ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.27

АБСТРАКТНАЯ ВЫПУКЛОСТЬ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО МНОЖЕСТВА ЛИПШИЦЕВЫХ (ВОГНУТЫХ) ФУНКЦИЙ[1]

В. В. Гороховик, А. С. Тыкун

Настоящая работа посвящена абстрактной $\mathcal{H}$-выпуклости функций ($\mathcal{H}$ — заданное множество элементарных функций) и ее реализации в случае, когда в качестве $\mathcal{H}$ рассматриваются пространство липшицевых функций и множество вогнутых липшицевых функций. В работе вводится новое понятие регулярно $\mathcal{H}$-выпуклых функций. Так названы функции, которые являются верхними огибающими множества максимальных (в смысле поточечного упорядочения) $\mathcal{H}$-минорант. Как обобщение понятия глобального субдифференциала выпуклой функции вводятся множество максимальных опорных $\mathcal{H}$-минорант к функции в заданной точке и множество нижних $\mathcal{H}$-опорных точек функции, в терминах которых затем устанавливаются достаточные, а также необходимые условия глобального минимума функции. Во второй части работы абстрактные понятия $\mathcal{H}$-выпуклости реализуются в конкретных случаях, когда функции определены на метрическом или нормированном пространстве X, а в качестве множества элементарных функций $\mathcal{H}$ рассматривается множество $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ липшицевых или множество $\mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ вогнутых липшицевых функций. Важным результатом данной части статьи является доказательство того, что для полунепрерывной снизу функции, которая, кроме того, ограничена снизу липшицевой функцией, множество нижних $\mathcal{L}$-опорных точек и множество нижних $\mathcal{L}\widehat{C}$-опорных точек совпадают и являются плотными в ее эффективной области. Данные результаты распространяют на более широкий класс полунепрерывных снизу функций известную теорему Брондстеда — Рокафеллара о существовании субдифференциала для выпуклых полунепрерывных снизу функций и восходят к одному из важнейших результатов классического выпуклого анализа — теореме Бишопа — Фелпса о плотности опорных точек в границе замкнутого выпуклого множества.

Ключевые слова: абстрактная выпуклость, опорные миноранты, опорные точки, глобальный минимум, полунепрерывные фунции, липшицевы функции, вогнутые липшицевы функции, плотность опорных точек.

V. V. Gorokhovik, A. S. Tykoun. Abstract convexity of functions with respect to the set of Lipschitz (concave) functions.

The paper is devoted to the abstract $\mathcal{H}$-convexity of functions (where $\mathcal{H}$ is a given set of elementary functions) and its realization in the cases when $\mathcal{H}$ is the space of Lipschitz functions or the set of Lipschitz concave functions. We introduce the notion of regular $\mathcal{H}$-convex functions. These are functions representable as the upper envelopes of the set of their maximal (with respect to the pointwise ordering) $\mathcal{H}$-minorants. As a generalization of the global subdifferential of a convex function, we introduce the set of maximal support $\mathcal{H}$-minorants at a point and the set of lower $\mathcal{H}$-support points. Using these tools, we formulate necessary as well as sufficient conditions for global minima of nonsmooth functions. In the second part of the paper, the abstract notions of $\mathcal{H}$-convexity are realized in the specific cases when functions are defined on a metric or normed space X and the set of elementary functions is the space $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ of Lipschitz functions or the set $\mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ of Lipschitz concave functions, respectively. An important result of this part of the paper is the proof of the fact that, for a lower semicontinuous function bounded from below by a Lipschitz function, the set of its lower $\mathcal{L}$-support points and the set of lower $\mathcal{L}\widehat{C}$-support points coincide and are dense in the effective domain of the function. These results extend the known Brøndsted–Rockafellar theorem on the existence of a subdifferential of convex lower semicontinuous functions to the wider class of lower semicontinuous functions and go back to the Bishop–Felps theorem on the density of support points in the boundary of a closed convex set, which is one of most important results of classical convex analysis.

Keywords: abstract convexity, support minorants, support points, global minimum, semicontinuous functions, Lipschitz functions, concave Lipschitz functions, density of support points.

MSC: 52A01,49J52; 49K27; 26B40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-73-85

[1]Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2016– 2020 годы “Конвергенция-2020” (проект 1.4.01).

Введение

Понятие выпуклости функций и множеств играет ключевую роль во многих классических разделах математики, в частности в геометрии, функциональном анализе и др. Особое значение выпуклые функции и множества приобрели в последние пятьдесят лет в связи с интенсивным развитием в это время теории оптимизации, а также негладкого и многозначного анализа. Выполнение условий выпуклости позволяет получить наиболее исчерпывающие результаты как для самих выпуклых функций и множеств, так и для задач, данные которых являются выпуклыми. В частности, для выпуклых задач оптимизации удается получить не только необходимые или только достаточные условия оптимальности, как это имеет место в общем невыпуклом случае, но и критерии оптимальности, т. е. такие условия оптимальности, которые являются одновременно как необходимыми, так и достаточными. В значительной мере это обусловлено тем, что выпуклым функциям и множествам соответствуют в сопряженном пространстве двойственные им выпуклые объекты, использование которых позволяет получить исчерпывающие характеристики исходных выпуклых функций и множеств. Естественно поэтому стремление обобщить понятия и методы выпуклого анализа и распространить их на более широкие классы функций и множеств. Достаточно полный обзор различных обобщений понятия выпуклости содержится во вводной главе монографии [1] (см. также [2]).

Настоящее исследование примыкает к одному из направлений в обобщенной выпуклости, начало которому было положено в 70-е годы прошлого века в работах С. С. Кутателадзе и А. М. Рубинова [3; 4]. Дальнейшее развитие их идеи нашли в монографиях [1; 5; 6]. Отправной точкой в данном подходе стал следующий результат классического выпуклого анализа: каждая полунепрерывная снизу выпуклая функция является верхней огибающей ее непрерывных аффинных минорант (см., например, [7, предложение 3.1]). В данном случае непрерывные аффинные функции выступают в качестве элементарных функций, из семейств которых посредством операции поточечного супремума (операции верхней огибающей) конструируются выпуклые функции. Если в качестве элементарных функций мы выбираем какое-либо другое множество функций, скажем множество $\mathcal{H}$, отличающееся от множества аффинных функций, и применим к подмножествам из $\mathcal{H}$ операцию поточечного супремума, то в результате получим класс таких функций, которые, не являясь, вообще говоря, классически выпуклыми, сохраняют целый ряд важных их свойств. В силу этого такие функции были названы [4–6] *$\mathcal{H}$-выпуклыми*; в [6] используется наряду с этим термин *абстрактно выпуклые функции.*

