ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 519.65

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СПЛАЙНОВ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАВНООТСТОЯЩИМИ УЗЛАМИ

В. Т. Шевалдин

Работа посвящена построению новых локальных экспоненциальных сплайнов с равноотстоящими узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору $\mathcal{L}_3(D)$ третьего порядка вида

$$\mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta) \quad (\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R})$$

и установлению порядковых оценок сверху для погрешности аппроксимации этими сплайнами в равномерной метрике на соболевском классе трижды дифференцируемых функций $W_\infty^{\mathcal{L}_3}$. В частности, для дифференциального оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2)$ приведена общая схема построения локальных сплайнов с дополнительными узлами, приводящая в одном случае к известным формосохраняющим сплайнам, а в другом — к новым интерполяционным локальным сплайнам, точным на ядре оператора $\mathcal{L}_3(D)$.

Ключевые слова: локальные экспоненциальные сплайны, линейный дифференциальный оператор, аппроксимация, интерполяция.

V. T. Shevaldin. Algorithms for the construction of third-order local exponential splines with equidistant knots.

We construct new local exponential splines with equidistant knots corresponding to a third-order linear differential operator $\mathcal{L}_3(D)$ of the form

$$\mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta) \quad (\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}).$$

We also establish upper order estimates for the error of approximation by these splines in the uniform metric on the Sobolev class of three times differentiable functions $W_\infty^{\mathcal{L}_3}$. In particular, for the differential operator $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2)$, we give a general scheme for the construction of local splines with additional knots, which leads in one case to known shape-preserving splines and in another case to new local interpolation splines exact on the kernel of $\mathcal{L}_3(D)$.

Keywords: local exponential splines, linear differential operator, approximation, interpolation.

MSC: 41A15

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-279-287

Введение

Теория локальных сплайнов берет начало с работы [1] Т. Лича и Л. Шумейкера, в которой были построены локальные полиномиальные сплайны с произвольными узлами на оси $\mathbb{R}$, сохраняющие пространство алгебраических многочленов заданной степени. Существенный вклад в развитие практических методов этой теории внесла монография [2] Ю. С. Завьялова, Б. И. Квасова и В. Л. Мирошниченко. Следует также отметить исследования Н. П. Корнейчука [3] по нахождению точных констант в теории локальной аппроксимации полиномиальными сплайнами в случае, если узлы сплайна расположены равномерно.

Данная статья посвящена уточнению и дальнейшему развитию методов локальной аппроксимации экспоненциальными сплайнами из монографии автора [4]. Цель исследования — получение новых формул для параметров гладких экспоненциальных сплайнов третьего порядка с равноотстоящими узлами, соответствующих линейному дифференциальному оператору вида

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = (D-\beta)(D-\gamma)(D-\delta),$$

где D — символ дифференцирования и $\beta,\ \gamma,\ \delta$ — произвольные действительные числа.

В первом разделе статьи мы обобщаем соответствующие исследования Т. Лича и Л. Шумейкера [1] в полиномиальном случае на экспоненциальные сплайны с равноотстоящими узлами, сохраняющие ядро оператора $\mathcal{L}_3$, т. е. всевозможные линейные комбинации экспонент $e^{\beta x},\ e^{\gamma x}$ и $e^{\delta x}$, уточняя при этом некоторые результаты Е. В. Стрелковой (Шевалдиной) [5;6] (см. также [4, гл. 1]). В этом разделе приводятся явные формулы для параметров таких сплайнов.

Во втором разделе рассматриваются локальные экспоненциальные сплайны, соответствующие оператору $\mathcal{L}_3$ вида

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2) \quad (\beta > 0).$$

Используя идеи работ [7] Ю. Н. Субботина и [8] Б. И. Квасова (обе работы посвящены локальным параболическим сплайнам), в конструкцию локальных сплайнов мы добавляем к основным узлам дополнительные узлы (посередине между основными), что позволяет, в частности, в одном случае строить известные формосохраняющие сплайны [9], а в другом — новые локальные интерполяционные экспоненциальные сплайны, близкие по форме к эрмитовым параболическим сплайнам Б. И. Квасова [8].

В третьем разделе статьи приводятся порядковые оценки погрешности аппроксимации построенными в предыдущих разделах локальными экспоненциальными сплайнами с равноотстоящими узлами. А именно доказано, что на классе трижды дифференцируемых функций $W^{\mathcal{L}_3}_\infty$ в случае равномерной сетки узлов сплайнов с шагом $h > 0$ величина такой погрешности аппроксимации в равномерной метрике равна $O(h^3)$.

