ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

К АСИМПТОТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ ОПТИМИЗАЦИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ[1]

Р. Габасов, А. И. Калинин, Ф. М. Кириллова, Л. И. Лавринович

Динамические системы, которые в своих математических моделях содержат малые параметры при нелинейностях, принято называть квазилинейными. Статья представляет обзор результатов, полученных для задач оптимизации квазилинейных динамических систем в Минской школе по оптимальному управлению. Рассмотрены задачи оптимального быстродействия, терминального управления с подвижным правым концом траекторий, управления минимальной силой и задачи минимизации интегральных квадратичных функционалов. В основе подхода к исследованию лежит идея специальной конечномерной параметризации оптимальных управлений. Вычисления при построении асимптотических приближений к оптимальным управлениям в рассмотренных квазилинейных задачах сводятся к решению базовых задач, которые, в отличие от исходных, являются задачами оптимизации линейных систем, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Ключевые слова: квазилинейные системы, малый параметр, асимптотические приближения, конечномерная параметризация, оптимальное управление, обратная связь.

R. Gabasov, A. I. Kalinin, F. M. Kirillova, L. I. Lavrinovich. On asymptotic optimization methods for quasilinear control systems.

Mathematical models of dynamical systems containing small parameters in nonlinearities are usually called quasilinear systems. We present a survey of results obtained for problems of optimization of quasilinear dynamical systems in the Minsk scientific school on optimal control. We consider time-optimal control problems, terminal control problems with variable right ends of trajectories, minimum force control problems, and problems of minimization of integral quadratic functionals. The research is based on the idea of a special finite-dimensional parameterization of optimal controls. The computation of asymptotic approximations to optimal controls in the quasilinear problems under consideration is reduced to solving some basic problems, which, unlike the original problems for quasilinear systems, are optimization problems for linear systems, to the integration of linear differential equations, and to finding roots of nonsingular linear algebraic systems.

Keywords: quasilinear systems, small parameter, asymptotic approximation, finite-dimensional parameterization, optimal control, feedback control.

MSC: 4902

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-62-72

Введение

Многие прикладные задачи оптимального управления в своих математических моделях содержат малые параметры, причем зачастую модели существенно упрощаются (понижается порядок дифференциальных уравнений, исчезают сложные члены и т. п.), если эти параметры положить равными нулю. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы, основное достоинство которых состоит в том, что при их применении исходные задачи, которые принято называть возмущенными, сводятся к коррекции решений более простых задач оптимального управления.

Наиболее эффективны асимптотические методы при оптимизации квазилинейных динамических систем. Квазилинейными называют системы управления, содержащие малые параметры при нелинейностях. Выигрыш от применения асимптотических методов к задачам оптимального управления такими системами состоит, прежде всего, в том, что вместо исходных, по существу нелинейных, задач решаются задачи оптимизации линейных динамических

[1]Работа выполнена при поддержке ГПНИ “Конвергенция-2020”, Беларусь.

систем. Среди первых работ, в которых исследовались задачи оптимального управления квазилинейными системами, отметим [1; 24–26; 28; 30; 32; 33].

Настоящая статья является обзорной. В ней представлены результаты, полученные для задач оптимизации квазилинейных динамических систем в Минской школе по оптимальному управлению. В первом разделе вводятся понятия, которые позволяют уточнить, что понимается под асимптотическими приближениями к решению возмущенных задач оптимального управления. Во втором разделе излагается методика исследования, с помощью которой построены асимптотические приближения к решениям широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач, в том числе и квазилинейных. В разд. 3, 4 приведены результаты качественного анализа рассмотренных задач оптимизации квазилинейных систем и алгоритмы построения асимптотических приближений к их решениям.

1. Возмущенные задачи оптимального управления

Под возмущенной задачей оптимального управления типа Больца понимается семейство задач вида

$$\dot{x} = f(x, u, t, \mu), \quad x(t_*) = x_*, \quad u(t) \in U, \quad t \in [t_*, t^*], \tag{1.1}$$

$$\varphi_i(x(t^*), \mu) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.2}$$

$$J(u) = \varphi_0(x(t^*), \mu) + \int\limits_{t_*}^{t^*} f_0(x, u, t, \mu) dt \to \max, \tag{1.3}$$

где μ — малый положительный параметр ($0 < \mu < \mu_0$); u — r-вектор управления; x — n-вектор фазовых переменных; t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$).

Определение 1. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами и значениями из множества U назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка ($N = 0, 1, 2 \dots$), если оно отклоняется по критерию качества (1.3) от оптимального управления на величину $O(\mu^{N+1})$, а порожденная им траектория $x(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, системы (1.1) удовлетворяет терминальным ограничениям (1.2) с точностью того же порядка малости.