В развитие указанного подхода в настоящей работе вводится понятие *регулярно $\mathcal{H}$-выпуклых функций.* Так названы функции, которые являются верхними огибающими множества максимальных (в смысле поточечного упорядочения) $\mathcal{H}$-минорант. Кроме того, обобщая понятие субдифференциала выпуклой функции, в данной работе мы вводим множества (максимальных) опорных $\mathcal{H}$-минорант к функции в заданной точке и нижних $\mathcal{H}$-опорных точек функции, в терминах которых затем устанавливаем достаточные, а также необходимые условия глобального минимума функции. Во втором и третьем разделах абстрактные понятия $\mathcal{H}$-выпуклости реализуются в конкретном случае, когда функции определены на метрическом или нормированном пространстве X, а в качестве множества элементарных функций $\mathcal{H}$ рассматриваются пространство $\mathcal{L}(X,\mathbb{R})$ липшицевых или множество $\mathcal{L}\widehat{C}(X,\mathbb{R})$ липшицевых вогнутых функций. Важным результатом разд. 3 и статьи в целом является доказательство того, что для полунепрерывных снизу функций, которые, кроме того, ограничены снизу липшицевой функцией, множество нижних $\mathcal{L}$-опорных точек и множество нижних $\mathcal{L}\widehat{C}$-опорных точек совпадают и являются плотными в эффективной области функции. Данный результат распространяет на более широкий класс полунепрерывных снизу функций теорему Брондстеда — Рокафеллара [8] (см. также [9, теорема 2.10.2]) о существовании субдифференциала для выпуклых полунепрерывных снизу функций. Отметим, что указанные результаты восходят к одному из важнейших результатов классического выпуклого анализа — теореме Бишопа — Фелпса [10] о плотности опорных точек в границе замкнутого выпуклого множества.

Представленные здесь результаты продолжают исследования, начатые первым автором в работах [11–13].

Всюду далее $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ — расширенное множество вещественных чисел. Символом Z^X обозначается, как это принято, совокупность всех функций $f : X \mapsto Z$, определенных на множестве X и принимающих значения в множестве Z; ниже, как правило, рассматриваются случаи, когда Z равно либо $\mathbb{R}$, либо $\overline{\mathbb{R}}$. Совокупности функций $\mathbb{R}^X$ и $\overline{\mathbb{R}}^X$ предполагаются упорядоченными отношением поточечного сравнения $f \le g \Leftrightarrow f(x) \le g(x)\ \forall\, x \in X$. *Эффективным множеством* функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ называется множество $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid |f(x)| < +\infty\}$. Функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ называется *l-собственной* или просто *собственной*, если $f(x) > -\infty$ для всех $x \in X$ и $\operatorname{dom} f \ne \varnothing$, и *$u$-собственной*, если функция $-f$ является l-собственной, т. е. если $f(x) < +\infty$ для всех $x \in X$ и $\operatorname{dom} f \ne \varnothing$.

1. Абстрактно $\mathcal{H}$-выпуклые функции

В данном разделе, следуя в основном монографиям [5;6], приведем необходимые для дальнейшего изложения понятия и положения абстрактной теории $\mathcal{H}$-выпуклых функций. Наряду с известными здесь же будут введены и некоторые новые понятия этой теории.

Пусть X — заданное абстрактное множество, элементы которого ниже будем называть точками. В данном разделе никакие топологические, алгебраические или иные структуры не предполагаются заданными на X.

Пусть, кроме того, задано некоторое множество $\mathcal{H} := \mathcal{H}(X, \mathbb{R})$ определенных на X вещественнозначных функций, которые далее будут рассматриваться как элементарные. Подчеркнем, что $\operatorname{dom} h = X$ для любой функции $h \in \mathcal{H}$.

Для произвольной функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ множество $S^-(\mathcal{H}, f) := \{h \in \mathcal{H} \mid h \le f\}$ называется *нижней $\mathcal{H}$-опорой функции f*, а функции h из $S^-(\mathcal{H}, f)$ — *$\mathcal{H}$-минорантами функции f*. Непосредственно из определения следует, что если $S^-(\mathcal{H}, f) \ne \varnothing$, то функция f является l-собственной и при этом

$$f(x) \ge \sup\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{H}), f)\} \text{ для всех } x \in X.$$

Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется *абстрактно $\mathcal{H}$-выпуклой* (далее просто *$\mathcal{H}$-выпуклой*), если

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{H}, f)\} \text{ для всех } x \in X \tag{1.1}$$

или, эквивалентно, если в $\mathcal{H}$ существует такое подмножество $\mathcal{H}'$, что

$$f(x) = \sup_{h \in \mathcal{H}'} h(x) \text{ для всех } x \in X. \tag{1.2}$$

Нетрудно убедиться, что если для подмножества $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$ выполняется равенство (1.2), то $\mathcal{H}' \subset S^-(\mathcal{H}, f)$.

Функция $f^{\mathcal{H}} : x \mapsto f^{\mathcal{H}}(x)$ такая, что

$$f^{\mathcal{H}}(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S^-(\mathcal{H}, f)\} \text{ для всех } x \in X, \tag{1.3}$$

называется *$\mathcal{H}$-выпуклой оболочкой функции f*.

Непосредственно из определения функции $f^{\mathcal{H}}$ получаем равенство

$$S^-(\mathcal{H}, f) = S^-(\mathcal{H}, f^{\mathcal{H}}), \tag{1.4}$$

из которого следует, что функция $f^{\mathcal{H}}$ есть наибольшая $\mathcal{H}$-выпуклая миноранта функции f.

Будем говорить, что $\mathcal{H}$-миноранта $h \in S^-(\mathcal{H}, f)$ функции f является *опорной в точке* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, если $h(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Множество всех $\mathcal{H}$-минорант функции f, опорных в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x})$.

Множество $S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x})$ не пусто тогда и только тогда, когда

$$f(\bar{x}) = \max\{h(\bar{x}) \mid h \in S^-(\mathcal{H}, f)\}, \tag{1.5}$$

при этом максимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях h из $S^-(\mathcal{H}, f)$, которые принадлежат $S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x})$.

Если $S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$, то точку $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ будем называть *нижней $\mathcal{H}$-опорной точкой функции f*. Множество всех нижних $\mathcal{H}$-опорных точек функции f будем обозначать символом $Q^-(\mathcal{H}, f)$.