Отметим, что практически вся необходимая библиография по данной тематике содержится в монографии [4] автора статьи. Кроме того, там изложена теория локальных тригонометрических сплайнов третьего порядка, другие более общие результаты по локальной аппроксимации и рассмотрены локальные сплайны с произвольным (не обязательно равномерным) расположением узлов не только на оси $\mathbb{R}$, но и на любом отрезке этой оси с определенным выбором граничных условий. Все эти вопросы в настоящей статье мы затрагивать не будем.

1. Экспоненциальные сплайны третьего порядка, точные на ядре дифференциального оператора

Пусть D — оператор дифференцирования и

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = (D - \beta)(D - \gamma)(D - \delta) \tag{1.1}$$

— линейный дифференциальный оператор третьего порядка, корнями характеристического многочлена которого являются числа $\beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$. В данном разделе будем считать, что все эти числа попарно различны и не равны нулю. Экспоненциальный базисный сплайн (B-сплайн) на отрезке $[-3h/2; 3h/2]$ $(h > 0)$ с равноотстоящими узлами $-3h/2,\ -h/2,\ h/2,\ 3h/2$ определим как обычно (см., например, [4, гл. 3]) формулой

$$B(x) = m \begin{cases} (\gamma-\delta)e^{\beta(x+\frac{3h}{2})} + (\delta-\beta)e^{\gamma(x+\frac{3h}{2})} + (\beta-\gamma)e^{\delta(x+\frac{3h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{3h}{2}; -\dfrac{h}{2}\Big], \\ -(\gamma-\delta)(e^{\gamma h}+e^{\delta h})e^{\beta(x+\frac{h}{2})} - (\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} - & \\ -\ (\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta(x+\frac{h}{2})}, & x \in \Big[-\dfrac{h}{2}; \dfrac{h}{2}\Big], \\ (\gamma-\delta)e^{(\gamma+\delta)h}e^{\beta(x-\frac{h}{2})} + (\delta-\beta)e^{(\delta+\beta)h}e^{\gamma(x-\frac{h}{2})} + & \\ +\ (\beta-\gamma)e^{(\beta+\gamma)h}e^{\delta(x-\frac{h}{2})}, & x \in \Big[\dfrac{h}{2}; \dfrac{3h}{2}\Big], \\ 0, & x \notin \Big[-\dfrac{3h}{2}; \dfrac{3h}{2}\Big]. \end{cases} \tag{1.2}$$

В данном разделе будем считать, что нормализующий множитель $m = m(h)$ равен 1. Несложно понять, что

$$B\Big(\frac{3h}{2}\Big) = B\Big(-\frac{3h}{2}\Big) = 0, \quad B'\Big(\frac{3h}{2}\Big) = B'\Big(-\frac{3h}{2}\Big) = 0, \quad \operatorname{supp} B = \Big[-\frac{3h}{2}; \frac{3h}{2}\Big] \quad \text{и} \quad B \in C^1(\mathbb{R}).$$

Для функции $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ положим

$$y_{j+\alpha} = f((j+\alpha)h) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

Здесь α — фиксированное действительное число, причем, не ограничивая общности, будем считать, что $-1/2 \le \alpha < 1/2$. Рассмотрим функционал

$$I_{j+\alpha} = C_1 y_{j+\alpha} + C_2 y_{j+\alpha+1} + C_3 y_{j+\alpha+2},$$

где $C_1,\ C_2,\ C_3 \in \mathbb{R}$. Локальный экспоненциальный сплайн $S(x)$ с равноотстоящими узлами $(1/2 + j)h$ $(j \in \mathbb{Z})$ определим на всей оси $\mathbb{R}$ (см. [4, гл. 1]) формулой

$$S(x) = S(f, x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} I_{j+\alpha} B(x - jh) \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.3}$$

Параметры $C_1,\ C_2$ и C_3 функционала $I_{j+\alpha}$ будем определять по аналогии с [1], исходя из равенств

$$S(e^{\beta\,\cdot}, x) = e^{\beta x}, \quad S(e^{\gamma\,\cdot}, x) = e^{\gamma x}, \quad S(e^{\delta\cdot}, x) = e^{\delta\, x} \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{1.4}$$

