ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.988.68

АНАЛИЗ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩЕГО РАЗРЫВНУЮ КОМПОНЕНТУ РЕШЕНИЯ

В. В. Васин, В. В. Беляев

Исследуется линейное операторное уравнение, не удовлетворяющее условиям корректности Адамара. Предполагается, что решение уравнения содержит различные свойства гладкости на различных участках области определения. А именно, решение представимо в виде суммы гладкой и разрывной компонент. Для построения устойчивого приближенного решения применяется метод регуляризации Тихонова. В этом методе стабилизатор есть сумма лебеговой нормы и сглаженной BV-нормы. Каждый из входящих в стабилизатор функциоалов зависит только от одной компоненты и учитывает ее свойства. Доказываются теоремы сходимости регуляризованных решений и их дискретных аппроксимаций. Устанавливается, что для нахождения дискретных регуляризованных решений могут быть применены метод Ньютона и нелинейные аналоги α-процессов.

Ключевые слова: некорректная задача, метод регуляризации, разрывное решение, обобщенная вариация, дискретная аппроксимация.

V. V. Vasin, V. V. Belyaev. Analysis of a regularization algorithm for a linear operator equation containing a discontinuous component of the solution.

We study a linear operator equation that does not satisfy the Hadamard well-posedness conditions. It is assumed that the solution of the equation has different smoothness properties on different segments of its domain. More exactly, the solution is representable as the sum of a smooth and discontinuous components. The Tikhonov regularization method is applied for the construction of a stable approximate solution. In this method, the stabilizer is the sum of the Lebesgue norm and the smoothed BV-norm. Each of the functionals in the stabilizer depends only on one component and takes into account its properties. Convergence theorems are proved for the regularized solutions and their discrete approximations. It is shown that discrete regularized solutions can be found with the use of the Newton method and nonlinear analogs of α-processes.

Keywords: ill-posed problem, regularization method, discontinuous solution, total variation, discrete approximation.

MSC: 65J15, 65J20, 45L05

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-34-44

1. Введение

Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий на паре банаховых пространств U, F и имеющий разрывный обратный A^{-1}, что влечет некорректность в смысле Адамара уравнения

$$Au = f \tag{1.1}$$

в условиях приближенного задания правой части f^δ, такой что $\|f - f^\delta\| \leqslant \delta$. Предполагаем, что решение задачи (1.1) наряду с гладким фоном содержит участки с разрывами. Хорошо известно, что в традиционном (однокомпонентном) подходе наличие в решении участков с различными свойствами гладкости затрудняет выбор стабилизирующего функционала, при котором решение восстанавливалось бы с требуемой точностью на всех участках с сохранением структуры (разрывы, изломы). Один из возможных подходов к решению этой проблемы основан на идее представления решения в виде суммы двух компонент и выборе стабилизатора также в форме суммы функционалов, каждый из которых зависит только от одной компоненты и учитывает свойство гладкости, характерное именно для этой компоненты. Данный прием хорошо зарекомендовал себя в прикладных исследованиях при обработке зашумленных сигналов и изображений методом регуляризации Тихонова при восстановлении непрерывной и разрывной компонент решения [1; 2]. Теоретическое обоснование сходимости такого двух- и трехкомпонентного подхода содержится в работах [3; 4], в которых для аппроксимации разрывной компоненты наряду с обобщенной вариацией использовалась также норма пространства Липшица. В этом случае функционал Тихонова является недифференцируемым, что приводит к необходимости решать задачу негладкой минимизации и применять субградиентные методы, эффективность которых невысока.

В данной работе исследуется двухкомпонентный вариант метода регуляризации Тихонова, в котором негладкая BV-норма [5; 6], представимая в виде суммы L_1-нормы и обобщенной вариации, аппроксимируется параметрическим семейством дифференцируемых функционалов. Теоремы сходимости регуляризованных решений и их конечно-разностных аппроксимаций с изложением краткой схемы доказательства были анонсированы в работе авторов [7]. Настоящая статья содержит развернутое доказательство этих теорем. Кроме того, устанавливается применимость к дискретизованным задачам минимизации тихоновского функционала итерационного метода Ньютона и нелинейных аналогов α-процессов.

В разд. 2 доказываются существование нормального решения относительно выпуклого стабилизирующего функционала и сходимость регуляризованных решений для каждой компоненты. В разд. 3 формулируется и доказывается теорема сходимости дискретных аппроксимаций, образованных экстремальными элементами конечно-разностных задач минимизации с дифференцируемыми выпуклыми целевыми функциями, к регуляризованным решениям, построенным с использованием классической обобщенной вариации (без сглаживания). В разд. 4 дается обоснование применимости æ-процессов и метода Ньютона для решения конечномерных регуляризованных задач.

