-группа $\overline{T}$ абелева, и, значит, T нильпотентна класса ≤ 2. Отсюда выводим, что $\pi(T) = \pi(b)$, i инвертирует фактор-группы T/T' и T/Z и $T \cap C = Z \cap C$. Ввиду леммы 1 и доказанного выше $R \leq N_G(Z)$ и $R \leq N_G(T) \cap N_G(C \cap T)$.

Ввиду нильпотентности подгруппы T_b и ее порождаемости множеством $T_b \cap b^G$ она разлагается в прямое произведение подгрупп T_d.

Лемма доказана.

Согласно лемме 7 множества T_bC и $H_b = T_bCA$ являются подгруппами в G, ряд

$$1 \leq (C \cap T_b) \leq Z(T_b) \leq T_b \leq T_bC \leq H_b \tag{2.1}$$

состоит из нормальных в H_b подгрупп, и все его факторы абелевы. При этом, если группа T_b абелева, то $H_b = T_b \leftthreetimes R$, а если группа T_b неабелева, то $(C \cap T_b) \leq Z(T_bC)$, фактор-группа $\overline{T}_b = T_b/(C \cap T_b)$ абелева и $\overline{H}_b = H_b/(C \cap T_b) = \overline{T}_b \leftthreetimes \overline{R}$, где $\overline{R} = R(C \cap T_b)/(C \cap T_b)$.

Лемма 8. *Для любого элемента $b \in \mathfrak{N}^\#$ подгруппа H_b разрешима, локально конечна, сильно вложена в G (если $H_b \neq G$), и ее второй коммутант нильпотентен класса ≤ 2.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость группы H_b следует из существования ряда (2.1), а локальная конечность — из теоремы Шмидта [20, теорема 23.1.1]. Ввиду лемм 1 и 7 $H_b' = T_bC = F \cap H_b$, а второй коммутант совпадает с $T_b = \langle b^C, b^{aC} \rangle$, который нильпотентен класса ≤ 2 по лемме 7. Если $G \neq H_b$, то из $R = C_G(i) \leq H_b$ и равенства $J \cap H_b = i^{H_b}$ (см. леммы 1, 4) следует сильная вложенность подгруппы H_b в G.

Лемма доказана.

Для уточнения строения подгрупп $L_g = \langle a, a^g \rangle$ $(g \in F \setminus C)$ введем обозначения

$$L_g = \langle a, a^g \rangle, \quad g = cb \in F \setminus C = C\mathfrak{N}^\#, \quad c \in C, \quad b \in \mathfrak{N}^\#,$$

$$F_g = F \cap L_g, \quad C_g = C \cap F_g, \quad Q_g = L_g \cap T_b, \quad Z_g = Q_g \cap C.$$

Лемма 9. *Подгруппа L_g конечна, $b, c, g \in L_g = F_g \leftthreetimes A$, $F_g = Q_g\langle c \rangle$, подгруппы Q_g и Z_g нормальны в L_g, $Z_g \leq Z(F_g)$, Q_g нильпотентна класса ≤ 2 и $L_g \cap \mathfrak{N} \subseteq Q_g$. Если, дополнительно, группа T_b абелева или подгруппа Q_g абелева, то $Q_g \subset \mathfrak{N}$ и $F_g = Q_g \leftthreetimes \langle c \rangle$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $L_g \leq H_b$, и в силу леммы 8 подгруппа L_g конечна. Далее,

$$(a^g)^2 = i^g = b^{-1}c^{-1}icb = b^{-1}ib = ib^2, \quad b^2 \in F_g,$$

и ввиду леммы 1 $b \in L_g$. Значит, $a^c = ba^gb^{-1} \in L_g$, согласно лемме 1 $c^2 = [a, c] \in L_g$ и $c, g \in L_g$. Поскольку $b, c, g \in Q_g\langle c \rangle$ и подгруппа $Q_g\langle c \rangle$ a-допустима, то $F_g = Q_g\langle c \rangle$ и $C_g = (Q_g \cap C)\langle c \rangle$. Применение лемм 7, 8 и свойств ряда (2.1) дают остальные свойства, в том числе и включение $L_g \cap \mathfrak{N} \subseteq Q_g$. Действительно, из $d \in L_g \cap \mathfrak{N}$ следует $dQ_g = (dQ_g)^i = d^{-1}Q_g$, и поскольку в $F_g/Q_g \simeq C_g/(Q_g \cap C_g)$ инволюций нет, то $d \in Q_g$.