Определение 2. Вектор-функцию $u^{(N)}(x, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (x_*, t_*) ($t_* < t^*$) имеет место $u^{(N)}(x_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*]$, — асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1.1)–(1.3).

Возмущенной задачей оптимального быстродействия назовем семейство задач вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = f(x, u, t, \mu), \quad x(t_*) = x_*, \quad x(t^*) = 0, \\ &u(t) \in U, \quad t \in [t_*, t^*], \quad J(u) = t^* \to \min, \end{aligned} \tag{1.4}$$

в котором μ — малый положительный параметр.

Определение 3. Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in [t_*, t^*(\mu)]$, с кусочно-непрерывными компонентами и значениями из множества U, назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1.4), если оно переводит динамическую систему в фазовое состояние $O(\mu^{N+1})$, а конечный момент времени $t^*(\mu)$ отличается от момента оптимального быстродействия на величину того же порядка малости.

Асимптотически субоптимальные обратные связи в данном случае определяются так же, как и в задаче (1.1)–(1.3).

В исследовании задач оптимального управления с малыми параметрами, как и в асимптотической теории дифференциальных уравнений, можно выделить два направления. К первому относятся работы по оптимизации систем с регулярными возмущениями, в том числе и квазилинейными. Второе направление включает в себя исследование сингулярно возмущенных задач. Деление задач с малыми параметрами на регулярно и сингулярно возмущенные является условным. Назовем задачу оптимального управления *регулярно возмущенной*, если формирующие ее функции такие, что их можно непрерывно доопределить при $\mu = 0$ для любых возможных значений остальных аргументов. В противном случае будем считать, что задача является *сингулярно возмущенной*.

2. Методика исследования

В работах [5; 13] предложен подход к исследованию возмущенных задач оптимизации динамических систем, в основе которого лежит специальная конечномерная параметризация оптимальных управлений. С его помощью разработаны алгоритмы построения асимптотических приближений произвольного порядка к решениям широкого класса регулярно и сингулярно возмущенных задач [14]. Суть этого подхода состоит в следующем. Для многих задач оптимального управления можно указать конечномерные элементы (назовем их определяющими), по которым легко восстанавливается решение задачи, причем в возмущенных задачах, что очень существенно, они, как правило, гладким образом зависят от малого параметра. К определяющим элементам, в частности, относятся точки переключения релейных управлений, начальные и конечные моменты особых и квазиособых режимов [6], множители Лагранжа, длительность процесса (в том случае, когда она не задана). С помощью принципа максимума [29] и условий допустимости управлений для определяющих элементов $a_1, a_2, \dots, a_k$ можно составить систему конечных уравнений

$$F_i(a_1, a_2, \dots, a_k, \mu) = 0, \quad i = \overline{1,k}, \tag{2.1}$$

где μ — малый параметр. Назовем эти уравнения, как и их корни, *определяющими*. Формируются уравнения (2.1) путем интегрирования прямой и сопряженной динамических систем, которые являются возмущенными. Применяя соответствующие асимптотические методы (в регулярно возмущенных задачах — классическую технику Пуанкаре, а в сингулярно возмущенных — метод пограничных функций [4]), можно разложить функции $F_i(a_1, a_2, \dots, a_k, \mu)$ по степеням малого параметра

$$F_i(a_1, a_2, \dots, a_k, \mu) \sim F_{i0}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \mu F_{i1}(a_1, a_2, \dots, a_k) + \dots, \quad i = \overline{1,k},$$

а затем в условиях применимости теоремы о неявной функции методом неопределенных коэффициентов найти асимптотику решения системы (2.1), т. е асимптотику определяющих элементов. Для построения асимптотически субоптимальных управлений заданного порядка достаточно заменить неизвестные определяющие элементы $a_1(\mu), a_2(\mu), \dots, a_k(\mu)$ их асимптотическими приближениями соответствующего порядка. Основная трудность при реализации указанной схемы состоит в нахождении старших коэффициентов разложения определяющих элементов, т. е. корней системы нулевого приближения

$$F_{i0}(a_1, a_2, \dots, a_k, \mu) = 0, \quad i = \overline{1,k}. \tag{2.2}$$

В случае регулярных возмущений корнями этой системы будут определяющие элементы в невозмущенной задаче, которая формально получается из исходной при $\mu = 0$. Такую задачу в дальнейшем будем называть базовой. Если же исходная задача оптимального управления является сингулярно возмущенной, то корнями системы (2.2), как правило, будут определяющие элементы двух задач меньшей размерности. Одна из них — вырожденная задача, а вторая подбирается в результате анализа системы (2.2), что представляет собой неформальный этап исследования.