2. Метод Тихонова с гладким стабилизатором

При условии представимости решения в виде суммы двух компонент $u = u_1 + u_2$ рассмотрим метод Тихонова, в котором L_1-норма и обобщенная вариация, отвечающие за негладкую компоненту u_2, заменены их сглаженными аналогами:

$$\min\left\{\|A(u_1+u_2) - f^\delta\|^2_{L_2(S)} + \alpha[\|u_1\|^2_{L_q(D)} + \Omega^\beta(u_2)] : u_1 \in L_q,\ u_2 \in BV(D)\right\} = \Phi^*. \tag{2.1}$$

Здесь f^δ такая, что $\|f - f^\delta\| \leqslant \delta$, $L_q = L_q(D)$, область $D \subset \mathbb{R}^d$, $1 < q < \infty$, $d = 1, 2, 3$; стабилизирующий функционал для второй компоненты u_2 определяется формулами

$$\Omega^\beta(u) = l^\beta(u) + J^\beta(u), \quad \beta > 0, \quad l^\beta(u) = \int\limits_D \sqrt{|u(x)|^2 + \beta}\, dx, \tag{2.2}$$

$$J^\beta(u) = \sup\left\{\int\limits_D (-u \operatorname{div} v + \sqrt{\beta(1-|v|^2)})\colon v \in V\right\}, \tag{2.3}$$

где $V = \{v\colon v \in C_0^1(D, \mathbb{R}^d),\ |v(x)| \leqslant 1\}$. Очевидно, что функционал $l^\beta(u)$ является гладкой аппроксимацией L_1-нормы, а функционал $J^\beta(u)$, который при $u \in W_1^1(D)$ определяется формулой

$$J^\beta(u) = \int\limits_D \sqrt{|\nabla u(x)|^2 + \beta}\, dx, \tag{2.4}$$

можно рассматривать как гладкую аппроксимизацию обобщенной вариации

$$J(u) = \sup\left\{\int\limits_D -u \operatorname{div} v\, dx\colon v \in V\right\}, \tag{2.5}$$

Она для $u \in W_1^1(D)$ принимает вид $J(u) = \int_D |\nabla u(x)|\,dx$. Выпуклый функционал $J^\beta(u)$ был введен в работе [6] и применялся в качестве стабилизатора в однокомпонентной версии метода Тихонова ($u_1 = 0$, $l^\beta(u_2) = 0$). Упомянутая выше $BV(D)$-норма определяется формулой

$$\|u\|_{BV(D)} = \|u\|_{L_1(D)} + J(u). \tag{2.6}$$

Пространство $BV(D)$, снабженное нормой (2.6), называемое *BV-пространством*, является банаховым [5]. В дальнейшем в тех случаях, когда это не вызывает сомнения, будем опускать нижние знаки при нормах.

Установим существование нормального решения уравнения (1.1), т. е. пары $(\hat u_1, \hat u_2)$, минимизирующей стабилизирующий функционал

$$\Omega(u_1, u_2) = \|u_1\|^2 + \Omega^\beta(u_2), \tag{2.7}$$

где $\Omega^\beta(u_2)$ определяется формулой (2.2), при этом $\hat u_1 + \hat u_2 = A^{-1}f$.

Теорема 1. *Пусть A — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства $L_p(D)$ в $L_2(S)$, где области D, $S \in \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3$, $1 \leqslant p < d/(d-1)$, $p \leqslant q$, область D обладает свойством конуса и уравнение* (1.1) *имеет единственное решение $\hat u = A^{-1}f$.*

Тогда существует, возможно, неединственное решение $(\hat u_1, \hat u_2)$ задачи

$$\min\{\Omega(u_1, u_2)\colon A(u_1 + u_2) = f,\ u_1 \in L_q,\ u_2 \in L_1\} = \Psi^*, \tag{2.8}$$

где функционал $\Omega(u_1, u_2)$ определен соотношением (2.7), *причем для любой такой пары $(\hat u_1, \hat u_2)$ справедливо $\hat u_1 + \hat u_2 = \hat u = A^{-1}f$.*

Доказательство опубликовано в работе [7].

Необходимо отметить, что решение задачи (2.8) в общем случае может быть неединственным, однако сумма составляющих его компонент $\hat u_1 + \hat u_2 = \hat u$ определяет один и тот же элемент — единственное решение уравнения (1.1).

Исследуем регуляризующие свойства метода (2.1).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любого $\alpha > 0$ существует решение (u_1^α, u_2^α) задачи* (2.1), *для которого при связи параметра регуляризации с погрешностью δ*

$$\alpha(\delta) \to 0, \quad \delta^2/\alpha(\delta) \to 0, \quad \delta \to 0 \tag{2.9}$$

справедливы следующие свойства:

1) $\{u_1^{\alpha(\delta)}\}$ *— относительно компактно в пространстве L_q;*

2) $\{u_2^{\alpha(\delta)}\}$ *— относительно компактно при $1 \leqslant p < d/(d-1)$ и относительно слабо компактно при $p = d/(d-1)$, $d \geqslant 2$, в пространстве L_p;*

3) *какова бы ни была пара (u_1^α, u_2^α), являющаяся решением задачи* (2.1), *она определяет единственный элемент $u^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha$;*

4) *если $\hat u_1, \hat u_2$ — предельные точки последовательностей, соответственно $\{u_1^{\alpha(\delta_k)}\}$, $\{u_2^{\alpha(\delta_k)}\}$ при $\delta_k \to 0$, то пара $(\hat u_1, \hat u_2)$ — решение задачи* (2.8) *и, следовательно, $\hat u = \hat u_1 + \hat u_2$ — решение уравнения* (1.1);

5) *для стабилизирующего функционала* (2.7) *справедливо соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} \Omega(u_1^{\alpha(\delta_k)}, u_2^{\alpha(\delta_k)}) = \Omega(\hat u_1, \hat u_2). \tag{2.10}$$

Доказательство. Сначала убедимся в существовании решения задачи (2.1). Обозначим через $\Phi(u_1, u_2)$ целевой функционал в задаче (2.1) и зададим минимизирующую последовательность (u_1^k, u_2^k), для которой

$$\Phi(u_1^k, u_2^k) \to \Phi^* \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{2.11}$$

