ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 4 2019

УДК 517.9

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОМ ОБРАЩЕНИИ[1] РЯДОВ ВОЛЬФА — ДАНЖУА

А. Р. Миротин, А. А. Атвиновский

Пусть функция f с вещественными полюсами, образующими монотонную и ограниченную последовательность, разлагается в ряд Вольфа — Данжуа с положительными коэффициентами. В основном результате статьи утверждается, что если мы вычтем из функции $1/f$ ее “линейную часть”, то оставшаяся “дробная часть” этой функции тоже будет разлагаться в ряд Вольфа — Данжуа (и ее полюсы тоже вещественны, а коэффициенты ряда отрицательны). Дано приложение полученного результата к теории операторов.

Ключевые слова: ряд Вольфа — Данжуа, замкнутый оператор, левый обратный оператор, функциональное исчисление.

A. R. Mirotin, A. A. Atvinovskii. On multiplicative inversion for Wolff–Denjoy series.

Let a function f with real poles that form a monotone bounded sequence be expanded in a Wolff–Denjoy series with positive coefficients. The main result of the paper states that, if we subtract the “linear part” from the function $1/f$, then the remaining “fractional part” is also expanded in a Wolff–Denjoy series (its poles are also real and the coefficients of the series are negative). An application of the result to operator theory is given.

Keywords: Wolff–Denjoy series, closed operator, left inverse operator, functional calculus.

MSC: 30D30 47A60

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-4-147-154

Введение

Следуя [1], *рядами Вольфа — Данжуа* мы будем называть ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{z-\lambda_k}, \qquad (*)$$

где $A_k \in \mathbb{C}, \{A_k\}_{k\geq 1} \in l^1$, $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ — ограниченная последовательность комплексных чисел.

Как было отмечено в [1], ряды указанного вида интенсивно изучались в работах А. Пуанкаре, Ж. Вольфа, А. Данжуа, Э. Бореля, Т. Карлемана, А. Бёрлинга, Т. А. Леонтьевой [2; 3] прежде всего в связи с проблемами квазианалитичности и аналитического продолжения. Они также имеют приложения к теории рядов Дирихле и теории операторов [1].

Кроме того (см. статью [4] и приведенную там библиографию), различные свойства функций, допускающих представления вида $(*)$, изучались и использовались в ряде работ М. Г. Крейна, Г. Л. Гамбургера, Б. Я. Левина, М. В. Келдыша и И. В. Островского, Л. де Бранжа, Ю. Ф. Коробейника, А. Боричева и М. Л. Содина, Л. С. Маергойза, В. Б. Шерстюкова по теории функций и гармоническому анализу, теории операторов и дифференциальных уравнений. Отметим также работу Н. И. Ахиезера [5].

Как известно, класс функций Неванлинны $\mathcal{R}$ [6] (см. также [7], где эти функции называются функциями Пика) переходит в себя при преобразовании $f \mapsto -1/f$. Суть основного результата данной заметки состоит в уточнении этого свойства для некоторого подкласса класса $\mathcal{R}$.

[1] От английского “multiplicative inverse”. Авторы отдают себе отчет в том, что термин "мультипликативное обращение функции f" применительно к функции $1/f$ не принят в математической литературе на русском языке.

А именно, показано, что если функция f с вещественными полюсами, образующими монотонную и ограниченную последовательность, разлагается в ряд Вольфа — Данжуа с положительными коэффициентами и если мы вычтем из функции $1/f$ ее "линейную часть", то оставшаяся "дробная часть" этой функции тоже будет разлагаться в ряд Вольфа — Данжуа (и ее полюсы тоже вещественны, а коэффициенты ряда отрицательны). При этом оказалось, что условия положительности коэффициентов и вещественности полюсов нельзя отбросить (см. замечания 1 и 2 ниже). Дано также приложение полученного результата к теории операторов.

Статья анонсирована в [8].