Отметим, что построенные с помощью изложенного подхода асимптотические приближения определяющих элементов можно использовать для нахождения оптимального управления в возмущенной задаче с заданным значением μ. Для этого нужно применить процедуру доводки [7], которая состоит в решении системы уравнений (2.1) методом Ньютона.

Описанный подход удобен для численной реализации, поскольку при его применении дело сводится к разложению конечномерных элементов. Заметим, что идея использования конечномерной параметризации решения в асимптотическом анализе восходит к Ван-дер-Полю (см. [3]), который применял ее при исследовании колебательных режимов.

3. Квазилинейные задачи оптимального управления

Результаты асимптотического анализа решений квазилинейных задач оптимального управления справедливы и для отрицательных значений μ, если они достаточно малы по модулю. Поэтому в дальнейшем будем считать областью применения малого параметра некоторую окрестность нуля $|\mu| < \mu_0$.

Рассмотрим квазилинейную задачу терминального управления вида

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + b(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in [t_*, t^*],\\ Hx(t^*) + \mu h(x(t^*)) = g, \quad J(u) = c^T x(t^*) + \mu d(x(t^*)) \to \max,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где μ — малый (по модулю) параметр; u — скаляр; x — n-вектор; g — m-вектор ($m < n$). Предполагается, что $A(t)$, $b(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $\partial h(x)/\partial x$, $\partial d(x)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p, $p \ge 1$.

Асимптотический анализ [15] показывает, что при нестеснительных предположениях относительно решения базовой задачи (см. разд. 2), которая формально получается из исходной при $\mu = 0$ и в отличие от нее является линейной, оптимальное управление в задаче (3.1) с достаточно малым по модулю μ имеет релейный характер и сохраняет при этом структуру решения базовой задачи. На основании этого факта с помощью изложенной ранее методики разработан и обоснован алгоритм, позволяющий для заданного натурального числа N ($N < p$) построить релейное асимптотически субоптимальное управление N-го порядка (см. определение 1). Точки переключения такого асимптотического приближения представляют собой полиномы Тейлора N-й степени точек переключения оптимального управления, которые являются функциями малого параметра, причем функциями из класса C^p. Попутно строится асимптотика множителей Лагранжа, которые вместе с точками переключения являются в данном случае определяющими элементами. При сделанных предположениях решение базовой задачи будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (3.1).

При построении асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка помимо решения базовой задачи вычисления сводятся к решению начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем. На основе разработанного алгоритма в [15] предложена итерационная процедура решения существенно нелинейных задач, где в качестве малого параметра выступает шаг итерации.

В [8] описан алгоритм работы регулятора, который строит в режиме реального времени позиционные асимптотически субоптимальные управления первого порядка в задаче терминального управления квазилинейной системой, подверженной действию неизвестных помех. При разработке регулятора использовались изложенный в [15] алгоритм и метод синтеза оптимальных управлений типа обратной связи для линейных систем [9].

В классе скалярных управляющих воздействий рассмотрим задачу оптимального быстродействия для квазилинейной системы

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + b(t)u, \quad x(t_*) = x_*,\\ x(t^*) = 0, \quad |u(t)| \le 1, \quad t \in [t_*, t^*], \quad J(u) = t^* \to \min,\\ |\mu| \ll 1, \quad x \in \mathbb{R}^n,\end{gathered} \tag{3.2}$$

в предположении, что $A(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $b(t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq t^*$, принадлежат классу C^p, $p \geq 1$. В работах [16; 17] показано, что при нестеснительных предположениях относительно решения базовой задачи оптимальное управление в задаче (3.2) с достаточно малым по модулю μ является релейным, сохраняя при этом структуру решения базовой задачи. С помощью изложенной в разд. 2 методики разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N ($N < p$) построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка (см. определение 3). Определяющими элементами в данном случае являются точки переключения оптимального управления, момент оптимального быстродействия и начальные значения (в момент t_*) сопряженных переменных, соответствующих в силу принципа максимума [29] оптимальному управлению. Эти величины как функции малого параметра принадлежат классу C^p. Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений сводятся к решению базовой задачи, которая является линейной, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем. Разработанный алгоритм обобщает результаты работы [25], которая в принятой терминологии посвящена построению асимптотически субоптимального управления первого порядка в задаче (3.2). Обобщение связано не столько с порядком асимптотики, сколько с обоснованием алгоритма.