Теорема 1. *Имеют место следующие равенства*:

$$C_1 = \frac{e^{(\gamma+\delta)h} e^{\frac{\beta h}{2} - \beta h\alpha}}{(\gamma-\delta)(e^{\beta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\beta h} - e^{\delta h})^2} + \frac{e^{(\beta+\delta)h} e^{\frac{\gamma h}{2} - \gamma h\alpha}}{(\delta-\beta)(e^{\gamma h} - e^{\beta h})^2 (e^{\gamma h} - e^{\delta h})^2}$$

$$+ \frac{e^{(\beta+\gamma)h} e^{\frac{\delta h}{2} - \delta h\alpha}}{(\beta-\gamma)(e^{\delta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\delta h} - e^{\beta h})^2},$$

$$C_2 = -\frac{(e^{\delta h} + e^{\gamma h}) e^{\frac{\beta h}{2} - \beta h\alpha}}{(\gamma-\delta)(e^{\beta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\beta h} - e^{\delta h})^2} - \frac{(e^{\delta h} + e^{\beta h}) e^{\frac{\gamma h}{2} - \gamma h\alpha}}{(\delta-\beta)(e^{\gamma h} - e^{\beta h})^2 (e^{\gamma h} - e^{\delta h})^2}$$

$$-\frac{(e^{\beta h} + e^{\gamma h}) e^{\frac{\delta h}{2} - \delta h\alpha}}{(\beta-\gamma)(e^{\delta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\delta h} - e^{\beta h})^2},$$

$$C_3 = -\frac{e^{\frac{\beta h}{2} - e^{\beta h\alpha}}}{(\gamma-\delta)(e^{\beta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\beta h} - e^{\delta h})^2} + \frac{e^{\frac{\gamma h}{2} - \gamma h\alpha}}{(\delta-\beta)(e^{\gamma h} - e^{\beta h})^2 (e^{\gamma h} - e^{\delta h})^2}$$

$$+ \frac{e^{\frac{\delta h}{2} - \delta h\alpha}}{(\beta-\gamma)(e^{\delta h} - e^{\gamma h})^2 (e^{\delta h} - e^{\beta h})^2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in [(l-1/2)h; (l+1/2)h]$ $(l \in \mathbb{Z})$. Тогда из (1.3) получаем

$$S(x) = I_{l-1+\alpha} B(x - (l-1)h) + I_{l+\alpha} B(x - lh) + I_{l+\alpha+1} B(x - (l+1)h).$$

Не ограничивая общности считаем $l = 0$, и пусть $-h/2 \le x \le h/2$. Используя (1.2), имеем

$$S(x) = (C_1 y_{\alpha-1} + C_2 y_\alpha + C_3 y_{\alpha+1}) \Big[(\gamma-\delta) e^{\gamma h + \delta h} e^{\beta(x + \frac{h}{2})}$$

$$+ (\delta-\beta) e^{\delta h + \beta h} e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} + (\beta-\gamma) e^{\beta h + \gamma h} e^{\delta(x + \frac{h}{2})}\Big]$$

$$+ (C_1 y_\alpha + C_2 y_{\alpha+1} + C_3 y_{\alpha+2}) \Big[-(\gamma-\delta)(e^{\gamma h} + e^{\delta h}) e^{\beta(x+\frac{h}{2})}$$

$$- (\delta-\beta)(e^{\delta h}+e^{\beta h})e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} - (\beta-\gamma)(e^{\beta h}+e^{\gamma h})e^{\delta(x+\frac{h}{2})}\Big]$$

$$+ (C_1 y_{\alpha+1} + C_2 y_{\alpha+2} + C_3 y_{\alpha+3})\Big[(\gamma-\delta)e^{\beta(x+\frac{h}{2})} + (\delta-\beta)e^{\gamma(x+\frac{h}{2})} + (\beta-\gamma)e^{\delta(x+\frac{h}{2})}\Big].$$

Равенства (1.4) приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $C_1,\ C_2$ и C_3 (более подробные выкладки см. в [5; 6]):

$$C_1 + C_2 e^{\beta h} + C_3 e^{2\beta h} = Y_1 = \frac{e^{\frac{\beta h}{2}-\beta h\alpha}}{(\gamma-\delta)(e^{\delta h}-e^{\beta h})(e^{\gamma h}-e^{\beta h})},$$

$$C_1 + C_2 e^{\gamma h} + C_3 e^{2\gamma h} = Y_2 = \frac{e^{\frac{\gamma h}{2}-\gamma h\alpha}}{(\delta-\beta)(e^{\beta h}-e^{\gamma h})(e^{\delta h}-e^{\gamma h})},$$

$$C_1 + C_2 e^{\delta h} + C_3 e^{2\delta h} = Y_3 = \frac{e^{\frac{\delta h}{2}-\delta h\alpha}}{(\beta-\gamma)(e^{\gamma h}-e^{\delta h})(e^{\beta h}-e^{\delta h})}.$$