Из равенств (1.4) и (1.5) легко сделать вывод, что множество нижних $\mathcal{H}$-опорных точек функции f содержится в множестве нижних $\mathcal{H}$-опорных точек ее $\mathcal{H}$-выпуклой оболочки $f^{\mathcal{H}}$. Обратное включение, вообще говоря, не имеет места.

Если $h \in S^-(\mathcal{H}, f)$, то любая функция $\tilde{h} \in \mathcal{H}$, такая что $\tilde{h} \leq h$, тоже принадлежит $S^-(\mathcal{H}, f)$ и при этом

$$\sup_{h \in S^-(\mathcal{H}, f)} h(x) = \sup_{h \in S^-(\mathcal{H}, f) \setminus \{\tilde{h}\}} h(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Таким образом, такая функция $\tilde{h}$ фактически не участвует в построении $\mathcal{H}$-выпуклой оболочки функции f и, следовательно, может быть удалена из $S^-(\mathcal{H}, f)$, причем равенство (1.3) при этом сохранится. Если функция $\bar{h} \in S^-(\mathcal{H}, f)$ такова, что в $S^-(\mathcal{H}, f)$ не существует функции h, удовлетворяющей условиям $\bar{h} \leq h$, $\bar{h} \neq h$, то в некоторых случаях $\bar{h}$ можно удалить из $S^-(\mathcal{H}, f)$ без нарушения равенства (1.3), а в других нельзя. Это наблюдение показывает, что для характеристики $\mathcal{H}$-выпуклой оболочки функции f можно воспользоваться следующим подмножеством из $S^-(\mathcal{H}, f)$, которое может быть существенно меньшим, чем $S^-(\mathcal{H}, f)$.

Символом $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)$ обозначим множество максимальных (относительно поточечного упорядочения) $\mathcal{H}$-минорант функции f, т. е. множество таких функций $\bar{h} \in S^-(\mathcal{H}, f)$, которые удовлетворяют следующему условию: если $h \in S^-(\mathcal{H}, f)$ и $\bar{h} \leq h$, то $h = \bar{h}$.

Пример, приведенный ниже, показывает, что, вообще говоря, для некоторых функций f и множеств элементарных функций $\mathcal{H}$ множество соответствующих им максимальных $\mathcal{H}$-минорант $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)$ может быть пустым, хотя множество всех $\mathcal{H}$-минорант $S^-(\mathcal{H}, f)$ непусто и функция f является $\mathcal{H}$-выпуклой.

Функцию $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ назовем *регулярно $\mathcal{H}$-выпуклой*, если $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f) \neq \varnothing$ и

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)\} \text{ для всех } x \in X.$$

Из (1.1) выводим: для того чтобы $\mathcal{H}$-выпуклая функция f была регулярно $\mathcal{H}$-выпуклой, достаточно, чтобы $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f) \neq \varnothing$ и для любой функции $h \in S^-(\mathcal{H}, f)$ существовала $\bar{h} \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)$, такая что $h \leq \bar{h}$.

Следующий простой пример показывает, что $\mathcal{H}$-выпуклая функция может не быть регулярно $\mathcal{H}$-выпуклой. Пусть $X = \mathbb{R}$ и пусть $\mathcal{H}$ — множество линейных функций с рациональным угловым коэффициентом, т. е. $\mathcal{H} = \{x \mapsto qx \mid q \in \mathbb{Q}\}$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел. Рассмотрим функцию $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ такую, что $f(x) = \sqrt{2}|x|$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда $S^-(\mathcal{H}, f) = \{x \mapsto qx \mid q \in \mathbb{Q}, -\sqrt{2} < q < \sqrt{2}\}$. Так как для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $f(x) = \sup\{qx \mid q \in \mathbb{Q}, -\sqrt{2} < q < \sqrt{2}\}$, то функция f является $\mathcal{H}$-выпуклой. Вместе с тем $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f) = \varnothing$ и, следовательно, функция f не является регулярно $\mathcal{H}$-выпуклой.

Множество максимальных $\mathcal{H}$-минорант функции f, опорных к f в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$. Таким образом, в соответствии с определением

$$S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x}) := S^-_{\max}(\mathcal{H}, f) \bigcap S^-(\mathcal{H}, f, \bar{x}).$$

Множество $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$ непусто тогда и только тогда, когда

$$f(\bar{x}) = \max\{h(\bar{x}) \mid h \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)\},$$

при этом максимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях h из $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f)\}$, которые принадлежат $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})\}$.

Симметричным образом может быть введено понятие абстрактно вогнутой функции, относительно заданного множества элементарных функций. Коротко приведем основные определения для этого случая.

Пусть задано множество функций $\mathcal{G} := \mathcal{G}(X, \mathbb{R})$. Множество $S^+(\mathcal{G}, f) := \{g \in \mathcal{G} \mid g \geq f\}$ называется *верхней $\mathcal{G}$-опорой функции* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$, при этом функции g из $S^+(\mathcal{G}, f)$ называются *$\mathcal{G}$-мажорантами функции* f. Если $S^+(\mathcal{G}, f) \neq \varnothing$, то f является u-собственной.

Вогнутой $\mathcal{G}$-оболочкой функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется функция $f_{\mathcal{G}} : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, определяемая равенством

$$f_{\mathcal{G}}(x) = \inf\{g(x) \mid g \in S^+(\mathcal{G}, f)\} \text{ для всех } x \in X. \tag{1.6}$$

Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется *абстрактно $\mathcal{G}$-вогнутой*, если $f = f_{\mathcal{G}}$.

Будем говорить, что $\mathcal{G}$-мажоранта $g \in S^+(\mathcal{G}, f)$ функции f является *опорной в точке* $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, если $g(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Множество всех $\mathcal{G}$-мажорант функции f, опорных в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x})$.

Множество $S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда

$$f(\bar{x}) = \min\{g(\bar{x}) \mid g \in S^+(\mathcal{G}, f)\},$$

при этом минимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях g из $S^+(\mathcal{G}, f)$, которые принадлежат $S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x})$.

Если $S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$, то точку $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ будем называть *верхней $\mathcal{G}$-опорной точкой функции* f. Множество всех верхних $\mathcal{G}$-опорных точек функции f будем обозначать символом $Q^+(\mathcal{G}, f)$.

Символом $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)$ обозначим множество минимальных (относительно поточечного упорядочения) $\mathcal{G}$-мажорант функции f, т.е. множество таких функций $\bar{g} \in S^+(\mathcal{G}, f)$, которые удовлетворяют следующему условию: если $g \in S^+(\mathcal{G}, f)$ и $\bar{g} \geq g$, то $g = \bar{g}$.