Алгоритмы асимптотического решения квазилинейных задач со скалярными управлениями легко переносятся на системы с многомерными управлениями $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$, если на значения последних наложены ограничения вида $a_i \leq u_i(t) \leq b_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. При этом принципиальные схемы алгоритмов не претерпевают существенных изменений. Основное достоинство алгоритмов состоит в том, что они опираются на решения базовых задач, которые в отличие от исходных являются линейными. Однако в случае многомерных управляющих воздействий выигрыш может заключаться не только в этом. В данном случае базовая задача может распадаться на задачи меньшей размерности (см. [14]), тогда алгоритм целесообразно использовать даже для линейных возмущений, особенно если исходная задача имеет большую размерность.

Во многих прикладных задачах с многомерными управлениями ограничения на их значения имеют вид $\|u(t)\| \leq a$, где $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_r^2}$ — евклидова норма вектора u. В первую очередь это относится к задачам управления механическими системами. В работе [11] рассмотрена следующая задача терминального управления квазилинейной системой с подвижным правым концом траекторий:

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \\ \|u(t)\| \leq 1, \quad t \in [t_*, t^*], \quad Hx(t^*) = g, \quad J(u) = c^T x(t^*) \to \max, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где μ — малый (по модулю) параметр; t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$); u — r-вектор; x — n-вектор; g — m-вектор ($m < n$). Остальные элементы имеют соответствующие размерности. Предполагается, что матричные функции $A(t)$, $B(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p, $p \geq 1$. Доказана теорема о существовании непрерывного оптимального управления в задаче (3.3) и его асимптотических свойствах при предположениях, сделанных относительно решения линейной базовой задачи. Результаты качественного анализа положены в основу алгоритма, с помощью которого для заданного числа N ($N < p$) можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассмотренной задаче (см. определение 1). Этот алгоритм представляет собой очередную реализацию методики, изложенной в разд. 2. Его суть состоит в разложении по целым степеням μ множителей Лагранжа, которые в данном случае являются определяющими элементами и как функции малого параметра принадлежат классу C^p. Вычислительная процедура алгоритма включает в себя нахождение множителей Лагранжа в базовой задаче, решение начальных задач для систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем. Как и в предыдущих задачах, решение базовой задачи будет асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в задаче (3.3).

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия для квазилинейной системы при ограничении управления гиперсферой, которая имеет вид

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + b(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \\ x(t^*) = 0, \|u(t)\| \le 1, t \in [t_*, t^*], \quad J(u) = t^* \to \min, \\ |\mu| \ll 1, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Предполагается, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p, $p \ge 1$. В [12] показано, что при выполнении некоторых предположений относительно решения базовой задачи в задаче (3.4) существует единственное оптимальное управление, компоненты которого являются непрерывными функциями времени. С помощью изложенной в разд. 2 методики разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N ($N < p$) построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассмотренной задаче (см. определение 3). Его суть, как и в предыдущих квазилинейных задачах, состоит в разложении по целым степеням малого параметра определяющих элементов, в качестве которых в данном случае выступают момент оптимального быстродействия и начальные значения (в момент t_*) сопряженных переменных. Эти величины как функции малого параметра принадлежат классу C^p. Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка является решением базовой задачи. При построении асимптотических приближений более высокого порядка вычисления помимо решения базовой задачи сводятся к интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Рассмотрим задачу оптимизации переходного процесса в квазилинейной системе

$$\begin{gathered}\dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \\ x(t^*) = 0, \quad J(u) = \sup_{t \in [t_*, t^*]} \|u(t)\| \to \min, \\ |\mu| \ll 1, \quad u \in \mathbb{R}^r, \quad x \in \mathbb{R}^n,\end{gathered} \tag{3.5}$$

которая состоит в нахождении многомерных управлений с минимальной интенсивностью. Под интенсивностью в данном случае понимается максимальное значение евклидовой нормы управляющих воздействий. В прикладных задачах управление зачастую имеет смысл обобщенной силы; интенсивность оценивает тогда наибольшее значение этой силы. Поэтому задачу (3.5) называют задачей об управлении минимальной силой. Подобные задачи занимают особое место среди типичных задач оптимального управления вследствие негладкости функционала качества. Они возникают в приложениях, когда большие значения управляющих воздействий в переходных процессах либо технически нереализуемы, либо нежелательны из-за чрезмерных перегрузок, вызванных ускорениями. Предполагается, что динамическая система в задаче (3.5) такова, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p. В [18] показано, что при выполнении нестеснительных предположений относительно решения базовой задачи в исходной квазилинейной задаче с достаточно малым по модулю μ существует единственное оптимальное управление, компоненты которого непрерывны. С помощью изложенной в разд. 2 методики разработан и обоснован алгоритм, позволяющий для заданного числа N ($N < p$) построить асимптотически субоптимальное управление в задаче (3.5), которое переводит динамическую систему в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отличается по критерию качества от оптимального управления на величину того же порядка малости.