Тогда при $\alpha > 0$ в силу [6, теорема 2.2] для некоторых c_i будут выполнены неравенства

$$\|u_1^k\| \leqslant c_1, \quad \|u_2^k\| \leqslant l^\beta(u_2^k) \leqslant c_2, \quad J(u_2^k) \leqslant J^\beta(u_2^k) \leqslant c_3, \tag{2.12}$$

что влечет в равномерно выпуклом пространстве существование слабо сходящейся подпоследовательности

$$u_1^{k_i} \to \bar{u}_1 \text{ (слабо) в } L_q. \tag{2.13}$$

На основании соотношений (2.12) и теоремы о компактном вложении пространства BV в L_p из [6, теорема 2.5] можно полагать, что

$$u_2^{k_i} \to \bar{u}_2 \text{ (сильно) в } L_p, \quad 1 \leqslant p < d/(d-1). \tag{2.14}$$

Поскольку для $\{u_2^{k_i}\}$ выполнены свойства (2.12), (2.14), то исходя из известных теорем функционального анализа, не ограничивая общность, можно считать, что

$$u_2^{k_i} \to \bar{u}_2 \text{ (почти всюду)}, \quad \lim_{i\to\infty} \int\limits_D \sqrt{|u_2^{k_i}(x)|^2 + \beta}\, dx = \bar{c}, \tag{2.15}$$

откуда в силу теоремы Фату следует

$$\int\limits_D \sqrt{|\bar{u}_2(x)|^2 + \beta}\, dx \leqslant \lim_{i\to\infty} \int\limits_D \sqrt{|u_2^{k_i}(x)|^2 + \beta}\, dx = \bar{c}. \tag{2.16}$$

Объединяя свойство (слабой) непрерывности оператора A, свойство полунепрерывности снизу функционала J^β [6, теорема 2.3] и соотношения (2.11)–(2.16), получаем цепочку неравенств

$$\Phi^* \leqslant \Phi(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \Phi(u_1^{k_i}, u_2^{k_i}) = \Phi^*,$$

подтверждающую, что $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ — решение задачи (2.1).

Переобозначим пару $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ через (u_1^α, u_2^α). Так как $\Omega(u_1, u_2)$ — функционал выпуклый, а из обратимости оператора A следует, что функционал $\phi(u) = \|Au - f_\delta\|^2_{L_2}$ — строго выпуклый, поэтому, какова бы ни была пара $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, реализующая минимум в задаче (2.1), сумма компонент определяет один и тот же элемент $u^\alpha = u_1^\alpha + u_2^\alpha$, что означает справедливость п. 3.

Пара (u_1^α, u_2^α) реализует минимум в задаче (2.1), следовательно, выполнено неравенство

$$\begin{aligned}\Phi(u_1^\alpha, u_2^\alpha) &= \|A(u_1^\alpha + u_2^\alpha) - f_\delta\|^2 + \alpha[\|u_1^\alpha\|^2 + \Omega^\beta(u_2^\alpha)] \\ &\leqslant \|A(\hat{u}_1 + \hat{u}_2) - f_\delta\|^2 + \alpha[\|\hat{u}_1\|^2 + l^\beta(\hat{u}_2) + J^\beta(\hat{u}_2)],\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$ — решение задачи (2.8). Из (2.17) получаем оценку

$$\|u_1^\alpha\|^2 + l^\beta(u_2^\alpha) + J^\beta(u_2^\alpha) \leqslant \frac{\delta^2}{\alpha} + \|\hat{u}_1\|^2 + l^\beta(\hat{u}_2) + J^\beta(\hat{u}_2). \tag{2.18}$$

При выборе $\alpha(\delta_k)$ согласно (2.9) из (2.18) для $(u_1^{\alpha(\delta_k)}, u_2^{\alpha(\delta_k)})$ следует выполнимость аналогов неравенств (2.12) с некоторыми $\widetilde{c}_i$ и соотношений (2.13)–(2.16) с заменой $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ на $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2)$. Это означает существование подпоследовательности $(u_1^{\alpha(\delta_k)}, u_2^{\alpha(\delta_k)})$, для которой

$$u_1^{\alpha(\delta_k)} \to \widetilde{u}_1 \text{ (слабо) в } L_q,\ u_2^{\alpha(\delta_k)} \to \widetilde{u}_2 \text{ (сильно) в } L_p\, (1 \leqslant p < d/(d-1)), \tag{2.19}$$

что влечет

$$\|A(\widetilde{u}_1 + \widetilde{u}_2) - f\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|A(u_1^{\alpha(\delta_k)} + u_2^{\alpha(\delta_k)}) - f\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} [\Phi(u_1^{\alpha(\delta_k)}, u_2^{\alpha(\delta_k)})]^{1/2}$$

$$\leqslant \limsup_{k\to\infty}[\Phi(\hat{u}_1,\hat{u}_2)]^{1/2} \leqslant \limsup_{k\to\infty}[\delta_k^2+\alpha(\delta_k)(\|\hat{u}_1\|^2+l^\beta(\hat{u}_2)+J^\beta(\hat{u}_2))]^{1/2}=0,$$

т. е. $\widetilde{u}=\widetilde{u}_1+\widetilde{u}_2$ — решение задачи (1.1). Из неравенства (2.18) приходим к соотношению

$$\|\widetilde{u}_1\|^2+\Omega^\beta(\widetilde{u}_2) \leqslant \liminf_{k\to\infty}[\|u_1^{\alpha(\delta_k)}\|^2+\Omega^\beta(u_2^{\alpha(\delta_k)})]$$

$$\leqslant \limsup_{k\to\infty}[\|u_1^{\alpha(\delta_k)}\|^2+\Omega^\beta(u_2^{\alpha(\delta_k)})] \leqslant \|\hat{u}_1\|^2+\Omega^\beta(\hat{u}_2), \tag{2.20}$$