Пусть группа Q_g абелева. Учитывая, что $Q_g = \langle b^{\langle c \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle} \rangle$ и $b^i = b^{-1}$, получаем $Q_g \subset \mathfrak{N}$, $C_g \cap Q_g = 1$ и $F_g = Q_g \leftthreetimes \langle c \rangle$.

Лемма доказана.

Положим $X = \{b \in \mathfrak{N} \mid |b^C| < \infty\}$.

Лемма 10. *Подгруппа $\langle a, X, C \rangle$ локально конечна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, $X^a = X$ и $C \leq N_G(X)$. Пусть $b_1, \dots, b_n$ — произвольные элементы из X и $V = C_R(b_1) \cap \dots \cap C_R(b_n)$. По теореме Пуанкаре (см. [20, упражнение 2.4.7; 14, теорема I.2.7.3]) подгруппа V имеет конечный индекс в R и, значит, содержит нормальную в R подгруппу $D = \cap_{x \in R} V^x$ конечного индекса. Рассмотрим подгруппу $K = \langle R, b_1, \dots, b_n \rangle$. Поскольку $D \leq C_K(b_r)$ $(r = 1, \dots, n)$ и подгруппа D нормальна в R, то D нормальна и в K.

Согласно леммам 2 и 3 в фактор-группе $\overline{K} = K/D$ элемент aK имеет порядок 4 и действует на подгруппе $(K \cap F)/D$ регулярно. Пусть $\overline{c} \in (K \cap F)/D$ и $\overline{c}^{\overline{i}} = \overline{c}$. Поскольку $D \leq C$ и F не содержит инволюций (см. лемму 1), то $\overline{c} \in \overline{C}$. Следовательно, централизатор $C_{\overline{K}}(\overline{i})$ конечен, и в силу теоремы Шункова (см. предложение 4) группа $\overline{K}$ локально конечна. По теореме Шмидта группа K локально конечна, и ввиду произвольности элементов $b_1, \ldots, b_n \in X$ локально конечна и группа $\langle a, X, C\rangle$.

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится лемма 6 из [2], доказательство которой дословно переносится на бесконечные группы.

Лемма 11 [2, лемма 6]. *Если K, M — a-инвариантные подгруппы из F, нормализуемые подгруппой C, то KMC — a-инвариантная подгруппа из F.*

3. Доказательство теорем и следствия

Ввиду предложений 2, 3 доказываемые теоремы 1–3 и следствие работы для конечных групп верны. Поэтому на протяжении раздела будем считать, что группа $G = F \leftthreetimes \langle a\rangle$ бесконечна.

Доказательство теоремы 1. Из лемм 4 и 9 следует, что $\pi(F) = \pi(C) \cup \pi(\mathfrak{N})$. Согласно лемме 5 имеем $\pi(F/[a^2, F]) \subseteq \pi(C)$, и доказательство теоремы 1 завершает следующее утверждение.

Лемма 12. *Для $q \in \pi(\mathfrak{N}) \setminus \pi(C)$ множество $\mathfrak{N}_q$ всех q-элементов из $\mathfrak{N}$ (вместе с единицей) есть абелева нормальная в G подгруппа, $\mathfrak{N}_q \leq Z([a^2, F])$ и $q \notin \pi(F/\mathfrak{N}_q)$.*