Суть алгоритма состоит в построении асимптотики определяющих элементов, которыми в данном случае являются оптимальная интенсивность и начальные значения сопряженных переменных (в момент t_*), соответствующих в силу принципа максимума [26] оптимальному управлению. Эти величины как функции малого параметра принадлежат классу C^p. Как и в предыдущих квазилинейных задачах, вычислительная процедура алгоритма включает в себя решение базовой задачи, интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений, а также нахождение корней невырожденных линейных алгебраических систем.

4. Задачи минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях квазилинейных систем

Линейно-квадратичные задачи оптимального управления относятся к числу немногих задач оптимизации динамических систем, для которых решена проблема синтеза оптимальных управлений типа обратной связи (см. например, [19; 22; 23; 27; 31]). Сложнее поддаются исследованию задачи минимизации интегральных квадратичных функционалов на траекториях нелинейных динамических систем, к которым принадлежат и квазилинейные системы.

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, \quad x(t_*) = x_*, \\ x(t^*) = 0, \quad J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_*}^{t^*} (x^T Q(t)x + u^T P(t)u)dt \to \min, \end{gathered} \tag{4.1}$$

где μ — малый по модулю параметр; t_*, t^* — заданные моменты времени; x — n-вектор фазового состояния системы; $f(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, — нелинейная вектор-функция; $Q(t)$ — неотрицательно-определенная симметрическая матрица; $P(t)$ — положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in [t_*, t^*]$. Предполагается, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in [t_*, t^*]$, принадлежат классу C^p, $p \geq 1$.

В данном случае базовая задача является линейно-квадратичной. В [20] показано что если динамическая система в базовой задаче вполне управляема [26], то в задаче (4.1) с достаточно малым по модулю μ существует единственное оптимальное управление, которое принадлежит классу C^p. С помощью изложенной в разд. 2 методики разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N ($N < p$) построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (4.1) в смысле определения 1. В качестве определяющих элементов в данном случае берутся начальные значения (в момент t_*) сопряженных переменных, которые как функции малого параметра принадлежат классу C^p. При построении асимптотически субоптимальных управлений помимо решения линейно-квадратичной базовой задачи интегрируются системы линейных дифференциальных уравнений и находятся корни невырожденных линейных алгебраических систем. В [20] получены также формулы для асимптотически субоптимальных обратных связей нулевого и первого порядков (см. определение 2). Заметим, что асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка есть оптимальное управление типа обратной связи в базовой задаче [2].

Рассмотрим задачу с подвижным правым концом траекторий, которая является обобщением задачи (4.1):

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)u, x(t_*) = x_*, \quad Hx(t^*) = g, \\ J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_*}^{t^*} (x^T Q(t)x + u^T P(t)u)dt \to \min\,. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь μ — малый по модулю параметр; t_*, t^* — заданные моменты времени ($t_* < t^*$); u — r-вектор; x — n-вектор; g — m-вектор ($m \leq n$). Остальные элементы задачи имеют соответствующие размерности, при этом среди терминальных ограничений нет “лишних”, т. е. $rankH = m$. В критерии качества $Q(t)$ — неотрицательно-определенная, а $P(t)$ — положительно-определенная симметрические матрицы для всех $t \in [t_*, t^*]$. Предполагается, что функции, формирующие задачу, обладают той же гладкостью, что и в задаче (4.1). Как и прежде, базовая задача является линейно-квадратичной. В [21] установлено, что если динамическая система в этой задаче управляема относительно подпространства $Hx = 0$ (см. [10]), то в задаче (4.2) с достаточно малым по модулю μ существует единственное оптимальное управление, принадлежащие классу C^p, которое является нормальной экстремалью. Разработан и обоснован алгоритм, с помощью которого для заданного числа N $(N < p)$ можно построить асимптотически субоптимальное управление в задаче (4.2) (см. определение 1). Этот алгоритм является очередной реализацией методики, изложенной в разд. 2. Его суть состоит в построении асимптотики множителей Лагранжа, соответствующих в силу принципа максимума оптимальному управлению. Определяющие элементы как функции малого параметра при сделанных предположениях принадлежат классу C^p. При построении асимптотических приближений к оптимальному управлению в задаче (4.2) решается линейно-квадратичная базовая задача, интегрируются системы линейных дифференциальных уравнений и находятся корни невырожденных линейных алгебраических систем. Кроме того, в [21] получены формулы для асимптотически субоптимальных обратных связей нулевого и первого порядка в смысле определения 2. Асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка есть оптимальное управление типа обратной связи в базовой задаче [19].