Функцию $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ назовем *регулярно $\mathcal{G}$-вогнутой*, если $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f) \neq \varnothing$ и

$$f(x) = \inf\{g(x) \mid g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)\} \text{ для всех } x \in X.$$

Из (1.6) выводим: для того чтобы $\mathcal{G}$-вогнутая функция f была регулярно $\mathcal{G}$-вогнутой, достаточно, чтобы $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f) \neq \varnothing$ и для любой функции $g \in S^+(\mathcal{G}, f)$ существовала $\bar{g} \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)$ такая, что $g \geq \bar{g}$.

Множество минимальных $\mathcal{G}$-мажорант функции f, опорных к f в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, будем обозначать символом $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$. Таким образом, в соответствии с определением

$$S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x}) := S^+_{\min}(\mathcal{G}, f) \bigcap S^+(\mathcal{G}, f, \bar{x}).$$

Множество $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$ непусто тогда и только тогда, когда

$$f(\bar{x}) = \min\{g(\bar{x}) \mid g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)\},$$

при этом минимум в последнем равенстве достигается именно на тех функциях из $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f)$, которые принадлежат $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$.

Представляет интерес изучение функций, которые являются одновременно (регулярно) $\mathcal{H}$-выпуклыми и (регулярно) $\mathcal{G}$-вогнутыми и при этом $\mathcal{G} = -\mathcal{H}$, например когда $\mathcal{H}$ — конус в $\mathbb{R}^X$. В этом случае функция f является $\mathcal{G}$-вогнутой тогда и только тогда, когда $-f$ есть $\mathcal{H}$-выпуклая функция. Если, более того, $\mathcal{H} = -\mathcal{H}$, в частности если $\mathcal{H}$ — векторное подпространство в $\mathbb{R}^X$, то функция f является $\mathcal{H}$-вогнутой тогда и только тогда, когда $-f$ $\mathcal{H}$-выпукла.

Рассмотрим, как понятия абстрактной $\mathcal{H}$-выпуклости соотносятся с понятиями классической выпуклости функций.

Пусть X — вещественное локально выпуклое линейное топологическое пространство, а $\mathcal{H} = \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ — векторное пространство непрерывных аффинных функций. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является классически выпуклой (вогнутой) и полунепрерывной снизу (сверху);

(2) функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-выпуклой ($\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-вогнутой);

(3) функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ является регулярно $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-выпуклой (регулярно $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-вогнутой).

Для любой функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ ее $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-опора $S^-(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f)$ состоит из всех непрерывных аффинных минорант функции f, и если она непуста, то содержит большое число функций и в силу этого является неудобной для конструктивной работы с ней. Поэтому вместо $S^-(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f)$ в классическом выпуклом анализе используется фактически множество $S^-_{\max}(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f)$ максимальных $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-минорант функции f, которое задается при помощи сопряженной функции. Продемонстрируем это.

Любая аффинная непрерывная функция $a \in \mathcal{A}(X, \mathbb{R})$ может быть представлена в виде $a(x) = x^*(x) - c \ \forall\, x \in X$, где $x^* \in X^*$ (X^* — пространство линейных непрерывных функций, определенных на X), $c \in \mathbb{R}$. С учетом этого представления для любой функции $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ множество $S^-_{\max}(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f)$ ее максимальных $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-минорант может быть задано равенством $S^-_{\max}(\mathcal{A}(X, \mathbb{R}), f) = \{x \mapsto x^*(x) - f^*(x^*) \mid x^* \in X^*\}$, где $f^*(x^*) := \sup_{x \in X}(x^*(x) - f(x)) \ \forall\, x^* \in X^*$ — функция, сопряженная f. Вторая сопряженная f^{**} функции f, определяемая равенством $f^{**}(x) := \sup_{x^* \in X^*}(x^*(x) - f^*(x^*)) \ \forall\, x \in X$, является при этом не чем иным, как $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-выпуклой оболочкой функции f.

Максимальная $\mathcal{A}(X, \mathbb{R})$-миноранта $x \mapsto x^*(x) - f^*(x^*)$, $x \in X$, функции f является опорной в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ в том и только том случае, когда $x^*(\bar{x}) - f^*(x^*) = f(\bar{x})$, что эквивалентно условию $x^* \in \partial f(\bar{x})$, где $\partial f(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid x^*(x - \bar{x}) \leq f(x) - f(\bar{x}) \ \forall\, x \in X\}$ — классический субдифференциал Моро — Рокафеллара функции f в точке $\bar{x}$ [8] (см. также [9, определение 1.16.1]).

Таким образом, в теории абстрактной $\mathcal{H}$-выпуклости множество максимальных $\mathcal{H}$-минорант, опорных к функции f в точке $\bar{x}$, призвано играть ту же роль, какую в классическом выпуклом анализе играет субдифференциал функции в точке. В частности, используя множество $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$ максимальных $\mathcal{H}$-минорант, опорных к функции f в точке $\bar{x}$, мы можем получить условия для точек глобального минимума (максимума) функции f.

Теорема 1 (достаточное условие глобального минимума). *Пусть заданы функция $f\colon X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, множество элементарных функций $\mathcal{H} = \mathcal{H}(X, \mathbb{R})$ и точка $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ такие, что $S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$. Тогда, если существует $h \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$, для которой $\bar{x}$ — точка глобального минимума на подмножестве $\Omega \subseteq X$, то и для функции f точка $\bar{x}$ является точкой глобального минимума на подмножестве Ω.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если для некоторой функции $h \in S^-_{\max}(\mathcal{H}, f, \bar{x})$ точка $\bar{x}$ является точкой глобального минимума на множестве $\Omega \subseteq X$, то $f(\bar{x}) = h(\bar{x}) \leq h(x) \leq f(x) \ \forall\, x \in \Omega$. Откуда заключаем, что $\bar{x}$ является точкой глобального минимума функции f на подмножестве Ω. $\square$

Теорема 2 (необходимое условие глобального минимума). *Пусть для функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, множества элементарных функций $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X, \mathbb{R})$ и точки $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ множество минимальных опорных $\mathcal{G}$-мажорант к функции f в точке $\bar{x}$ непусто, т. е. $S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x}) \neq \varnothing$. Если $\bar{x}$ — точка глобального минимума на подмножестве $\Omega \subseteq X$ для функции f, то тогда для* *любой функции* $g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$ *точка* $\bar{x}$ *также является точкой глобального минимума на подмножестве* Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(\bar{x}) \le f(x)\ \forall\ x \in \Omega$, то для любой функции $g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$ имеем $g(\bar{x}) = f(\bar{x}) \le f(x) \le g(x)\ \forall\ x \in \Omega$. Следовательно, для любой функции $g \in S^+_{\min}(\mathcal{G}, f, \bar{x})$ точка $\bar{x}$ является точкой глобального минимума на подмножестве Ω. □

2. Выпуклость функций относительно множества липшицевых функций

Пусть X — метрическое пространство, $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ — функция расстояния на X, $\varphi : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — расширенно-вещественнозначная функция, определенная на X.