Доказательство. Пусть $t \notin R$, $b \in \mathfrak{N}_q$ и $d = t^{-1}bt = cb'$, где $c \in C$, $b' \in \mathfrak{N}$ (см. лемму 4). Очевидно, $L_d = \langle a, d\rangle = F_d \leftthreetimes A$, где $F_d = \langle d, d^a, d^{a^2}, d^{a^3}\rangle$. Из леммы 9 и условия $q \notin \pi(C)$ следует, что $F_d = Q_d$ — конечная q-группа. Следовательно, $F_d \cap C = 1$, инволюция i инвертирует Q_q, $d \in \mathfrak{N}_q$ и $t \in N_G(\mathfrak{N}_q)$. Поскольку $R \leq N_G(\mathfrak{N}_q)$, то $N_G(\mathfrak{N}_q) = G$. Поэтому для любых $d \in \mathfrak{N}$ и $b \in \mathfrak{N}_q$ выполняется включение $d^{-1}bd \in \mathfrak{N}_q$, и по лемме 4 $db = bd$. Следовательно, $\langle\mathfrak{N}_q\rangle \leq Z(\langle\mathfrak{N}\rangle) = Z([a^2, F])$.

Лемма доказана.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть b — p-элемент из $\mathfrak{N}$ и T_b — группа из леммы 7. По лемме 7 T_b — абелева или нильпотентная класса 2 p-группа периода $|b|$. По [14, теорема 13.5.4] центр $Z = Z(T_b)$ есть прямое произведение циклических групп, и ввиду условий теоремы, Z — конечная группа. Очевидно, каждая максимальная абелева подгруппа в T_b содержит Z и ввиду леммы 7 a^2-допустима. В силу конечности периода группы T_b и известной теоремы Блэкберна [21, теорема 4.1] группа T_b и множество b^C конечны. Отсюда следуют конечность множества b^C для любого элемента $b \in \mathfrak{N}$ и равенство $\mathfrak{N} = X$. Ввиду лемм 10 и 4 группа F локально конечна.

Теорема 2 доказана.

Доказательство следствия. Как замечено выше, $\pi(F) = \pi(C) \cup \pi(\mathfrak{N}) = \pi \cup \pi'$. По теореме 1 F π'-замкнута, ее характеристическая подгруппа $O_{\pi'}(F) = T$ абелева. Если $CT = F$, то фактор-группа F/T абелева (см. лемму 1), и F локально конечна по теореме Шмидта. Если $F \neq CT$, то $\overline{a} = aT$ индуцирует на фактор-группе $\overline{F} = F/T$ регулярный расщепляющий автоморфизм порядка 4, при этом $C_{\overline{F}}(\overline{a}^2) = \overline{C} = CT/T$ (см. лемму 3), и очевидно, что $\pi(\overline{F}) = \pi(C)$. Пусть $\overline{P}$ — элементарная абелева $\overline{a}^2$-допустимая p-подгруппа из $\overline{F}$. Ее полный прообраз P в F метаабелев, локально конечен и a^2-допустим. В силу леммы 4 $C_P(T) = S \times T$ и $P = C_P(T)(C \cap T)$, где S и $C \cap P$ — конечные элементарные абелевые a^2-допустимые подгруппы, конечные по условиям следствия. Значит, подгруппа $\overline{P}$ конечна, и группа $\overline{F}$ локально конечна по теореме 2. По теореме Шмидта группа F локально конечна, и применение предложения 3 завершает доказательство следствия.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3. Пусть группа F не локально конечна. Ввиду леммы 11 и теоремы Шмидта [20, теорема 23.1.1] a-допустимая подгруппа $\langle\mathfrak{N}\rangle$ не локально конечна, и, значит, для некоторых элементов $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{N}$ группа $M = \langle a, b_1, \ldots, b_n\rangle$ бесконечна. По лемме 8 подгруппы H_{b_1}, $\ldots$, H_{b_n} локально конечны. В силу леммы 5 все множества $M_2 = H_{b_1}H_{b_2}$, $M_3 = M_2H_{b_3}$, $\ldots$, $M_k = M_{k-1}H_{b_k}$ являются подгруппами в F. Очевидно, для некоторого $k \leq n$ группа M_k не локально конечна и является произведением двух локально конечных a-допустимых подгрупп M_{k-1} и H_k ($M_1 = H_1$).