т. е. $(\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2)$ — решение задачи (2.8), что доказывает п. 4. В силу полунепрерывности снизу входящих в стабилизатор функционалов из (2.20) следует сходимость норм $\lim_{k\to\infty}\|u_1^{\alpha(\delta_k)}\|=\|\widetilde{u}_1\|$, что вместе с (2.19) влечет сильную сходимость $\lim_{k\to\infty}\|u_1^{\alpha(\delta_k)}-\widetilde{u}_1\|=0$. Одновременно справедливость (2.20) означает сходимость (2.10), что завершает доказательство теоремы в целом. □

З а м е ч а н и е 1. Теоремы 1, 2 остаются справедливыми при замене в задаче (2.1) функционала $l^\beta(u_2)$ на $\|u_2\|_{L_r(D)}$, $1<r<\infty$. В этом случае дополнительно гарантируется единственность решения $(\hat{u}_1,\hat{u}_2)$ задачи (2.8) и решения (u_1^α,u_2^α) задачи (2.1).

3. Дискретная аппроксимация метода регуляризации

Модифицируем стабилизатор $\Omega^\beta(u)$ в задаче (2.1), заменив в нем $l^\beta(u)$ на $\|u\|_{L_r}^2$, а $J^\beta(u)$ на негладкую обобщенную вариацию $J(u)$, т. е. вместо $\Omega^\beta(u)$ теперь будет использоваться

$$\bar{\Omega}(u_2)=\|u_2\|_{L_r}^2+J(u_2), \quad 1<r<\infty. \tag{3.1}$$

При построении численных методов требуется этап дискретной аппроксимации исходной задачи (2.1) последовательностью конечномерных задач. В одномерном случае ($d=1$) в работе [8] была предложена и обоснована схема полудискретизации, основанная на кусочно-линейной аппроксимации только в пространстве решений. В этом разделе исследуется общая схема дискретной (конечно-разностной) аппроксимации задачи (2.1) (после замены $\Omega^\beta(u_2)$ на $\bar{\Omega}(u_2)$) с негладким стабилизирующим функционалом последовательностью конечномерных задач минимизации с выпуклыми дифференцируемыми целевыми функциями.

Рассмотрим в качестве D d-мерную область прямоугольных очертаний, например единичный куб. Построим сеточный аналог

$$\mathbb{R}_n^d=\{x\in\mathbb{R}^d\colon x=(j_1h,j_2h,\dots,j_dh),\ j_1,\dots,j_d=0;\pm1;\pm2;\dots\}$$

пространства $\mathbb{R}^d$ и введем сеточные функции $u_n:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, где $\mathbb{R}_n^d$ — n^d-мерное пространство векторов; индекс n означает, что $u_n(x)$ задана на сетке с шагом $h=1/n$ по каждой переменной. Определим семейство связывающих операторов

$$P=\Big\{p_n\colon p_n(u)=h^{-d}\int\limits_{\omega_d(x)}u(y)\,dy\Big\},$$

где $\omega_d(x)$ — элементарная ячейка h^d с узлом $x=(x_1,x_2,\dots,x_d)$, $\omega_d(x)=\{y\in\mathbb{R}^d: x_j-h<y_j\leqslant x_j,\ j=1,2,\dots,d\}$. Известно, что семейство операторов P образует дискретную аппроксимацию пространства $L_p(D)\,(1<p<\infty)$ последовательностью пространств l_p^n с нормой

$$\|u_n\|_{l_p^n}=\Big(\sum_{x\in D_n}h^d\,|u_n(x)|^p\Big)^{1/p}, \quad D_n=D\cap\mathbb{R}^d,$$

и порождает дискретную и дискретную слабую сходимость элементов и операторов. Основные факты, касающиеся свойств дискретной сходимости, которые будут использоваться при обосновании общей схемы дискретной аппроксимации задачи (2.1), содержатся в [9–11].

Задаче (2.1), после замены $\Omega^\beta(u)$ на функционал $\bar\Omega(u)$, определяемый формулой (3.1), поставим в соответствие последовательность конечномерных задач:

$$\min\Big\{\|A_n(u_{1n}+u_{2n})-f_n\|^2_{l_2^n}+\alpha[\|u_{1n}\|^2_{l_q^n}+\|u_{2n}\|^2_{l_r^n}+J_n^{\beta_n}(u_{2n})]\colon u_{1n}\in l_q^n,\ u_{2n}\in l_r^n\Big\}=\Phi_n^*. \quad (3.2)$$

Здесь

$$J_n^{\beta_n}(u_{2n})=\sup\Big\{\sum_{x\in D_n}h^d\Big(-u_{2n}(x)\sum_{j=1}^d\partial_j v_n(x)+\sqrt{\beta_n(1-|v_n(x)|^2)}\Big)\colon |v_n(x)|\leqslant 1,$$
$$v_n\in C_0^1(D_n;\mathbb{R}_n^d)\Big\},$$

где

$$\partial_j v_n(x)=\frac{v_n(x)-v_n(x-h_je_j)}{h},\quad e_j=(0,\dots,\underbrace{1}_{j},0,\dots,0).$$

Введем обозначения “$-\to$” и “$-\to$ (слабо)” для дискретной и дискретной слабой сходимости, соответственно. Сохраним обозначения (u_1^α,u_2^α) для решения задачи (2.1) при $\beta=0$ и замене $l^\beta(u)$ на $\|u\|_{L_r}$ и обозначим через $(\bar u_{1n},\bar u_{2n})$ решение задачи (3.2).