Говорят (см., например, [5, с. 59]), что функция φ *удовлетворяет на* X *условию Липшица* с константой Липшица $k > 0$ или что φ является k*-липшицевой на* X, если $\operatorname{dom}\varphi = X$ и

$$|\varphi(x') - \varphi(x)| \le kd(x, x')\ \forall\ x, x' \in X.$$

Функция φ называется *липшицевой на* X (*удовлетворяет условию Липшица на* X), если она является k-липшицевой при некотором $k > 0$.

Множество всех функций $\varphi \in \overline{\mathbb{R}}^X$, удовлетворяющих на X условию Липшица с константой $k > 0$, будем обозначать символом $\mathcal{L}_k := \mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$, а множество всех липшицевых на X функций — символом $\mathcal{L} := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Непосредственно из определений следует, что $\mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{L}_k(X, \mathbb{R})$.

Ниже, если это не может вызвать недопонимание, вместо “функция φ является k-липшицевой на X или липшицевой на X” будем говорить просто, что “φ является k-липшицевой или липшицевой”.

Рассмотрим в качестве множества элементарных функций пространство $\mathcal{L} := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ всех липшицевых вещественнозначных функций, определенных на метрическом пространстве X. Предположим, что для функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ множество $\mathcal{L}$-минорант $S^-(\mathcal{L}, f)$ непусто. Это предположение эквивалентно тому, что функция f ограничена снизу некоторой липшицевой функцией. Как следует из [12, Proposition 4.2], если функция f такова, что $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$, то f является L-выпуклой в том и только том случае, когда она является полунепрерывной снизу на X. Вместе с тем, несмотря на то что для некоторой функции f выполняется условие $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$, множество $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f)$ максимальных $\mathcal{L}$-минорант функции f может быть пустым. Например, для функции $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, определенной равенством $f(x) = -\sqrt{|x|}$ для всех $x \in \mathbb{R}$, множество $S^-(\mathcal{L}, f)$ непусто, поскольку f ограничена снизу липшицевой функцией $g(x) = -1 - |x|, x \in \mathbb{R}$. В то же время, поскольку f не является липшицевой, $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) = \varnothing$. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть функция* $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ *такова, что* $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$. *Тогда* $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* f *является липшицевой на* X, *при этом* $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) = \{f\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Предположим, что функция f липшицева. Тогда, как это нетрудно видеть, $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) = \{f\} \ne \varnothing$.

Необходимость. В силу условия $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$ из [12, Proposition 4.2] следует, что существует $\bar{k} > 0$ такое, что функция $f^{(k)}$, определенная равенством

$$f^{(k)}(x) := \inf_{y \in X} \{f(y) + kd(x, y)\}\ \forall\ x \in X, \tag{2.1}$$

является k-липшицевой для любого $k \ge \bar{k}$, причем $f^{(k)} \le f$ для всех $k \ge \bar{k}$, что влечет $f^{(k)} \in S^-(\mathcal{L}, f)$. Более того, для каждого $k \ge \bar{k}$ функция $f^{(k)}$ является наибольшей k-липшицевой минорантой функции f. Наконец, $f^{(k_1)} \le f^{(k_2)}$ для любых $\bar{k} \le k_1 \le k_2$, при этом возможны два случая:

1) существует k_0 такое, что $f^{(k_1)} = f^{(k_2)}$ для всех $k_0 \le k_1 \le k_2$;

2) $f^{(k_1)} < f^{(k_2)}$ для любых $\bar{k} \le k_1 < k_2$.

Покажем, что случай 2) невозможен. Рассмотрим произвольную $\mathcal{L}$-миноранту $h \in S^-(\mathcal{L}, f)$. Если соответствующая ей константа Липшица равна k_1, то $h < f^{(k_2)}$, где $k_2 > k_1$, и, следовательно, h не может быть максимальной. В силу произвольного выбора h заключаем, что в случае 2) в $S^-(\mathcal{L}, f)$ не существует максимальных элементов, но это противоречит предположению $S^-_{\max}(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$. Значит, имеет место случай 1) и, следовательно, $f = f^{(k)}$ для любого $k \ge k_0$. Отсюда вытекает, что функция f липшицева. $\square$

Теорема 4. *Пусть функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ ограничена снизу $\bar{k}$-липшицевой функцией. Тогда $\mathcal{L}$-выпуклая оболочка f совпадает с наибольшей полунепрерывной снизу минорантой функции f и удовлетворяет равенству*

$$f^{\mathcal{L}}(x) = \sup_{k \ge \bar{k}} f^{(k)}(x) \text{ для всех } x \in X,$$

где $f^{(k)}$ — наибольшая k-липшицева миноранта функции f, определяемая равенством (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждения следует из [12, Proposition 4.2]. $\square$

Следствие 1. *Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}^X$ является $\mathcal{L}$-выпуклой тогда и только тогда, когда она полунепрерывна снизу и ограничена снизу некоторой $\bar{k}$-липшицевой функцией, при этом*

$$f(x) = \sup_{k \ge \bar{k}} f^{(k)}(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Теорема 5. *Пусть $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — расширенно-вещественнозначная функция, определенная на метрическом пространстве X, и пусть $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Тогда $S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x}) \ne \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует вещественное число $k > 0$ такое, что*

$$f(x) \ge f(\bar{x}) - kd(x, \bar{x}) \ \forall\, x \in X. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x})$ непусто, и пусть $h \in S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x})$. Так как h является липшицевой, то существует $k > 0$ такое, что $|h(x) - h(y)| \le kd(x, y)$ для всех $x, y \in X$. Полагая $y = \bar{x}$ и учитывая, что $h \le f$ и $h(\bar{x}) = f(\bar{x})$, приходим из последнего неравенства к (2.2).