Решая полученную систему уравнений, получаем утверждение теоремы 1. □

2. Экспоненциальные сплайны с дополнительными узлами

В настоящем разделе мы будем рассматривать только дифференциальный оператор третьего порядка вида

$$\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2) \quad (\beta > 0) \tag{2.1}$$

и связанные с ним гладкие экспоненциальные сплайны с равноотстоящими узлами. Вначале изложим один вариант общей схемы построения локальных сплайнов с дополнительными узлами, основанный на связи линейных дифференциальных операторов с постоянными действительными коэффициентами и соответствующих конечных разностей (см., например, [10]). Узлы сплайна $x_j = jh$ $(j\in\mathbb{Z})$ будем называть *основными*, а узлы $x_{j+1/2} = (j+1/2)h$ $(j\in\mathbb{Z})$ — *дополнительными*.

Пусть $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $y_j = f(jh)$ $(j\in\mathbb{Z})$. Дифференциальному оператору $\mathcal{L}_2(D) = D^2-\beta^2$ поставим в соответствие разностный оператор

$$\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j = y_{j+2} - (2\operatorname{ch}\beta h)y_{j+1} + y_j \quad (j\in\mathbb{Z}),$$

определенный на пространстве последовательностей $\{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Он обращается в нуль на сеточных значениях (с шагом h) функций $e^{\beta x}$ и $e^{-\beta x}$ (или, что то же самое, функций $\operatorname{ch}\beta x$ и $\operatorname{sh}\beta x$) из ядра оператора $\mathcal{L}_3(D)$ вида (2.1). На любом отрезке $[jh;(j+1)h]$ $(j\in\mathbb{Z})$ локальный экспоненциальный сплайн $S(x)$ будем искать в виде

$$S(x) = S(f,x) = a + b\operatorname{sh}\beta(x-jh) + c\operatorname{ch}\beta(x-jh) + \frac{d}{\beta^2}\Big\{\operatorname{ch}\Big[\beta\Big(x-\Big(j+\frac{1}{2}\Big)h\Big)_+\Big]-1\Big\}, \tag{2.2}$$

где $x_+ = \max\{0;x\}$ и $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Числа a,b,c и d находим из условий

1) $S(jh) = y_j + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1}$,

2) $S((j+1)h) = y_{j+1} + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j$,

3) $(D^2-\beta^2)S\Big|_{x\in(jh;(j+1/2)h)} = A\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j$,

4) $(D^2-\beta^2)S\Big|_{x\in((j+1/2)h;(j+1)h)} = C\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_{j-1} + D\Delta_h^{\mathcal{L}_2} y_j$,

где $k,\ A,\ B,\ C$ и D — некоторые действительные числа (об их выборе скажем чуть позже). После несложных вычислений имеем

$$\begin{aligned}
&a = -\frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big),\\
&c = \frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big) + y_j + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1},\\
&d = (C-A)\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + (D-B)\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j,\\
&b = \frac{1}{\operatorname{sh}\beta h}\Big\{y_{j+1} + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j + \frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big)\\
&-\ \operatorname{ch}\beta h\Big[\frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big) + y_j + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1}\Big]\\
&-\ \frac{\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - 1}{\beta^2}\big[(C-A)\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + (D-B)\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big]\Big\}.
\end{aligned}$$

Следовательно, на отрезке $[jh;(j+1)h]$ $(j \in \mathbb{Z})$ локальный сплайн $S(x)$ вида (2.2) может быть записан в виде

$$\begin{aligned}
S(x) &= -\frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big)\\
&+\ \operatorname{ch}\beta(x-jh)\Big[\frac{1}{\beta^2}\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big) + y_j + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1}\Big]\\
&+\ \frac{\operatorname{sh}\beta(x-jh)}{\operatorname{sh}\beta h}\Big\{y_{j+1} + k\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j - \operatorname{ch}\beta h y_j - k\operatorname{ch}\beta h\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1}\\
&+\ \frac{1}{\beta^2}(1-\operatorname{ch}\beta h)\big(A\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + B\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big)\\
&-\ \Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - 1\Big)\big[(C-A)\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + (D-B)\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big]\Big\}\\
&+\ \frac{\operatorname{ch}(\beta(x-(j+1/2)h)_+) - 1}{\beta^2}\big[(C-A)\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1} + (D-B)\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big].
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Числа $k,\ A,\ B,\ C$ и D будем искать из соображений гладкости сплайна $S(x)$, а именно, исходя из равенства

$$S'((j+1)h-0) = S'((j+1)h+0) \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