Все перечисленные алгоритмы апробированы на конкретных задачах управления движением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Альбрехт Э.Г.** Метод Ляпунова-Пуанкаре в задачах оптимального управления: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Свердловск, 1986. 280 с.
2. **Атанс М., Фалб П.** Оптимальное управление. Москва: Машиностроение, 1968. 764 с.
3. **Ван-дер-Поль Б.** Нелинейная теория электрических колебаний. Москва, 1935. 42 с.
4. **Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.** Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. Москва: Наука, 1973. 272 с.
5. **Габасов Р., Калинин А.И., Кириллова Ф.М.** Алгоритм оптимизации квазилинейной системы управления // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293, № 1. С. 22–26.
6. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Особые оптимальные управления. Москва: URSS, 2018. 256 с.
7. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2: Задачи управления. Минск: Университетское, 1984. 1973. 207 с.
8. **Габасов Р., Калинин А.И., Кириллова Ф.М., Наумович Г.Н.** Асимптотически оптимальный регулятор для квазилинейной системы // Докл. РАН. 1993. Т. 332, № 2. С. 138–141.
9. **Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.** Построение оптимальных управлений типа обратной связи в линейной задаче // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 6. С. 1294–1299.
10. **Габасов Р., Кириллова Ф.М.** Качественная теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1971. 508 с.
11. **Грудо Я.О., Калинин А.И.** Асимптотический метод оптимизации квазилинейной системы с многомерными управлениями // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 12. С. 1604–1611.
12. **Грудо Я.О., Калинин А.И.** Асимптотическое решение задачи оптимального быстродействия для квазилинейной системы при евклидовом ограничении на управление // Автоматика и телемеханика. 2007. № 8. С. 106–115.
13. **Калинин А.И.** Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи оптимального быстродействия // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, вып. 6. С. 880–889.
14. **Калинин А.И.** Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Минск: Экоперспектива, 2000. 183 с.
15. **Калинин А.И.** Оптимизация квазилинейных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1988. Т. 28, № 3. С. 325–334.
16. **Калинин А.И.** Алгоритм асимптотического решения квазилинейной задачи оптимального быстродействия // Докл. АН БССР. 1988. Т. 32, № 3. С. 197–200.
17. **Калинин А.И.** Метод возмущений для асимптотического решения квазилинейной задачи оптимального быстродействия // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 585–594.
18. **Калинин А.И.** Асимптотический метод решения квазилинейной задачи об управлении минимальной силой // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 3. С. 414–424.

19. **Калинин А.И.** О проблеме синтеза оптимальных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2018. Т. 58, № 3. С. 397–402.
20. **Калинин А.И., Лавринович Л.И.** Применение метода возмущений к задаче минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях квазилинейной системы // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2014. № 2. С. 3–12.
21. **Калинин А.И., Лавринович Л.И.** Асимптотический метод минимизации интегрального квадратичного функционала на траекториях линейной динамической системы // Докл. НАН Беларуси. 2018. Т. 62, № 5. С. 519–524.
22. **Калман Р.** Об общей теории систем управления. // Тр. I Конгресса ИФАК. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 521–547.
23. **Квакернаак К.Х., Сиван Р.** Линейные оптимальные системы управления. Москва: Мир, 1977. 656 с.
24. **Кириллова Ф.М.** О непрерывной зависимости решений одной задачи оптимального регулирования от начальных данных и параметров // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, вып. 4. С. 141 — 146.
25. **Киселев Ю.Н.** Асимптотика решения задачи оптимального быстродействия для систем управления близким к линейным // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182, № 1. С. 31–34.
26. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Москва: Наука, 1968. 476 с.
27. **Летов А.М.** Математическая теория процессов управления. Москва: Наука, 1981. 256 с.
28. **Моисеев Н.Н.** Элементы теории оптимальных систем. Москва: Наука, 1975. 528 с.
29. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 396 с.
30. **Субботин А.И.** Об управлении движением квазилинейной системы // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3, № 7. С. 1113–1126.
31. **Фельдбаум А.А.** Основы теории автоматических систем. Москва: Наука, 1966. 624 с.
32. **Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н.** Управление колебаниями. Москва: Наука, 1980. 384 с.
33. **Falb P.L., Jong J.L.** Some successive approximation methods on control and oscillation theory. N Y; London: Acad. Press, 1969. 240 p.