Предположим теперь, что при некотором $k > 0$ имеет место неравенство (2.2). Заметим, что функция $\tilde{h} : x \mapsto f(\bar{x}) - kd(x, \bar{x})$ является липшицевой на X и $\tilde{h}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Следовательно, $\tilde{h} \in S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x})$ и, значит, $S^-(\mathcal{L}, f, \bar{x}) \ne \varnothing$. $\square$

Теорема 6. *Пусть функция $f \in \overline{\mathbb{R}}^X$ такова, что $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$. Множество нижних $\mathcal{L}$-опорных точек функции f совпадает с множеством всех таких точек $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$, для которых существует $k > 0$ такое, что $f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})$, т. е.*

$$Q^-(\mathcal{L}, f) = \{\bar{x} \in \operatorname{dom} f \mid \exists k > 0 \text{ такое, что } f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $S^-(\mathcal{L}, f) \ne \varnothing$, то существует число $\bar{k} > 0$ такое, что $f^{(k)} \in S^-(\mathcal{L}, f)$ для всех $k \ge \bar{k}$. Из этого факта и определения $\mathcal{L}$-опорных точек функции f следует, что $\{\bar{x} \in X \mid \exists k > 0 \text{ такое, что } f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})\} \subseteq Q^-(\mathcal{L}, f)$.

Рассмотрим теперь произвольную точку $\bar{x} \in Q^-(\mathcal{L}, f)$. Из определения множества $Q^-(\mathcal{L}, f)$ следует, что существует $\mathcal{L}$-миноранта h функции f такая, что $f(\bar{x}) = h(\bar{x})$. Если $k > 0$ — константа Липшица функции h, то $h \le f^{(k)} \le f$ и, следовательно, $h(\bar{x}) \le f^{(k)}(\bar{x}) \le f(\bar{x})$. Так как $f(\bar{x}) = h(\bar{x})$, то и $f^{(k)}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Значит, $Q^-(\mathcal{L}, f) \subseteq \{\bar{x} \in X \mid \exists k > 0 \text{ такое, что } f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})\}$. $\square$

З а м е ч а н и е. Если для точки $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ при некотором $k > 0$ выполняется равенство $f(\bar{x}) = f^{(k)}(\bar{x})$, то $f(\bar{x}) = f^{(s)}(\bar{x})$ при любом $s \ge k$.

Теорема 7. *Пусть X — полное метрическое пространство, и пусть функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ полунепрерывна снизу и, кроме того, ограничена снизу на X некоторой липшицевой функцией. Тогда множество $Q^{-}(\mathcal{L}, f)$ нижних $\mathcal{L}$-опорных точек функции f плотно в* $\operatorname{dom} f$.

Доказательство. В силу следствия 1 существует вещественное число $\bar{k} > 0$ такое, что

$$f(x) = \sup_{k \geq \bar{k}} f^{(k)}(x) \text{ для всех } x \in X, \tag{2.3}$$

где $f^{(k)}$ — наибольшая k-липшицева миноранта функции f, определяемая равенством (2.1).

Рассмотрим произвольную точку $a \in \operatorname{dom} f$. Из равенства (2.3) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $k_\varepsilon \geq \bar{k}$ такое, что $f(a) - \varepsilon < f^{(k_\varepsilon)}(a)$. Зафиксируем некоторое $\varepsilon > 0$ и соответствующее ему k_ε. Тогда функция $g : x \mapsto f(x) - f^{(k_\varepsilon)}(x)$ является полунепрерывной снизу на X и $\inf\limits_{x \in X} g(x) \geq 0$. Более того, $g(a) < \inf\limits_{x \in X} g(x) + \varepsilon$. Таким образом, для функции g, точки a и числа $\varepsilon > 0$ выполнены все предположения вариационного принципа Экланда [7; 9; 14], из которого следует, что для любого $\delta > 0$ найдется точка $x_\delta \in X$, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $g(x_\delta) + \dfrac{\varepsilon}{\delta} d(x_\delta, a) \leq g(a)$;

(ii) $d(x_\delta, a) \leq \delta$;

(iii) $g(x_\delta) < g(x) + \dfrac{\varepsilon}{\delta} d(x, x_\delta)$ для всех $x \in X, x \neq x_\delta$.

Функция $h\colon x \mapsto f^{(k_\varepsilon)}(x) - \dfrac{\varepsilon}{\delta} d(x, x_\delta) + (f(x_\delta) - f^{(k_\varepsilon)}(x_\delta))$ является липшицевой с константой Липшица $L \geq \max\left\{k_\varepsilon, \dfrac{\varepsilon}{\delta}\right\}$ и, кроме того, $h(x_\delta) = f(x_\delta)$. Из условия (iii) следует, что функция h является опорной $\mathcal{L}$-минорантой функции f в точке x_δ, причем в силу условий (i) и (ii) точка x_δ принадлежит $(\operatorname{dom} f) \cap B_\delta(a)$, где $B_\delta(a) := \{x \in X \mid d(x_\delta, a) \leq \delta\}$. Так как точка $a \in \operatorname{dom} f$ и число $\delta > 0$ были выбраны произвольными, то заключаем, что любая окрестность каждой точки из $\operatorname{dom} f$ содержит нижнюю $\mathcal{L}$-опорную точку функции f. □

Из теорем 6 и 7 и замечания получаем

Следствие 2. *Пусть X — полное метрическое пространство, и пусть функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — полунепрерывна снизу и, кроме того, ограничена снизу на X некоторой липшицевой функцией. Тогда для любой точки $a \in \operatorname{dom} f$ и любого числа $\delta > 0$ существуют точка $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ и число $k > 0$ такие, что $d(\bar{x}, a) \leq \delta$ и $f(\bar{x}) = f^{(s)}(\bar{x})$ для всех $s \geq k$.*

3. Выпуклость функций относительно множества липшицевых вогнутых функций

В этом разделе будем предполагать, что X является вещественным нормированным пространством. В качестве множества элементарных функций будем рассматривать множество $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}} := \mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}(X, \mathbb{R})$, состоящее из липшицевых (на X) вогнутых функций.

Напомним, что функция $\varphi : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ называется *вогнутой*, если ее подграфик

$$\operatorname{hypo} \varphi := \{(x, \gamma) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(x) \geq \gamma\}$$

является выпуклым подмножеством в $X \times \mathbb{R}$.

Из результатов работы [12, Proposition 4.2 и Theorem 4.8] следует

Теорема 8. *Любая липшицева функция $f : X \mapsto \mathbb{R}$, определенная на нормированном пространстве X является регулярно $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-выпуклой, причем*

$$f(x) = \max_{h \in S^{-}_{max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)} h(x) \textit{ для всех } x \in X$$

и, следовательно, любая точка $x \in X$ является нижней $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-опорной точкой липшицевой функции f.