Вычисляя левую и правую производные сплайна $S(x)$ в основных узлах по формуле (2.3) и приравнивая в полученном равенстве коэффициенты при $\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1}$, $\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j$ и $\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j+1}$, получим следующую систему из трех линейных алгебраических уравнений:

$$\left\{\begin{aligned}
&\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - 1\Big)A + \Big(\operatorname{ch}\beta h - \operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)C = k\beta^2,\\
&\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - \operatorname{ch}\beta h\Big)B + \Big(1 - \operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)D = -k\beta^2,\\
&\frac{\beta}{\operatorname{sh}\beta h}(1 - 2k\operatorname{ch}\beta h) + \frac{1}{\beta\operatorname{sh}\beta h}\Big[\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - \operatorname{ch}\beta h\Big)A + \Big(1 - \operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)C\Big]\\
&= \frac{\operatorname{ch}\beta h}{\beta\operatorname{sh}\beta h}\Big[\Big(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2} - \operatorname{ch}\beta h\Big)B + \Big(1 - \operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}\Big)D\Big] + \frac{\operatorname{sh}\beta h}{\beta}B + \frac{\operatorname{sh}\frac{\beta h}{2}}{\beta}(D-B).
\end{aligned}\right. \tag{2.4}$$

Поскольку уравнений три, а неизвестных — пять, то у нас есть две свободы выбора неизвестных коэффициентов. В данном разделе мы рассмотрим два случая решения системы (2.4).

П е р в ы й с л у ч а й. Положим $B=C=0$. Тогда

$$A=D=\frac{k\beta^2}{\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}-1},\quad k=\frac{1}{8\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}\operatorname{ch}^2\dfrac{\beta h}{4}}.$$

Сплайны с равноотстоящими узлами с такими параметрами совпадают со сплайнами из работы [9]. Они, как следует из [9], обладают хорошими аппроксимативными и формосохраняющими свойствами. На их основе Е. В. Стрелковой (Шевалдиной) построены более общие экспоненциальные сплайны, соответствующие оператору $\mathcal{L}_3(D)$ вида (2.1), с произвольным неравномерным расположением узлов на числовой оси (свойства таких сплайнов помимо [9] см., например, в [4, гл. 3]).

В т о р о й с л у ч а й. Положим $k=0$. Тогда из (2.4) получаем три линейных уравнения

$$\begin{cases} A\Big(\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}-1\Big)+C\Big(\operatorname{ch}\beta h-\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}\Big)=0,\\ B\Big(\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}-\operatorname{ch}\beta h\Big)+D\Big(1-\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}\Big)=0,\\ \beta^2+\Big(\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}-\operatorname{ch}\beta h\Big)(A+D)+\Big(1-\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{2}\Big)(B+C)=0\end{cases}\tag{2.5}$$

относительно четырех неизвестных A, B, C и D. Недостающее уравнение для этих неизвестных будем искать из точности схемы (2.2) на функции, равной константе. Тогда из (2.2) приходим к уравнениям

$$\begin{cases} A+B=\dfrac{\beta^2}{4\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta h}{2}},\\ C+D=A+B.\end{cases}\tag{2.6}$$

Система (2.5), (2.6) имеет единственное решение

$$A=D=\frac{\operatorname{sh}\dfrac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\dfrac{\beta h}{4}}m,\quad B=C=-m,$$