1. Основной результат

Теорема 1. *Пусть функция f представима в виде*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda_k-z}, \tag{1}$$

где $c_k>0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k<\infty$, $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ — монотонная и ограниченная последовательность действительных чисел. Тогда

$$\frac{1}{f(z)}=\alpha+\beta z-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{t_n-z}, \tag{2}$$

где

$$\alpha=\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\lambda_k}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k\Big)^2},\quad \beta=-\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k},$$

t_n — все нули функции $f(z)$, $b_n=1/f'(t_n)>0$ $(n=1,2,\dots)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n<\infty$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ монотонно возрастает, и положим $a:=\lambda_1, b:=\sup_k\lambda_k$. Ясно, что ряд (1) сходится локально равномерно и функция f голоморфна на множестве $\mathbb{C}\setminus[a,b]$, в некоторой окрестности каждого из интервалов $(\lambda_{k-1},\lambda_k)$ и в бесконечности и имеет в бесконечности нуль первого порядка. Особыми точками функции f в расширенной комплексной плоскости являются полюсы λ_k и точка b, предельная для полюсов. Заметим, что все нули t_n функции f принадлежат отрезку $[a,b]$, так как $(z=x+iy)$,

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k(\lambda_k-x)}{|\lambda_k-z|^2}+iy\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{|\lambda_k-z|^2},$$

и кратность этих нулей равна единице, поскольку при $x\in\mathbb{R}\setminus(\{\lambda_k\}_{k\geq 1}\cup\{b\})$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{(\lambda_k-x)^2}>0.$$

Из последнего неравенства следует также, что f строго возрастает на любом интервале, содержащемся в $\mathbb{R}\setminus(\{\lambda_k\}_{k\geq 1}\cup\{b\})$. Поскольку $f(\lambda_{k-1}+0)=-\infty$, $f(\lambda_k-0)=+\infty$, множество нулей функции f на каждом интервале $(\lambda_{k-1},\lambda_k)$ состоит ровно из одной точки. Следовательно, множество $\{t_n\}$ всех нулей функции f счетно, и мы можем считать последовательность $\{t_n\}_{n\geq 1}$ строго возрастающей.

Покажем, что функция $\varphi(z) := \dfrac{1}{f(z)}$ ($\varphi(\lambda_k) := 0$, $\varphi(b) := 0$) имеет вид

$$\varphi(z) = \alpha + \beta z - \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z},$$

где τ — ограниченная неотрицательная регулярная борелевская мера, сосредоточенная на $[a,b]$ (см. [9]). Действительно, так как

$$\mathrm{Im} f(z) = y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{|\lambda_k - z|^2},$$

то функция $-\varphi(z)$ принадлежит классу Неванлинны $\mathcal{R}$ [6] (см. также [7, с. 217]), т. е. голоморфна в верхней полуплоскости, и $\mathrm{Im}(-\varphi(z)) > 0$ при $y > 0$, а потому по теореме Неванлинны

$$-\varphi(z) = \alpha_1 + \beta_1 z + \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2}\Big) d\tau(t),$$

где τ — неотрицательная регулярная борелевская мера, для которой сходится интеграл $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^2)^{-1} d\tau(t)$, α_1, β_1 — вещественные числа. Воспользуемся формулой обращения Стилтьеса — Перрона, которая в случае функции $-\varphi(z)$ при подходящей нормировке интегрирующей функции имеет вид (см., например, [10, с. 521])

$$\tau(s_2) - \tau(s_1) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{s_1}^{s_2} \mathrm{Im}(\varphi(x + i\varepsilon)) dx$$

(через $\tau(t)$ мы обозначаем функцию распределения меры τ). Ввиду вещественности функции $\varphi(z)$ при $z = x < a$ и $z = x > b$ правая часть здесь равна нулю при $s_1 < s_2 < a$ и при $s_2 > s_1 > b$, а потому функция $\tau(t)$ постоянна при $t < a$ и $t > b$ и, в частности, ограничена. Поэтому

$$-\varphi(z) = \alpha_2 + \beta_1 z + \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z}, \quad \text{т. е.} \quad \varphi(z) = \alpha + \beta z - \int_a^b \frac{d\tau(t)}{t-z},$$

где α, β — вещественные числа.

Аналогично, если $t_{k-1} < s_1 < s_2 < t_k$, формула обращения Стилтьеса — Перрона показывает, что функция $\tau(t)$ постоянна на каждом интервале (t_{k-1}, t_k), что приводит к формуле (2), в которой $b_k > 0$ — скачок функции τ в точке t_k (предельный переход под знаком интеграла в формуле Стилтьеса — Перрона возможен в силу непрерывности подинтегральной функции в комплексной окрестности отрезка $[s_1, s_2]$). Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ есть вариация функции $\tau(t)$ на отрезке $[a,b]$, а потому этот ряд сходится.