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Горенстейн Д.** Конечные простые группы. Москва: Мир, 1985. 352 с.
2. **Gorenstein D., Herstein I.N.** Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4 // *Am. J. Math.* 1961. Vol. 83, no. 1. P. 71–78. doi: 10.2307/2372721 .
3. **Kovacs L.G.** Groups with regular automorphisms of order four // Math Z. Vol. 75, no. 1. P. 277–294. doi: 10.1007/BF01211026 .
4. **Burnside W.** Theory of groups of finite order. 1st ed. Cambridge: University Press, 1897. 387 p.
5. **Nagata M.** Note on groups with involutions // Proc. Japan Acad. 1952. Vol. 28, no. 10. P. 564–566. doi: 10.3792/pja/1195570787 .
6. **Neumann B.H.** On the commutativity of addition // J. London Math. Soc. 1940. Vol. 15, no. 3. P. 203–208. doi: 10.1112/jlms/s1-15.3.203 .
7. **Burnside W.** Theory of groups of finite order. 2nd ed. Cambridge: University Press, 1911. 512 p. ISBN: 1108050328 .
8. **Neumann B.H.** Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed // Arch. Math. 1956. Vol. 7, no. 1. P. 1–5. doi: 10.1007/BF01900516 .
9. **Журтов А. Х.** О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 2000. Vol. 52, № 2. С. 329–338.
10. Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook / eds. E.I. Khukhro, V.D. Mazurov. 227 p. Available at: *ArXiv*:1401.0300v6 [math.GR] June 2015.
11. **Fischer B.** Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order $2p$ (I) // J. Algebra. 1966. Vol. 3, no. 1. P. 99–114. doi: 10.1016/0021-8693(66)90021-4 .
12. **Fischer B.** Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order $2p$ (II) // J. Algebra. 1967. Vol. 5, no. 1. P. 25–40. doi: 10.1016/0021-8693(67)90023-3 .
13. **Шунков В.П.** О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.
14. **Кондратьев А.С.** Группы и алгебры Ли. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2009. 310 с.
15. **Созутов А.И., Сучков Н.М., Сучкова Н.Г.** Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Изд-во Сиб. федерал. ун-та, 2011. 149 с.
16. **Шунков В.П.** О бесконечных централизаторах в группах // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 2. С. 224–226.
17. **Адян С.И.** Проблема Бернсайда и тождества в группах. Москва: Наука, 1975. 335 с.
18. **Нейман Х.** Многообразия групп. Москва: Мир, 1969. 264 с.
19. **Холл М.** Теория групп. Москва: ИЛ, 1962. 468 с.
20. **Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И.** Основы теории групп. Москва: Наука, 1977. 240 с.
21. **Blackburn N.** Some remarks on Cernikov p-groups // Illinois J. Math. 1962. Vol. 6, no. 3. P. 421–431. doi: 10.1215/ijm/1255632502 .

Поступила 13.07.2019
После доработки 30.09.2019
Принята к публикации 21.10.2019

Созутов Анатолий Ильич
д-р физ.-мат. наук, профессор
Сибирский федеральный университет, г. Красноярск
e-mail: sozutov_ai@mail.ru