Теорема 3. *Пусть для задач* (2.1) *и* (3.2) *выполнены условия дискретной аппроксимации*

$$A_n-\to A,\quad A_n-\to A\,(\text{слабо}),\quad f_n-\to f^\delta, \quad (3.3)$$

где A, A_n — непрерывные операторы из L_r в L_2 и из l_r^n в l_2^n соответственно, и $\beta_n>0$, $\beta_n\to 0$. Тогда существует единственное решение $(\bar u_{1n},\bar u_{2n})$ задачи (3.2) *и имеет место дискретная сходимость*

$$\bar u_{1n}-\to u_1^\alpha,\quad \bar u_{2n}-\to u_2^\alpha, \quad (3.4)$$

а также сходимость обобщенных вариаций и оптимальных значений

$$\lim_{n\to\infty}J_n^{\beta_n}(\bar u_{2n})=J(u_2^\alpha),\quad \lim_{n\to\infty}\Phi_n^*=\Phi^*. \quad (3.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Убедимся в разрешимости задачи минимизации (3.2). Обозначим через $\Phi_n(u_{1n},u_{2n})$ ее целевую функцию. Пусть (u_{1n}^k,u_{2n}^k) — минимизирующая последовательность в задаче (3.2), т. е. $\Phi_n(u_{1n}^k,u_{2n}^k)\to\Phi_n^*$ при $k\to\infty$. Так как все слагаемые, входящие в $\Phi_n(u_{1n}^k,u_{2n}^k)$, положительны (см. [7, лемма 1] относительно положительности J_n^β), то найдутся сходящиеся подпоследовательности

$$\lim_{i\to\infty}\|u_{1n}^{k_i}-\bar u_{1n}\|_{l_r^n}=0,\quad \lim_{i\to\infty}\|u_{2n}^{k_i}-\bar u_{2n}\|_{l_q^n}=0. \quad (3.6)$$

Для любого вектора $v_n\in C_0^1(D_n,\mathbb{R}_n^d)$ имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in D_n}h^d\Big(-\bar u_{2n}(x)\sum_{j=1}^d\partial_j v_n(x)+\sqrt{\beta_n(1-|v_n(x)|^2)}\Big)\\
&=\lim_{i\to\infty}\sum_{x\in D_n}h^d\Big(-u_{2n}^{k_i}(x)\sum_{j=1}^d\partial_j v_n(x)+\sqrt{\beta_n(1-|v_n(x)|^2)}\Big)\\
&\leqslant\liminf_{i\to\infty}\ \sup\Big\{\sum_{x\in D_n}h^d\Big(-u_{2n}^{k_i}(x)\sum_{j=1}^d\partial_j v_n(x)+\sqrt{\beta_n(1-|v_n(x)|^2)}\Big)\ :\ |v_n(x)|\leqslant 1\Big\}\\
&=\liminf_{i\to\infty}J_n^{\beta_n}(u_{2n}^{k_i}).
\end{aligned} \quad (3.7)$$

Переходя в левой части соотношений (3.7) к верхней грани по $v_n \in C_0^1(D_n, \mathbb{R}_n^d)$, получаем следующее свойство для $J_n^{\beta_n}(u_{2n})$:

$$J_n^{\beta_n}(\bar{u}_{2n}) \leqslant \liminf_{i\to\infty} J_n^{\beta_n}(u_{2n}^{k_i}). \tag{3.8}$$

Принимая во внимание непрерывность оператора A_n и установленные свойства (3.6), (3.8), приходим к неравенствам

$$\Phi_n^* \leqslant \Phi_n(\bar{u}_{1n}, \bar{u}_{2n}) \leqslant \liminf_{i\to\infty} \Phi_n(u_{1n}^{k_i}, u_{2n}^{k_i}) \leqslant \Phi_n^*;$$

это означает, что $(\bar{u}_{1n}, \bar{u}_{2n})$ — решение задачи (3.2). Единственность решения следует из выпуклости первого и четвертого слагаемого и строгой выпуклости второго и третьего.

Из леммы 2.1 [6] для любого $\varepsilon > 0$ найдутся функции $u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon} \in C^\infty(D)$ такие, что

$$\Phi^* = \Phi(u_1^\alpha, u_2^\alpha) \leqslant \Phi(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \leqslant \Phi^* + \varepsilon. \tag{3.9}$$

Покажем, что

$$\Phi(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(\bar{p}_n u_{1\varepsilon}, \bar{p}_n u_{2\varepsilon}), \tag{3.10}$$

где $\{\bar{p}_n\}$ — семейство операторов сноса на сетку, эквивалентное семейству $\{p_n\}$.

Введем обозначение $J_n = J_n^{\beta_n}$ при $\beta_n = 0$. Учитывая условия теоремы и свойства дискретной сходимости, достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} J_n^{\beta_n}(\bar{p}_n u_{2\varepsilon}) = J(u_{2\varepsilon}). \tag{3.11}$$

При доказательстве теоремы 4.1 из [12] было установлено, что

$$\lim_{n\to\infty} J_n(\bar{p}_n u_{2\varepsilon}) = J(u_{2\varepsilon}). \tag{3.12}$$

Объединяя следствие 1 к лемме 1 из [7] с (3.12), получаем (3.11) и, следовательно, (3.10).