Наконец, из равенства $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n/(x - t_n) = 0$ и формулы (2) вытекает, что график линейной функции $\alpha + \beta x$ есть наклонная асимптота графика функции $1/f(x)$, а потому коэффициенты α и β определяются следующим образом:

$$\beta = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{xf(x)}, \quad \alpha = \lim_{x\to\infty} \Big(\frac{1}{f(x)} - \beta x\Big).$$

Тогда

$$\beta = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{xc_k}{\lambda_k - x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{\lambda_k/x - 1}} = -\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k},$$

и

$$\alpha = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k} \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\Big(1+\dfrac{x}{\lambda_k - x}\Big)}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{\lambda_k - x}}$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k} \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k\lambda_k}{\lambda_k - x}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{\lambda_k - x}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k} \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k\lambda_k}{\lambda_k/x - 1}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{\lambda_k/x - 1}} == \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\lambda_k}{\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\Big)^2}.$$

Законность предельного перехода под знаками сумм следует из того, что при $|x| > 2\sup_{k\geq 1}|\lambda_k|$ для всех $k \geq 1$ справедливо неравенство $|\lambda_k/x - 1| > 1/2$, а потому ряды имеют суммируемые мажоранты.

В случае, когда последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ монотонно убывает, доказательство проводится аналогично, если положить $a := \inf_k \lambda_k$, $b := \lambda_1$ и вместо интервалов $(\lambda_{k-1}, \lambda_k)$ рассматривать интервалы $(\lambda_k, \lambda_{k-1})$. Это завершает доказательство теоремы. □

З а м е ч а н и е 1. Требование положительности коэффициентов c_k в теореме 1 существенно, так как в противном случае кратность нуля функции f (а потому и порядок соответствующего полюса функции $1/f$) может быть больше единицы, что показывает следующий пример:

$$\frac{1}{2z} - \frac{4}{z+1} + \frac{9}{2(z+2)} = \frac{(z-1)^2}{z(z+1)(z+2)}.$$

2. Приложения

Следствием теоремы 1 является теорема об обращении функции f вида (1) от замкнутого оператора в банаховом пространстве. Пусть для определенности последовательность $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ монотонно возрастает. Если A — замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с отрезком $[a, b]$, где $a := \lambda_1, b := \sup_k \lambda_k$, то мы положим

$$f(A) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k R(\lambda_k, A),$$

где $R(\lambda_k, A) = (\lambda_k I - A)^{-1}$ — значения резольвенты оператора A. Это определение согласуется с голоморфным функциональным исчислением Рисса — Данфорда замкнутых операторов в пространстве X [11], поскольку f принадлежит пространству $\mathcal{F}(A)$ функций, голоморфных в некоторой (своей для каждой функции) окрестности множества $\sigma(A)$ и в бесконечности. Приведенное ниже следствие обобщает результат из [12], который был получен с помощью функционального исчисления, построенного в [13;14]. Континуальный аналог этого результата был установлен в [15].

Следствие. *Пусть функция f задана формулой* (1)*, где $c_k > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k < \infty$, $\{\lambda_k\}_{k\geq 1}$ — монотонно возрастающая и ограниченная последовательность действительных чисел, $a := \lambda_1, b := \sup_k \lambda_k$ и A — замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр которого не пересекается с отрезком $[a, b]$. Тогда левый обратный к оператору $f(A)$ существует и имеет вид*

$$f(A)^{-1} = \alpha I + \beta A - \sum_{n=1}^{\infty} b_n R(t_n, A),$$

где t_n $(n = 1, 2, \dots)$ — все нули функции f, а значения b_n, α и β даются теоремой 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что функция f принадлежит классу $R[a,b]$ (относительно последнего см. [10, с. 525; а также 13]). Поэтому по теореме 1 из [13] левый обратный к оператору $f(A)$ существует и равен $\varphi(A)$ (как и выше, $\varphi = 1/f$). Осталось заметить, что в силу теоремы 1

$$\varphi(A) = \alpha I + \beta A - \sum_{n=1}^{\infty} b_n R(t_n, A). \qquad \square$$

В работе [12] был рассмотрен частный случай следствия, в котором ряд заменен конечной суммой. Там же была поставлена задача обобщения этого результата на случай комплексных полюсов (метод, использованный в [12], здесь неприменим, см. ниже замечание 2). Нижеследующая теорема 2 решает эту задачу.