Как показывают представленные ниже теоремы 9 и 10, класс регулярно $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-выпуклых функций существенно шире пространства липшицевых функций, однако при этом не всякая точка эффективной области функции является $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-опорной точкой.

Теорема 9. *Для любой функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ следующие три утверждения эквивалентны*:
(i) *функция f является регулярно $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-выпуклой*;
(ii) *функция f является $\mathcal{L}$-выпуклой*;
(iii) *функция f полунепрерывна снизу на X и ограничена снизу некоторой функцией, удовлетворяющей условию Липшица на всем X.*

Доказательство. Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из включения $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}(X, \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$; эквивалентности (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) и (iii) $\Leftrightarrow$ (i) фактически доказаны соответственно в Proposition 4.2 и Theorem 4.8 из [12]. $\square$

Теорема 10. *Пусть X — полное нормированное пространство и пусть функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — полунепрерывна снизу и, кроме того, ограничена снизу на X некоторой липшицевой функцией. Тогда множество $Q^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)$ нижних $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-опорных точек функции f совпадает с множеством $Q^-(\mathcal{L}, f)$ нижних $\mathcal{L}$-опорных точек функции f и является плотным в* $\operatorname{dom} f$.

Доказательство. Так как $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}(X, \overline{\mathbb{R}}) \subset \mathcal{L}(X, \overline{\mathbb{R}})$, то $S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f) \subset S^-(\mathcal{L}, f)$ и, следовательно, $Q^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f) \subset Q^-(\mathcal{L}, f)$. Докажем обратное включение. Пусть $\bar{x} \in Q^-(\mathcal{L}, f)$. В силу теоремы 6 существует $k > 0$ такое, что $f^{(k)}(\bar{x}) = f(\bar{x})$. Поскольку $f^{(k)}$ является липшицевой, то по теореме 8 любая точка $x \in X$, а значит и точка $\bar{x}$, является $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-опорной для функции $f^{(k)}$. Следовательно, существует $\bar{h} \in S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f^{(k)})$ такая, что $f^{(k)}(\bar{x}) = \bar{h}(\bar{x})$. Поскольку $f^{(k)} \leq f$, то $S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f^{(k)}) \subset S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)$. Учитывая это включение и равенство $f^{(k)}(\bar{x}) = f(\bar{x})$, заключаем, что $\bar{h} \in S^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)$ и $f(\bar{x}) = \bar{h}(\bar{x})$, т. е. что $\bar{h}$ является опорной $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-минорантой функции f в точке $\bar{x}$. Это доказывает, что $\bar{x} \in Q^-(\mathcal{L}, f)$. Таким образом, $Q^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f) = Q^-(\mathcal{L}, f)$. Поскольку в силу теоремы 7 $Q^-(\mathcal{L}, f)$ плотно в $\operatorname{dom} f$, то $Q^-(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f)$ также плотно в $\operatorname{dom} f$. $\square$

Теорема 11 (критерий глобального минимума функции). *Функция $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ достигает глобального минимума в точке $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ в том и только том случае, когда $c_{f(\bar{x})} \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$, где $c_{f(\bar{x})} : X \ni x \mapsto f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ — константная функция, равная $f(\bar{x})$ для всех $x \in X$.*

Доказательство. Справедливость данного критерия следует непосредственно из определений глобального минимума функции f и множества $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$, а также из того, что любая константная, более того, аффинная функция является вогнутой. $\square$

Теорема 12 (необходимое условие глобального максимума). *Пусть для функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ и точки $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ множество $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$ максимальных опорных $\mathcal{L}\widehat{C}$-минорант функции f в точке $\bar{x}$ непусто. Тогда если $\bar{x}$ является точкой глобального максимума функции f, то $0_X \in \partial^+ g(\bar{x})$ для любой функции $g \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$.*

Здесь $\partial^+ g(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid x^*(x - \bar{x}) \geq g(x) - g(\bar{x}) \ \forall\, x \in X\}$ — классический супердифференциал Моро — Рокафеллара вогнутой функции g в точке $\bar{x}$, а 0_X — нулевой линейный функционал, определенный на X.

Доказательство. Если точка $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$ является точкой глобального максимума функции f, то для любой функции $g \in S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{C}, f, \bar{x})$ точка $\bar{x}$ также является точкой глобального максимума, а поскольку функции g вогнуты, то это равносильно условию $0_X \in \partial^+ g(\bar{x})$. $\square$

Заключение

Как следует из теорем 9 и 10, каждая полунепрерывная снизу функции $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, которая, кроме того, ограничена снизу некоторой липшицевой функцией, в любой точке $\bar{x}$ плотного подмножества ее эффективной области $\operatorname{dom} f$ имеет непустое множество $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f, \bar{x})$ максимальных опорных $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-минорант функции f. Нетрудно убедиться в том, что если функция f полунепрерывна снизу и выпукла, то каждая максимальная опорная $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-миноранта функции f является непрерывной аффинной функцией (это следует из теорем об отделимости выпуклых множеств [9, с. 79] или, более конкретно, из теоремы о сэндвиче [15, Corollary 1.76]), при этом элементы множества $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f, \bar{x})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с субградиентами классического субдифференциала Моро — Рокафеллара [9, определение 1.16.1] $\partial f(\bar{x})$ функции f в точке $\bar{x}$. Таким образом, множество $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f, \bar{x})$ максимальных опорных $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-минорант функции в точке распространяет фактически понятие классического субдифференциала Моро — Рокафеллара для полунепрерывных снизу выпуклых функций на существенно более широкий класс полунепрерывных функций. Как известно, для классически выпуклых функций существуют два эквивалентных определения субдифференциала: глобальное [8; 9, определение 1.16.1] и локальное [16, с. 44]. Введенное в данной статье множество $S^-_{\max}(\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}, f, \bar{x})$ максимальных опорных $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-минорант функции распространяет глобальное определение классического субдифференциала. В то же время исчерпывающий субдифференциал Демьянова — Рубинова, введенный ранее в [12; 13], является $\mathcal{L}\widehat{\mathcal{C}}$-распространением локального определения классического субдифференциала. В плане дальнейших исследований представляется перспективной разработка методов анализа негладких функций на основе этих двух конструкций, а также изучение связи между ними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Singer I.** Abstract Convex Analysis. N Y: Wiley-Interscience Publ., 1997. 491 p. ISBN: 978-0471160151 .
2. **Солтан В.П.** Введение в аксиоматическую теорию выпуклости. Кишинев: Штиинца, 1984. 223 с.
3. **Кутателадзе С.С., Рубинов А.М.** Двойственность Минковского и ее приложения // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, вып. 3(165). С. 127–176.
4. **Кутателадзе С.С., Рубинов А.М.** Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1976. 254 с.
5. **Pallaschke D., Rolewicz S.** Foundations of mathematical optimization (Convex analysis without linearity). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 596 p. doi: 10.1007/978-94-017-1588-1 .
6. **Rubinov A.M.** Abstract convexity and global optimization. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. 490 p. ISBN 978-1-4757-3200-9 .
7. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
8. **Brøndsted A., Rockafellar R.T.** On the subdifferentiability of convex functions // Proc. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 16, no. 4. P. 605–611. doi: 10.2307/2033889 .
9. **Половинкин Е.С., Балашов М.В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с.
10. **Bishop E., Phelps R.R.** The support functionals of convex sets // Convexity / ed. V. Klee: Proc. of Symposia in Pure Mathematics. Vol. VII. Providence, Rhode Island: American Math. Soc., 1963. P. 27–35. doi: 10.1090/pspum/007/0154092 .
11. **Гороховик В.В.** О представлении полунепрерывных сверху функций, определенных на бесконечномерных нормированных пространствах, в виде нижних огибающих семейств выпуклых функций // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23, № 1. С. 88–102. doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-88-102 .
12. **Gorokhovik V.V.** Minimal convex majorants of functions and Demyanov–Rubinov exhaustive super(sub)differentials // Optimization. J. Math. Programming and Operations Research. Published online: 09 Sep 2018. doi: 10.1080/02331934.2018.1518446 .
13. **Gorokhovik V.V.** Demyanov–Rubinov subdifferentials of real-valued functions // Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA) / ed. Polyakova: Proc. Conf. Piscataway, New Jersey: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2017. P. 122–125. doi: 10.1109/cnsa.2017.7973962;