На основании (3.9), (3.10) переходим к неравенствам

$$\limsup_{n\to\infty} \Phi_n^* = \limsup_{n\to\infty} \Phi_n(\bar{u}_{1n}, \bar{u}_{2n}) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \Phi_n(\bar{p}_n u_{1\varepsilon}, \bar{p}_n u_{2\varepsilon}) = \Phi(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}) \leqslant \Phi^* + \varepsilon,$$

что ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ влечет оценку

$$\limsup_{n\to\infty} \Phi_n^* \leqslant \Phi^*. \tag{3.13}$$

Из (3.13) вытекает ограниченность последовательностей $\{\bar{u}_{1n}\}$, $\{\bar{u}_{2n}\}$, значит, для некоторой подпоследовательности номеров $\{n'\} \subseteq \{n\}$

$$\bar{u}_{1n'} - \to \tilde{u}_1 \,(\text{слабо в})\; L_q, \quad \bar{u}_{2n'} - \to \tilde{u}_2 \,(\text{слабо в})\; L_r. \tag{3.14}$$

Из леммы 2 работы [7], (3.13), а также свойства дискретной сходимости, в том числе из

$$u_n - \to u \,(\text{слабо}) \Rightarrow \|u\|_U \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{U_n},$$

вытекает справедливость неравенств

$$\Phi^* \leqslant \Phi(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \leqslant \liminf_{n'\to\infty} \Phi_{n'}(\bar{u}_{1n'}, \bar{u}_{2n'}) \leqslant \limsup_{n'\to\infty} \Phi_{n'}(\bar{u}_{1n'}, \bar{u}_{2n'}) \leqslant \limsup_{n'\to\infty} \Phi_{n'}^* \leqslant \Phi^*, \tag{3.15}$$

откуда следует вывод, что $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$ — решение задачи (2.1), т. е. $\tilde{u}_1 = u_1^\alpha$, $\tilde{u}_2 = u_2^\alpha$.

Кроме того, неравенства (3.15) влекут соотношения (3.5), а также

$$\lim_{n'\to\infty} \|\hat{u}_{1n'}\|_{l_n^q}^2 = \|u_1^\alpha\|_{L_q}^2, \quad \lim_{n'\to\infty} \|\hat{u}_{2n'}\|_{l_n^r}^2 = \|u_2^\alpha\|_{L_r}^2,$$

что вместе с (3.14) ввиду дискретного свойства Ефимова — Стечкина [13, лемма 5.2] для равномерно выпуклых пространств означает дискретную сходимость конечно-разностных аппроксимаций $\hat{u}_{1n'} - \to u_1^\alpha$, $\hat{u}_{2n'} - \to u_2^\alpha$. В силу замечания 1 решение (u_1^α, u_2^α) задачи (2.1) определяется однозначно; справедливы и соотношения (3.4). □

4. Обоснование сходимости методов Ньютона и æ-процесса

Рассмотрим в одномерном случае конечномерную задачу (3.2), для определенности положив $q = r = 2$. Заметим, что целевая функция Φ_n является выпуклой и дифференцируемой. Используя необходимое условие экстремума, сводим задачу (3.2) к эквивалентной системе нелинейных уравнений

$$\nabla\Phi_n(u) = 0,$$

где $u = (u^1, u^2)^T$. Введем обозначение $B(u) = \nabla\Phi_n(u)$. Поскольку Φ_n — выпуклая функция, то согласно [14, лемма 4.10, гл. 3] оператор B — монотонный. В работе [15] для уравнения с монотонным оператором исследована сходимость регуляризованных методов Ньютона

$$u^{k+1} = u^k - \gamma[B'(u^k) + \varepsilon I]^{-1}(B(u^k) - \varepsilon(u^k - u^0))$$

и его модифицированного аналога, а также æ-процесса

$$u^{k+1} = u^k - \gamma\frac{\langle (B'(u^0) + \varepsilon I)^{æ} B_\varepsilon(u^k), B_\varepsilon(u^k)\rangle}{\langle (B'(u^0) + \varepsilon I)^{æ+1} B_\varepsilon(u^k), B_\varepsilon(u^k)\rangle} B_\varepsilon(u^k), \quad 1 \leqslant æ < \infty,$$

где $B_\varepsilon(u) = B(u) + \varepsilon(u - u^0)$, $B'(u^0)$ — самосопряженный неотрицательно определенный оператор.

Достаточным условием сходимости итераций к регуляризованному решению является условие Липшица для производной оператора исходной задачи в некотором шаре $S_r(u^0)$.

Теорема 4. *Для оператора $B(u) = \nabla\Phi_n(u)$ справедлива оценка*

$$\|B'(u) - B'(\bar{u})\| \leqslant N\|u - \bar{u}\|. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку первые три слагаемые в целевой функции задачи (3.2) являются квадратичными, то для обоснования сходимости итераций достаточно установить, что условие (4.1) выполняется для $B_1(u) = \nabla J_n^\beta(u)$, где $u = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$. Оператор $B_1(u)$ имеет представление

$$B_1(u) = \left(-\frac{1}{h}\frac{u_1 - u_0}{\sqrt{(\frac{u_1-u_0}{h})^2 + \beta}}, \frac{1}{h}\left(\frac{u_1 - u_0}{\sqrt{(\frac{u_1-u_0}{h})^2 + \beta}} - \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{(\frac{u_2-u_1}{h})^2 + \beta}}\right), \ldots, \frac{1}{h}\frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{(\frac{u_n-u_{n-1}}{h})^2 + \beta}}\right),$$