REFERENCES

1. Gorenstein D. *Finite simple groups. An introduction to their classification.* University Series in Mathematics. N Y: Plenum Publishing Corp., 1982, 333 p. ISBN: 0-306-40779-5 . Translated to Russian under the title *Konechnye prostye gruppy. Vvedenie v ikh klassifikatsiyu.* Moscow: Mir Publ., 1985, 352 p.
2. Gorenstein D., Herstein I.N. Finite Groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4. *Am. J. Math.*, 1961, vol. 83, no. 1, pp. 71–78. doi: 10.2307/2372721 .
3. Kovacs L.G. Groups with regular automorphisms of order four. *Math Z.*, vol. 75, no. 1, pp. 277–294. doi: 10.1007/BF01211026 .
4. Burnside W. *Theory of groups of finite order.* Cambridge: Cambridge University Press, 1897, 387 p.
5. Nagata M. Note on groups with involutions. *Proc. Japan Acad.*, 1952, vol. 28, no. 10, pp. 564–566. doi: 10.3792/pja/1195570787 .
6. Neumann B.H. On the commutativity of addition. *J. London Math. Soc.*, 1940, vol. 15, no. 3, pp. 203–208. doi: 10.1112/jlms/s1-15.3.203 .
7. Burnside W. *Theory of groups of finite order.* Cambridge: Cambridge University Press, 1911, 512 p. ISBN: 1108050328 .
8. Neumann B.H. Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed. *Arch. Math.*, 1956, vol. 7, no. 1, pp. 1–5. doi: 10.1007/BF01900516 .
9. Zhurtov A.Kh. Regular automorphisms of order 3 and Frobenius pairs. *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 2, pp. 268–275. doi: 10.1007/BF02674596 .
10. Khukhro E.I., Mazurov V.D. (eds) *Unsolved problems in group theory. The Kourovka Notebook.* 227 p. Available at: *ArXiv*:1401.0300v6 [math.GR] June 2015.
11. Fischer B. Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order $2p$ (I). *J. Algebra*, 1966, vol. 3, no. 1, pp. 99–114. doi: 10.1016/0021-8693(66)90021-4 .
12. Fischer B. Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order $2p$ (II). *J. Algebra*, 1967, vol. 5, no. 1, pp. 25–40. doi: 10.1016/0021-8693(67)90023-3 .
13. Shunkov V.P. On periodic groups with an almost regular involution. *Algebr Logic.*, vol. 11, no. 4, pp. 260–272. doi: 10.1007/BF02219098 .
14. Kondratiev A.S. *Gruppy i algebry Li* [Lie groups and Lie algebras]. Ekaterinburg: UrO RAS Publ., 2009, 310 p. ISBN: 978-5-7691-2111-1 .
15. Sozutov A.I., Suchkov N.M., Suchkova N.G. *Beskonechnye gruppy s involyutsiyami* [Infinite groups with involutions]. Krasnoyarsk: Siberian Federal University Publ., 2011, 149 p. ISBN: 978-5-7638-2127-7 .
16. Shunkov V.P. On infinite centralizers of groups. *Algebra and Logic.*, vol. 13, no. 2, pp. 129–130. doi: 10.1007/BF01463152 .
17. Adyan S.I. *The Burnside problem and identities in groups.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1979, 311 p. ISBN: 978-3-642-66934-7 . Original Russian text published in Adyan S.I. *Problema Bernsaida i tozhdestva v gruppakh.* Moscow: Nauka Publ., 1975. 335 p.
18. Neumann H. Varieties of Groups. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1967, 194 p. doi: 10.1007/978-3-642-88599-0 . Translated to Russian under the title *Mnogoobraziya grupp.* Moscow: Mir Publ., 1969, 264 p.
19. Hall M., Jr. *The theory of groups.* N Y: MacMillan Co., 1959, 434 pp. Translated to Russian under the title *Teoriya grupp*, Moskva: Inostran. Literatura Publ., 1962, 468 p.
20. Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Fundamentals of the theory of groups.* N Y; Heidelberg; Berlin: Springer-Verlag, 1979, 203 p. ISBN: 978-1-4612-9966-0 . Original Russian text published in Kargapolov M.I., Merzlyakov Yu.I. *Osnovy teorii grupp.* Moscow: Nauka Publ., 1977. 240 p.
21. Blackburn N. Some remarks on Cernikov p-groups. *Illinois J. Math.*, 1962, vol. 6, no. 3, pp. 421–431. doi: 10.1215/ijm/1255632502 .

Received July 13, 2019
Revised September 30, 2019
Accepted October 21, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project № 19-01-00566 A) .

Sozutov Anatoliy Ilich, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041 Russia, e-mail: sozutov_ai@mail.ru .

Cite this article as: A. I. Sozutov. On periodic groups with a regular automorphism of order 4, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 201–209 .