Рассмотрим рациональную функцию

$$f(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{\lambda_j - z},$$

где $a_j > 0$, а λ_j — произвольные попарно различные комплексные числа. Если A — замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с множеством $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, то мы, как и выше, положим

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} a_j R(\lambda_j, A).$$

Это определение также согласуется с голоморфным функциональным исчислением Рисса — Данфорда замкнутых операторов в пространстве X, поскольку $f \in \mathcal{F}(A)$.

Ниже мы получим условия левой обратимости оператора $f(A)$ и вычислим соответствующий левый обратный. Для формулировки основного результата заметим, что рациональная функция $g = 1/f$ имеет в бесконечности полюс первого порядка. Следовательно, выделяя целую часть и разлагая дробную часть на простейшие дроби, мы можем ее представить в виде

$$g(z) = \alpha + \beta z + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(t_j - z)^k}, \tag{3}$$

где t_j — все нули функции f, m_j — кратность нуля t_j.

З а м е ч а н и е 2. В отличие от случая, когда λ_j — действительные числа, рассмотренного выше, нули функции f могут быть кратными, даже если все коэффициенты положительны. Например, так будет в случае $f(z) = \dfrac{1}{z-\lambda} + \dfrac{1}{z-1} + \dfrac{1}{z}$, где λ — корень уравнения $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть A — замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с выпуклой оболочкой $\operatorname{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ множества $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Тогда левый обратный к оператору $f(A)$ существует и имеет вид*

$$f(A)^{-1} = \alpha I + \beta A + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} R(t_j, A)^k,$$

где t_j $(j = 1, \dots, m)$ — все нули функции f, m_j — кратность нуля t_j и

$$\alpha = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j \lambda_j}{\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\Big)^2}, \quad \beta = -\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j}.$$

Доказательство. Значениz коэффициентов α и β выводятся из формулы (3) аналогично тому, как это было сделано в доказательстве теоремы 1.

Теперь покажем, что все корни уравнения $f(z) = 0$ принадлежат $\mathrm{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Если допустить противное, то найдется прямая на комплексной плоскости, разделяющая $\mathrm{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и некоторый корень z_0 этого уравнения. Следовательно, найдется прямая, разделяющая $\mathrm{conv}(\lambda_1 - z_0, \dots, \lambda_n - z_0)$ и 0. Совершая поворот $w = e^{i\theta} z$ на подходящий угол, получаем, что прямая $\mathrm{Re} w = a, a > 0$, разделяет $\mathrm{conv}(e^{i\theta}(\lambda_1 - z_0), \dots, e^{i\theta}(\lambda_n - z_0))$ и 0. Ясно, что $\sum_{j=1}^n a_j/w_j = 0$, где $w_j = e^{i\theta}(\lambda_j - z_0)$.

С другой стороны, дробно-линейное преобразование $\zeta = 1/w$ переводит прямую $\mathrm{Re} w = a$ в окружность, проходящую через 0 и содержащую внутри все точки $\zeta_j = 1/w_j$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^n \frac{a_j}{w_j} = \sum_{j=1}^n a_j \zeta_j \neq 0;$$

у нас $a_j > 0$, и все точки ζ_j лежат по одну сторону от касательной к окружности, проведенной в точке 0, и мы получили противоречие.

Из доказанного выше следует, что функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \alpha + \beta z + h(z),$$

где

$$h(z) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} \frac{c_{jk}}{(t_j - z)^k},$$

голоморфна в окрестности спектра оператора A, а потому функции h принадлежат пространству $\mathcal{F}(A)$. Из определения функционального исчисления Рисса — Данфорда сразу следует, что

$$g(A) = \alpha I + \beta A + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{m_j} c_{jk} R(t_j, A)^k.$$