а его производная $B_1'(u)$ — симметричная трехдиагональная матрица, i-я строка которой имеет вид

$$\left(0, \ldots, -\frac{\beta}{h((\frac{u_i-u_{i-1}}{h})^2 + \beta)^{3/2}}, \underbrace{\frac{1}{h}\left(\frac{\beta}{((\frac{u_i-u_{i-1}}{h})^2 + \beta)^{3/2}} + \frac{\beta}{h((\frac{u_{i+1}-u_i}{h})^2 + \beta)^{3/2}}\right)}_{i},\right.$$
$$\left. -\frac{\beta}{h((\frac{u_{i+1}-u_i}{h})^2 + \beta)^{3/2}}, \cdots, 0\right).$$

Чтобы убедиться в справедливости (4.1) для $B_1(u)$, достаточно получить оценку для модулей каждого из трех ненулевых элементов i-й строки матрицы $B_1'(u)$. Поясним получение оценки на примере первого ненулевого элемента i-й строки матрицы $B_1'(u) - B_1'(\bar{u})$. Для этого элемента воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях:

$$\left|\frac{\beta}{h((\frac{u_i-u_{i-1}}{h})^2 + \beta)^{3/2}} - \frac{\beta}{h((\frac{\bar{u}_i-\bar{u}_{i-1}}{h})^2 + \beta)^{3/2}}\right| = \left|\frac{\beta}{h}\,\frac{3\xi}{(\xi^2 + \beta)^{5/2}}\,\frac{u_i - u_{i-1} - \bar{u}_i + \bar{u}_{i-1}}{h}\right|$$
$$\leqslant \frac{\beta}{h^2}\left|\frac{3\xi}{(\xi^2 + \beta)^{5/2}}\right|(|u_{i-1} - \bar{u}_{i-1}| + |u_i - \bar{u}_i|).$$

Далее, вычисляя максимум по ξ, получаем, что он достигается при $\xi = \pm\sqrt{\beta}/2$. Подставляя это значение ξ, приходим к оценке сверху

$$\frac{\beta}{h^2}\left|\frac{3\xi}{(\xi^2+\beta)^{5/2}}\right|(|u_{i-1}-\bar{u}_{i-1}|+|u_i-\bar{u}_i|) \leqslant \frac{48}{5^{5/2}\beta h^2}(|u_{i-1}-\bar{u}_{i-1}|+|u_i-\bar{u}_i|).$$

Применяя аналогичные неравенства к остальным элементам i-й строки, убеждаемся в справедливости следующей оценки

$$\|B_1'(u)-B_1'(\bar{u})\| \leqslant \frac{192}{5^{5/2}\beta h^2}\|u-\bar{u}\|.$$

Кроме того, выполнено условие самосопряженности оператора (симметричности матрицы) и неотрицательной определенности $B_1'(u^0)$.

З а м е ч а н и е 2. Если вместо (3.2) используется дискретный вариант задачи (2.1), то потребуется аналогичная оценка для функции $l_n^\beta(u) = \sum_{i=0}^n h\sqrt{u_i^2+\beta}$. В этом случае $B_2(u) = \nabla l_n^\beta(u)$ — вектор с компонентами $hu_i/\sqrt{u_i^2+\beta}$, а $B_2'(u)$ — диагональная матрица с компонентами $h\beta/(u_i^2+\beta)^{3/2}$, для которой, применяя оценки, аналогичные оценкам в предыдущей теореме, получаем

$$\|B_2'(u)-B_2'(\bar{u})\| \leqslant \frac{48h}{5^{5/2}\beta}\|u-\bar{u}\|.$$

Таким образом, для решения задач (2.1), (3.2) применимы сходящиеся итерационные методы Ньютона и нелинейные аналоги α-процессов (æ-процессы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gholami A., Hosseini S.M.** A balanced combination of Tikhonov and total variation regularization for reconstruction of piecewise-smooth signal // Signal Processing. 2013. Vol. 93, no. 7. P. 1945–1960. doi: 10.1016/j.sigpro.2012.12.008 .
2. **Gandes E.J., Romberg J., Tao T.** Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurments // Pure Appl. Math. 2006. Vol. 59, no. 8. P. 1207–1223. doi: 10.1002/cpa.20124 .
3. **Васин В.В.** Восстановление гладкой и разрывной компонент решения линейных некорректных задач // Докл. АН. 2013. Т. 448, № 2. С 127–130. doi: 10.7868/S0869565213020096 .
4. **Vasin V.V.** Regularization of ill-posed problems by using stabilizers in the form of the total variation of a function and its derivatives // J. Inverse Ill-Posed Problem. 2016. Vol. 24, no. 2. P. 149–158. doi: 10.1515/jiip-2015-0050 .
5. **Giusti E.** Minimal surfaces functions of bounded variation. Basel: Birkhäuser, 1984. (Ser. Monographs in Mathematics; vol. 80). doi: 10.1007/978-1-4684-9486-0 .
6. **Acar R., Vogel C.R.** Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems // Inverse Problems. 1994. Vol. 10, no. 6. P. 1217–1229. doi: 10.1088/0266-5611/10/6/003 .
7. **Васин В.В., Беляев В.В.** Аппроксимация компонент решения некорректных задач методом Тихонова с обобщенной вариацией // Докл. АН. 2018. Т. 480, № 6. С. 639–643. doi: 10.1134/S1064562418030250 .
8. **Vasin V.V., Belyaev V.V.** Modification of the Tikhonov method under separate reconstruction of components of solution with various properties // Eurasian J. Math. Comput. Appl. 2017. Vol. 5, iss. 2. P. 66–79.
9. **Vainikko G.** Functionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. Leipzig: Teugner Verlag, 1976. 136 S. doi: 10.1002/zamm.19780580410 .
10. **Grigorieff R.D.** Zur Theorie Approximations regularer Operatoren. I; II // Mathematische Nachrichten. 1973. Bd. 55, Nr. 3. S. 233–249; S. 251–263. doi: 10.1002/mana.19730550113 .
11. **Stummel F.** Diskrete Konvergentz linearer Operatoren. I // I Mathematische Annalen. 1970. Bd. 190, Nr. 1. S. 45–92. doi: 10.1007/BF01349967 ; Diskrete Konvergentz linearer Operatoren. II // Mathematische Zeitschrift. 1971. Bd. 120, Nr. 3. S. 231–264.