где $m=\dfrac{\beta^2}{8\operatorname{sh}^2\dfrac{\beta h}{4}\operatorname{ch}\dfrac{\beta h}{4}}$. Таким образом, сплайн $S(x)$ вида (2.2) представляется в виде

$$\begin{aligned} S(x)={}&-\frac{m}{\beta^2}\left[\frac{\operatorname{sh}\frac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\frac{\beta h}{4}}\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1}-\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\right]+\operatorname{ch}\beta(x-jh)\left[y_j+\frac{m}{\beta^2}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\frac{\beta h}{4}}\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1}-\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\right)\right]\\ &+\frac{\operatorname{sh}\beta(x-jh)}{\operatorname{sh}\beta h}\Bigg[y_{j+1}-\operatorname{ch}\beta h y_j+\frac{(1-\operatorname{ch}\beta h)m}{\beta^2}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\frac{\beta h}{4}}\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1}-\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\right)\\ &+\frac{m(\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}-1)}{\beta^2}\left(1+\frac{\operatorname{sh}\frac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\frac{\beta h}{4}}\right)\big(\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1}-\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big)\Bigg]\\ &-\frac{\operatorname{ch}(\beta(x-(j+\frac12)h)_+)-1}{\beta^2}\left(1+\frac{\operatorname{sh}\frac{3\beta h}{4}}{\operatorname{sh}\frac{\beta h}{4}}\right)\big(\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_{j-1}-\Delta_h^{\mathcal{L}_2}y_j\big),\quad x\in[jh;(j+1)h]\quad (j\in\mathbb{Z}).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Этот сплайн является интерполяционным в том смысле, что

$$S(jh) = y_j = f(jh),$$

он имеет узлы “склейки” в точках $\{jh\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\{(j+1/2)h\}_{j\in\mathbb{Z}}$ и сохраняет все ядро оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2-\beta^2)$, т. е.

$$S(1,x) = 1, \quad S(e^{\beta};x) = e^{\beta x}, \quad S(e^{-\beta};x) = e^{-\beta x} \quad (x\in\mathbb{R}).$$

3. Оценки погрешности аппроксимации локальными экспоненциальными сплайнами

Пусть

$$W_\infty^{\mathcal{L}_3} = \{f:\ f''\in AC,\ \|\mathcal{L}_3(D)f\|_{L_\infty}\le 1\}$$

— класс трижды почти всюду дифференцируемых функций, соответствующих оператору вида (1.1). Здесь AC — класс локально абсолютно непрерывных функций и $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R})$ — класс функций, существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ с обычным определением нормы

$$\|f\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Любую функцию $f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}$ можно представить в виде

$$f(x) = \lambda_1 e^{\beta x} + \lambda_2 e^{\gamma x} + \lambda_3 e^{\delta x} + \int\limits_0^x \varphi_3(x-t)\mathcal{L}_3(D)f(x)\,dt,$$

где λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\mathbb{R}$ и φ_3 — решение линейного однородного дифференциального уравнения $\mathcal{L}_3(D)f=0$, удовлетворяющее условиям: $\varphi_3(0)=\varphi_3'(0)=0$, $\varphi_3''(0)=1$. Несложно понять, что это решение имеет вид

$$\varphi_3(x) = \frac{e^{\beta x}}{(\beta-\delta)(\beta-\gamma)} + \frac{e^{\gamma x}}{(\gamma-\delta)(\gamma-\beta)} + \frac{e^{\delta x}}{(\delta-\beta)(\delta-\gamma)}.$$

Здесь, как и в первом разделе, мы считаем, что числа β, γ, $\delta\in\mathbb{R}$ являются попарно различными и не равными нулю. В случае оператора $\mathcal{L}_3(D)$ вида (2.1) для любой функции $f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}$ имеет место равенство

$$f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 e^{\beta x} + \lambda_3 e^{-\beta x} + \int\limits_0^x \varphi_3(x-t)\mathcal{L}_3(D)f(t)\,dt,$$

где λ_1, λ_2, $\lambda_3\in\mathbb{R}$ и

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{\beta^2}(\operatorname{ch}\beta x - 1).$$

Теорема 2. *Для любой функции $f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}$ и локальных экспоненциальных сплайнов $S(x)$ вида* (1.3), *удовлетворяющих условиям* (1.4), *и вида* (2.7) *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}} \|f-S\|_C = O(h^3) \quad (h\to 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В случае оператора $\mathcal{L}_3(D)$ вида (1.1) для любой функции $f\in W_\infty^{\mathcal{L}_3}$ по формуле (1.3) построим локальный экспоненциальный сплайн $S(x)$, параметры