14. **Ekeland I.** Nonconvex minimization problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1979. Vol. 1, no. 3. P. 432–467.
15. **Penot J.P.** Calculus without derivatives. N Y: Springer, 2013. 524 p. doi: 10.1007/978-1-4614-4538-8 .
16. **Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** Выпуклый анализ и его приложения. М.: Едиториал УРСС, 2003. 176 с. SBN-13: 978-0821835258 .

Поступила 20.04.2019
После доработки 15.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Гороховик Валентин Викентьевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. НАН Беларуси
зав. отделом
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск
e-mail: gorokh@im.bas-net.by

Тыкун Александр Станиславович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Белорусский государственный университет
механико-математический факультет
г. Минск
e-mail: tykoun@bsu.by

REFERENCES

1. Singer I. *Abstract convex analysis.* N Y: Wiley-Interscience Publ., 1997, 491 p. ISBN: 978-0471160151 .
2. Soltan V.P. *Vvedenie v aksiomaticheskuyu teoriyu vypuklosti* [Introduction to axiomatic convexity theory]. Kishinev: Shtiintsa Publ., 1984, 223 p.
3. Kutateladze S.S., Rubinov A.M. Minkowski duality and its applications. *Russian Math Surveys*, 1972, vol. 27, no. 3, pp. 137–191. doi: 10.1070/RM1972v027n03ABEH001380 .
4. Kutateladze S.S., Rubinov A.M. *Dvoistvennost' Minkovskogo i ee prilozheniya* [Minkowski Duality and Its Applications]. Novosibirsk: Nauka Publ., 1976, 254 p.
5. Pallaschke D., Rolewicz S. *Foundations of mathematical optimization* [Convex analysis without linearity]. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 596 p. DOI: 10.1007/978-94-017-1588-1 .
6. Rubinov A.M. *Abstract convexity and global optimization.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000, 490 p. ISBN: 978-1-4757-3200-9 .
7. Ekeland I, Temam R. *Convex analysis and variational problems.* Amsterdam: North-Holland, 1976, 402 p. Translated to Russian under the title *Vypuklyi analiz i variatsionnye problemy.* Moscow: Mir Publ., 1979, 399 p.
8. Brøndsted A., Rockafellar R.T. On the subdifferentiability of convex functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 16, no. 4, pp. 605–611. doi: 10.2307/2033889 .
9. Polovinkin E.S., Balashov M.V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 416 p. ISBN: 5-9221-0499-3 .
10. Bishop E., Phelps .R. The support functionals of convex sets. In: V. Klee (ed.), *Convexity: Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, vol. VII. Providence, RI: American Math. Soc., 1963, pp. 27–35. doi: 10.1090/pspum/007/0154092 .
11. Gorokhovik V.V. On the representation of upper semicontinuous functions defined on infinite-dimensional normed spaces as lower envelopes of families of convex functions. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 88–102 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2017-23-1-88-102 .
12. Gorokhovik V.V. Minimal convex majorants of functions and Demyanov–Rubinov exhaustive super(sub)differentials. *Optimization. J. Math. Programming and Operations Research.* Published online: 09 Sep 2018. doi: 10.1080/02331934.2018.1518446 .

13. Gorokhovik V.V. Demyanov–Rubinov subdifferentials of real-valued functions. In: Polyakova L.N. (ed). *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics* (Dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA), Proc. Conf., New Jersey: Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), 2017, pp. 122–125. doi: 10.1109/cnsa.2017.7973962 .
14. Ekeland I. Nonconvex minimization problems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1979, vol. 1, no. 3, pp. 443–474.
15. Penot J.P. *Calculus without Derivatives.* N Y: Springer, 2013, 524 p. doi: 10.1007/978-1-4614-4538-8 .
16. Magaril-Ilyaev G.G., Tikhomirov V.M. *Convex analysis: Theory and applications.* N Y: American Math. Soc., 2003, 183 p. ISBN: 978-0821835258 . Original Russian text published in Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. *Vypuklyi analiz i ego prilozheniya.* Moscow: Editorial URSS, 2003, 176 p.

Received April 20, 2019
Revised May 15, 2019
Accepted May 20, 2019

Funding Agency: This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus for 2016–2020 "Convergence 2020" (project no. 1.4.01).

Valentin Vikent'evich Gorokhovik, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of NAS of Belarus, Prof., Institute of Mathematics, The National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: gorokh@im.bas-net.by .

Alexander Stanislavovich Tykoun, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: tykoun@bsu.by .

Cite this article as: V. V. Gorokhovik, A. S. Tykoun. Abstract convexity of functions with respect to the set of Lipschitz (concave) functions, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 73–85 .