12. **Vasin V.V.** Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in the space of functions of bounded variation // Proc. Steklov Inst. Math. 2002. Suppl. 1. P. 225–239.
13. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. Utrecht, The Netherlsnds: VSP, 1995. 255 p.
14. **Гаевский X., Грёгер K., Захариас K.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. M. Мир, 1978. 336 c.
15. **Vasin V.V., Skurydina A.F.** Two-stage method of construction of regularizing algorithms for nonlinear ill-posed problems // Proc. Steklov Inst. Math. 2018. Vol. 301, Suppl. 1. P. 173–190. doi: 10.1134/S0081543818050152 .

Поступила 18.04.2019
После доработки 8.07.2019
Принята к публикации 15.07.2019

Васин Владимир Васильевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
профессор
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: vasin@imm.uran.ru

Беляев Владимир Васильевич
младший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН;
ассистент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: beliaev_vv@mail.ru

REFERENCES

1. Gholami A., Hosseini S.M. A balanced combination of Tikhonov and total variation regularization for reconstruction of piecewise-smooth signal. *Signal Processing*, 2013, vol. 93, no. 7, pp. 1945–1960. doi: 10.1016/j.sigpro.2012.12.008 .
2. Gandes E.J., Romberg J., Tao T. Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurments. *Pure Appl. Math.*, 2006, vol. 59, no. 8, pp. 1207–1223. doi: 10.1002/cpa.20124 .
3. Vasin V.V. Reconstruction of smooth and discontinuous components of solutions to linear ill-posed problems. *Dokl. Math.*, 2013, vol. 87, no. 1, pp. 23–25. doi: 10.1134/S1064562413010146 .
4. Vasin V.V. Regularization of ill-posed problems by using stabilizers in the form of the total variation of a function and its derivatives. *J. Inverse Ill-Posed Problem*, 2016, vol. 24, no. 2, pp. 149–158. doi: 10.1515/jiip-2015-0050 .
5. Giusti E. *Minimal surfaces functions of bounded variation.* Basel, Birkhäuser, 1984, Ser. Monographs in Mathematics, vol. 80. doi: 10.1007/978-1-4684-9486-0 .
6. Acar R., Vogel C.R. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problems. *Inverse Problems*, 1994, vol. 10, no. 6, pp. 1217–1229. doi: 10.1088/0266-5611/10/6/003 .
7. Vasin V.V., Belyaev V.V. Approximation of solution components for ill-posed problems by the Tikhonov method with total variation. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 3, pp. 266–270. doi: 10.1134/S1064562418030250 .
8. Vasin V.V., Belyaev V.V. Modification of the Tikhonov method under separate reconstruction of components of solution with various properties. *Eurasian J. Math. Comput. Appl.*, 2017, vol. 5, iss. 2, pp. 66–79.

9. Vainikko G. *Functionalanalysis der Diskretisierungsmethoden.* Leipzig: Teugner Verlag, 1976, 136 S. doi: 10.1002/zamm.19780580410 .
10. Grigorieff R.D. Zur Theorie Approximations regularer Operatoren. I; II. *Mathematische Nachrichten*, 1973, Bd. 55, Nr. 3, S. 233–249; S. 251–263. doi: 10.1002/mana.19730550113 .
11. Stummel F. Diskrete Konvergentz linearer Operatoren. I *Mathematische Annalen.* 1970. Bd. 190, Nr. 1. S. 45–92. doi: 10.1007/BF01349967 ; Diskrete Konvergentz linearer Operatoren. II *Mathematische Zeitschrift*, 1971, Bd. 120, Nr. 3, S. 231–264.
12. Vasin V.V. Regularization and iterative approximation for linear ill-posed problems in the space of functions of bounded variation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2002, Suppl. 1, pp. 225–239.
13. Vasin V.V., Ageev A.L. *Ill-posed problems with a priori information*, Utrecht, The Netherlsnds, VSP, 1995. 255 p.
14. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen,* Berlin, Akademie-Verlag, 1974. 336 s. Translated to Russian under the title Gaevsky H., Gröger K., Zakharias K, Nonlinear operator equations and operator differential equations, Moscow: Mir Publ., 1978. 336 p.
15. Vasin V.V., Skurydina A.F. Two-stage method of construction of regularizing algorithms for nonlinear ill-posed problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 301, suppl. 1, pp. 173–190. doi: 10.1134/S0081543818050152 .

Received April 18, 2019
Revised July 8, 2019
Accepted July 15, 2019

Vladimir Vasil'evich Vasin, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, email: vasin@imm.uran.ru .

Vladimir Vasil'evich Belyaev, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, email: beliaev_vv@mail.ru .

Cite this article as: V. V. Vasin, V. V. Belyaev. Analysis of a regularization algorithm for a linear operator equation containing a discontinuous component of the solution, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 34–44 .