Заметим, что оба слагаемых правой части очевидного равенства

$$1 = g(z) f(z) = (\alpha + \beta z) f(z) + h(z) f(z)$$

принадлежат $\mathcal{F}(A)$. Следовательно, применяя функцию $(\alpha + \beta z) f(z) + h(z) f(z)$ к оператору A и воспользовавшись свойствами полиномиального исчисления и голоморфного функционального исчисления Рисса — Данфорда [11, VII.9], будем иметь $(\alpha I + \beta A) f(A) + h(A) f(A) = I$. Таким образом, $f(A)^{-1} = g(A)$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 3. Легко проверяемое равенство ($a, b \geq 0$, $a + b = 1$)

$$aR(\lambda_1, A) + bR(\lambda_2, A) = R(\lambda_1, A)\left((a\lambda_2 + b\lambda_1) - A\right) R(\lambda_2, A)$$

показывает, что его левая часть обратима слева тогда и только тогда, когда число $a\lambda_2 + b\lambda_1$ не принадлежат точечному спектру $\sigma_p(A)$. Отсюда следует, что всевозможные линейные комбинации с положительными коэффициентами двух значений резольвенты оператора A обратимы слева тогда и только тогда, когда $\sigma_p(A)$ не пересекается с выпуклой оболочкой $\mathrm{conv}(\lambda_1, \lambda_2)$ множества $\{\lambda_1, \lambda_2\}$, т. е. с отрезком с концами λ_1 и λ_2. Таким образом, условие $\mathrm{conv}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cap \sigma(A) = \varnothing$ в предыдущей теореме существенно.

Замечание 4. Как в ситуации, описываемой следствием, приведенным выше, так и в ситуации теоремы 2 задача $f(A)x = y$ является некорректной при неограниченном A. Причиной этого служит член βA в формуле для $f(A)^{-1}$, которая в обоих случаях имеет вид

$$f(A)^{-1} = \alpha I + \beta A + g(A),$$

где оператор $g(A)$ ограничен. Из этой же формулы вытекает следующий подход к регуляризации этих задач. Если оператор A^{-1} ограничен и R_t $(0 < t < t_0)$ есть регуляризующее семейство задачи $A^{-1}x = y$ (т.е. $R_tA^{-1}x \to x$ $(t \to 0)$ при всех $x \in X$, см., например, [16]), то $R'_t = \alpha I + \beta R_t + g(A)$ есть, как легко проверить, регуляризующее семейство задачи $f(A)x = y$.

Авторы благодарят рецензентов за замечания и предложения, способствовавшие улучшению изложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Сибилев Р.В.** Теорема единственности для рядов Вольфа — Данжуа // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, вып. 1. С. 170–199.
2. **Леонтьева Т.А.** Представление аналитических функций рядами рациональных функций // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 4. С. 347–355.
3. **Леонтьева Т.А.** Представление функций, аналитических в замкнутой области рядами рациональных функций // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 2. С. 191–200.
4. **Шерстюков В.Б.** Разложение обратной величины целой функции с нулями в полосе в ряд Крейна // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 12. С. 137–156.
5. **Ахиезер Н.И.** О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1945. Т. 19. Р. 275 –290.
6. **Nevanlinna R.**, Asymptotische Entwicklungen Beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1922. Vol. 18. P. 1–53.
7. **Donoghue W.F**. Distributions and Fourier transforms. N Y; London: Acad. Press, 1969. 315 p. (Ser. Pure Appl. Math. (Book 32)). ISBN: 0122206509 .
8. **Mirotin A.R., Atvinovskii A.A.** Analog for the Wiener lemma for Wolff–Denjoy series [e-resource]. 8 p. Available at: *ArXiv*: arXiv:1908.08029v1 [math.FA] 21 Aug 2019.
9. **Атвиновский А.А.** Об интегральном представлении одного класса аналитических функций // Изв. Гомел. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. 2011. № 4 (67). С. 3–7.
10. **Крейн М.Г., Нудельман, А.А.** Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М. : Наука, 1973. 551 с.
11. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Том 1: Общая теория. М. : ИЛ, 1962. 896 с.
12. **Миротин А.Р., Атвиновский А.А.** Обращение линейной комбинации значений резольвенты замкнутого оператора // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 3 (20). С. 77–79.
13. **Атвиновский А.А., Миротин А.Р.** Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве // Изв. вузов. Математика. 2013. Т. 10. С. 3–15.
14. **Атвиновский А.А., Миротин А.Р.** Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве. II // Изв. вузов. Математика. 2015. Т. 5. С. 3–16.
15. **Миротин А.Р.** Обращение операторно-монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве // Тр. Института математики (Минск). 2004. Т. 12, № 1. С. 104–108.
16. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 208 р.