Поступила 18.04.2019
После доработки 6.05.2019
Принята к публикации 13.05.2019

Габасов Рафаил
д-р физ.-мат. наук, профессор
Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь
e-mail: kirillova.f@yandex.by

Калинин Анатолий Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры методов оптимального управления
Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь
e-mail: kalininai@bsu.by

Кириллова Фаина Михайловна
д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси
Институт математики НАН Беларуси, г. Минск, Беларусь
e-mail: kirillova.f@yandex.by

Лавринович Леонид Иванович
канд. физ.-мат. наук
доцент кафедры методов оптимального управления
Белорусский государственный университет, г. Минск, Беларусь
e-mail: lavrinovich@bsu.by

REFERENCES

1. Albrecht E.G. *Lyapunov-Poincare method in optimal control problems.* Dis.. . . Dr. Phys.-Mat. Sciences. Sverdlovsk, 1986. 280 p. (in Russian).
2. Atans M., Falb P. *Optimal control.* N Y: McGraw-Hill, 1966, 881 p. ISBN: 0-486-45328-6 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie.* Moscow: Mashinostroenie Publ., 1968, 764 p.
3. Van der Pol B. The nonlinear theory of electric oscillations. *Proc. IRE*, 1934, vol. 22, no. 9, pp. 1051–1086. doi: 10.1109/JRPROC.1934.226781 .
4. Vasil'eva A.B. and Butuzov V.F. *Asimptoticheskie razlozheniya reshenii singulyarno vozmushchennykh uravnenii* [Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations]. Moscow: Nauka Publ., 1973. 272 p. (in Russian).
5. Gabasov R., Kalinin A.I., Kirillova F.M. An Algorithm for Optimizing a Quasilinear Control system. *Soviet Math. Dokl.*, 1987, vol. 35, no. 2, pp. 250–254.
6. Gabasov R., Kirillova F.M. *Osobye optimal'nye upravleniya* [Singular Optimal Control]. Moscow: Librokom Publ., 2013, 256 p. ISBN: 978-5-397-05730-1 .
7. Gabasov R., Kirillova F.M. *Konstruktivnye metody optimizatsii. Ch. 2. Zadachi upravleniya* [Constructive methods of optimization. Part 2: Control problems]. Minsk: University Press, 1973, 207 p.
8. Gabasov R., Kalinin A.I., Kirillova F.M., Naumovich G.H. An asymptotically optimal regulator for a quasilinear system. *Russian Acad Sci. Dokl.*, 1994, vol. 48, no. 2, pp. 263–267.
9. Gabasov R., Kirillova F.M., Kostyukova O.I. Construction of optimal controls of feedback type in a linear problem. *Sov. Math., Dokl.*, 1992, vol. 44, no. 2, pp. 608–613.
10. Gabasov R., Kirillova F.M. *The Oualitative theory of optimal processes.* N Y; Basel: Marsel Dekker INC., 1976, 640 p. ISBN: 9780824765453 . Original Russian text published in Gabasov R., Kirillova F.M. *Kachestvennaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Nauka Publ., 1971. 508 p.
11. Grudo Y.O., Kalinin A.I. Asymptotic optimization method for a quasilinear system with multidimensional controls. *Diff. Equat.*, 2006, vol. 42, no. 12, pp. 1674–1681. doi: 10.1134/S0012266106120020 .
12. Grudo Y.O., Kalinin A.I. Asymptotic solution of the optimal speed problem for the quasilinear system under Euclidean constraint on control. *Autom. Remote Control*, 2007, vol. 68, no. 8, pp. 1391–1400. doi: 10.1134/S0005117907080103 .
13. Kalinin A.I. An algorithm for the asymptotic solution of a singularly perturbed linear time-optimal control problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 1989, vol. 53, no. 6, pp. 695–703. doi: 10.1016/0021-8928(89)90072-5 .
14. Kalinin A.I. *Asimptoticheskie metody optimizatsii vozmushchennykh dinamicheskikh sistem* [Asymptotic optimization methods for perturbed dynamical systems]. Minsk: Ecoperspectiva Publ., 2000, 183 p. ISBN: 9856598400 .
15. Kalinin A.I. Optimization of quasilinear control systems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1988, vol. 28, no. 2, pp. 12–19. doi: 10.1016/0041-5553(88)90138-3 .
16. Kalinin A.I. Algorithm for the asymptotic solution of a quasilinear time-optimality problem. *Dokl. AN BSSR*, 1988, vol. 32, no. 3, pp. 197–200 (in Russian).
17. Kalinin A.I. A perturbation method for the asymptotic solution of a quasilinear time-optimal problem. *Differ. Eq.*, 1990, vol. 26, no. 4, pp. 424–431.
18. Kalinin A. I. Asymptotic solution method for a quasilinear minimum force control problem. *Differ. Equations*, 2012, vol. 48, no. 3, pp. 419–429. doi: 10.1134/S0012266112030135 .
19. Kalinin A.I. To the synthesis of optimal control systems. *Comp. Math. Math. Phys.*, 2018, vol. 58, no. 3, pp. 378–383. doi: 10.1134/S0965542518030065 .
20. Kalinin A.I., Lavrinovich L.I. Application of the perturbation method for the minimization of an integral quadratic functional on the trajectories of a quasilinear system. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2014, vol. 53, no. 2, pp. 149–158. doi: 10.1134/S1064230714020117 .
21. Kalinin A.I., Lavrinovich L.I. Asymptotic minimization method of the integral quadratic functional on the trajectories of a quasilinear dynamical system. *Dokl. NAN Belarusi*, 2018, vol. 62, no. 5, pp. 519–524. doi: 10.29235/1561-8323-2018-62-5-519-524 .
22. Kalman R.E. On the general theory of control systems. *Proc. of the first IFAC Congress, Moscow, 1960, vol. 1.* London: Butterworths, 1961, 481–492.
23. Kwakernaak H., Sivan R. *Linear optimal control systems.* N Y etc.: Wiley-Interscience, 1972, 575 p. ISBN: 0-471-51110-2 . Translated to Russian under the title *Lineinye optimal'nye sistemy upravleniya.* Moscow: Mir Publ., 1977, 653 p.

24. Kirillova F.M. On the continuous dependence on the initial data and parameters of the solution of an optimal control problem. *Uspekhi Mat. Nauk*, 1962, vol. 17, no. 4(106), pp. 141–146 (in Russian).
25. Kiselev Yu.N. An asymptotic solution of the problem of time-optimal control systmes which are close to linear ones. *Soviet Math. Dokl.*, 1968, vol. 9, no. 5, pp. 1093–1097.
26. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of motion control]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 476 p.
27. Letov A.M. *Matematicheskaya teoriya protsessov upravleniya* [Mathematical theory of control processes]. Moscow: Nauka Publ., 1981, 256 p.
28. Moiseev N.N. *Elementy teorii optimal'nykh sistem* [Elements of the theory of optimal systems]. Moscow: Nauka Publ., 1975. 528 p.
29. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. N Y; London: Interscience Publishers John Wiley & Sons, 1962, 360 p. Original Russian text published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*. Moscow: Nauka Publ., 1983. 396 p.
30. Subbotin A.I. Control of motion of a quasilinear system. *Differ. Uravn.*, 1967, vol. 3, no. 7, pp. 1113–1118 (in Russian).
31. Fel'dbaum A.A. *Optimal control systems*. N Y: Acad. Press, 1965, 452 p. Original Russian text (2nd ed.) published in Fel'dbaum A.A. *Osnovy teorii optimal'nykh avtomaticheskikh sistem*. Moscow: Nauka Publ., 1966, 623 p..
32. Chernous'ko F.L., Akulenko L.D., Sokolov B.N. *Upravlenie kolebaniyami* [Control of oscillations]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 384 p.
33. Falb P.L., Jong J.L. *Some successive approximation methods on control and oscillation theory*. N Y; London: Acad. Press, 1969, 240 p. ISBN: 978-0-12-247950-2 .

Received April 18, 2019
Revised May 6, 2019
Accepted May 13, 2019

Funding Agency: This work was supported by the National Program for Scientific Research of the Republic of Belarus "Convergence 2020."

Rafail Gabasov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail:kirillova.f@yandex.by .

Anatoly Iosifovich Kalinin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: kalininai@bsu.by .

Faina Mikhaylovna Kirillova, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member of the Belarus National Academy of Sciences, Institute of Mathematics of Belarus National Academy of Sciences, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: kirillova.f@yandex.by .

Leonid Ivanovich Lavrinovich, Cand. Phys.-Mat. Sci.,Assoc. Prof., Belarusian State University, Minsk, 220030 Belarus, e-mail: lavrinovich@bsu.by .

Cite this article as: R. Gabasov, A. I. Kalinin, F. M. Kirillova, L. I. Lavrinovich. On asymptotic optimization methods for quasilinear control systems., *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 62–72 .