Поступила 12.09.2019
После доработки 13.11.2019
Принята к публикации 18.11.2019

Миротин Адольф Рувимович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины
г. Гомель
e-mail: amirotin@yandex.ru

Атвиновский Александр Алексеевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
Гомельский государственный университет им. Ф.Скорины
г. Гомель
e-mail: aatvinovskiy@gmail.com

REFERENCES

1. Sibilev R.V. A uniqueness theorem for Wolff–Denjoy series. *St. Petersburg Math. J.*, 1996, vol. 7, no. 1, pp. 145–168.
2. Leont'eva T.A. The representation of analytic functions by series of rational functions. *Math. Notes*, 1967, vol. 2, no. 4, pp. 695–702. doi: 10.1007/BF01093644 .
3. Leont'eva T.A. Representation of functions analytic in a closed domain by series of rational functions. *Math. Notes*, 1968, vol. 4, no. 2, pp. 606–611. doi: 10.1007/BF01094960 .
4. Sherstyukov V.B. Expanding the reciprocal of an entire function with zeros in a strip in a Kreĭn series. *Sb. Math.*, 2011, vol. 202, no. 12, pp. 1853–1871. doi: 10.1070/SM2011v202n12ABEH004210 .
5. Akhiezer N. On some inversion formulae for singular integrals. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1945, vol. 9, no. 4, pp. 275–290 (in Russian).
6. Nevanlinna R. Asymptotische Entwicklungen Beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A*, 1922, vol. 18, no. 5, pp. 1–53.
7. Donoghue W.F. *Distributions and Fourier transforms*, N Y; London: Acad. Press, 1969, Ser. Pure Appl. Math. (Book 32), 315 p. ISBN: 0122206509 .
8. Mirotin A.R., Atvinovskii A.A. Analog for the Wiener lemma for Wolff-Denjoy series, 8 p., Available at: *ArXiv*: arXiv:1908.08029v1 [math.FA] 21 Aug 2019.
9. Atvinovskii A.A. On integral representation of a class of analytical functions. *Izv. Gomel. Gos. Univ. im. F. Skoriny*, 2011, vol. 67, no. 4, pp. 3–7 (in Russian).
10. Krein M.G., Nudelman A.A. *The Markov Moment Problem and Extremal Problems.* Leipzig: Max Planck Institute, 1977, 417 p. doi: 10.1090/mmono/050 . Original Russian text published in Krein M.G., Nudel'man A.A. *Problema momentov Markova i ekstremal'nye zadachi.* Moscow: Nauka Publ., 1973. 551 p.
11. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators* Part 1: *General Theory.* N Y: Interscience, 1988, 872 p. ISBN: 978-0-471-60848-6 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory*, T. 1: *Obshchaya teoriya.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1962.
12. Mirotin A.R., Atvinovskii A.A. Inversion of a linear combination of values of the resolvent of a closed operator. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki*, 2014, no. 3 (20), pp. 77–79 (in Russian).
13. Atvinovskii A.A., Mirotin A.R. On some functional calculus of closed operators in a Banach space. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2013, vol. 57, no. 10, pp. 1–12. doi: 10.3103/S1066369X13100010 .
14. Atvinovskii A.A., Mirotin A.R. On some functional calculus of closed operators in a Banach space. II. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2015, vol. 59, no. 5, pp. 1–12. doi: 10.3103/S1066369X15050011 .
15. Mirotin A.R. The inverse of operator monotonic functions of negative operators on Banach spaces. *Trudy Instituta Matematiki (Minsk)*, 2004, vol. 12, no. 1, pp. 104–108. (in Russian)
16. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Inverse and Ill-Posed Problems Series, Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 90-6764-367-X/hbk . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 208 p.

Received September 12, 2019
Revised November 13, 2019
Accepted November 18, 2019

Adolf Ruvimovich Mirotin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Francisk Skorina Gomel State University, g. Gomel, 246699 Belarus, e-mail: amirotin@yandex.ru .

Aleksandr Alekseevich Atvinovskii, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Francisk Skorina Gomel State University, g. Gomel, 246699 Belarus, e-mail: aatvinovskiy@gmail.com .

Cite this article as: A. R. Mirotin, A. A. Atvinovskii. On multiplicative inversion for Wolff–Denjoy series, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 147–154 .