C_1, C_2 и C_3 которого выберем исходя из равенств теоремы 1. Поскольку этот сплайн сохраняет все три линейно независимые функции $e^{\beta x}$, $e^{\gamma x}$ и $e^{\delta x}$ из ядра оператора $\mathcal{L}_3$, то разность $S(x) - f(x)$ не будет содержать неинтегральных слагаемых (см. [5; 6] и [4, доказательство теоремы 1.3]) и может быть записана в виде

$$S(x) - f(x) = \int\limits_a^b K_1(x,t)\mathcal{L}_3(D)f(t)\,dt, \quad x \in \Big[\Big(l-\frac{1}{2}\Big)h; \Big(l+\frac{1}{2}\Big)h\Big] \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

где $[a;b] = [(l-1+\alpha)h; (l+2+\alpha)h]$ и $K_1(x,t)$ — некоторое непрерывное по обеим переменным ядро. Отсюда стандартным образом (см. [4, теоремы 1.3–1.6]) получаем утверждение теоремы 2 для сплайнов вида (1.3), удовлетворяющих равенствам (1.4).

Во втором случае для оператора $\mathcal{L}_3(D) = D(D^2 - \beta^2)$ и сплайнов вида (2.7) доказательство теоремы 2 вполне аналогично. Здесь разность $S(x) - f(x)$, поскольку интерполяционный экспоненциальный сплайн из второго раздела точен на всем ядре оператора $\mathcal{L}_3(D)$, может быть записана в виде

$$S(x) - f(x) = \int\limits_{(l-1)h}^{(l+2)h} K_2(x,t)\mathcal{L}_3(D)f(t)\,dt, \quad x \in [lh; (l+1)h] \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

где $K_2(x,t)$ — некоторое непрерывное по обеим переменным ядро; и снова методом [4, теоремы 1.3–1.6] получаем равенство

$$\sup_{f \in W_\infty^{\mathcal{L}_3}} \|f - S\|_C = O(h^3) \quad (h \to 0). \qquad \square$$

Заключение

Новые явные формулы для параметров локальных экспоненциальных сплайнов, аппроксимирующих трижды почти всюду дифференцируемые функции с максимальным порядком точности в зависимости от шага равномерной сетки, полученные в настоящей работе, могут оказаться полезными для специалистов в вычислительной математике, имеющих дело с аппроксимацией различных быстро растущих функций и поверхностей сложной формы. В практических приложениях локальных экспоненциальных сплайнов из первого раздела статьи выбор параметра $\alpha:\ -1/2 \le \alpha < 1/2$, характеризующего сдвиг узлов сплайна по сравнению с точками интерполяции аппроксимируемой функции, может быть осуществлен исходя из конкретных особенностей рассматриваемой задачи. Более точные оценки погрешности аппроксимации можно получить, исследуя знаки ядер $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ как функций от переменной t при фиксированном $x \in \mathbb{R}$ (см., например, [5–7; 9]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lyche T., Schumaker L.L.** Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 15, № 4. P. 294–325.
2. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980. 352 с.
3. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М.: Наука, 1984. 352 с.
4. **Шевалдин В.Т.** Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014. 198 с.
5. **Шевалдина Е.В.** Аппроксимация локальными $\mathcal{L}$-сплайнами четного порядка, сохраняющими ядро дифференциального оператора // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2009. Вып. 2. С. 62–73.
6. **Шевалдина Е.В.** Локальные $\mathcal{L}$-сплайны, сохраняющие ядро дифференциального оператора // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 1. С. 111–121.

7. **Субботин Ю.Н.** Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 7. С. 996–1003.
8. **Квасов Б.И.** Интерполяция эрмитовыми параболическими сплайнами // Изв. ВУЗов. Математика. 1984. № 5. С. 25–32.
9. **Kostousov K.V., Shevaldin V.T.** Approximation by local exponential splines // Proc. Steklov Institute Math. 2004. Suppl. 10. P. 147–157.
10. **Шевалдин В.Т.** Некоторые задачи экстремальной интерполяции в среднем для линейных дифференциальных операторов // Тр. МИАН СССР. 1983. Т. 164. С. 203–240.

Поступила 14.06.2019
После доработки 10.07.2019
Принята к публикации 5.08.2019

Шевалдин Валерий Трифонович
д-р физ.-мат. наук
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Lyche T., Schumaker L.L. Local spline approximation methods. *J. Approx. Theory*, 1975, vol. 15, no 4, pp. 294–325. ISBN: 10.1016/0021-9045(75)90091-X .
2. Zavyalov Yu.S, Kvasov B.I., Miroshnichencko V.L. *Metody splain-funktsii* [Methods of Spline-Functions]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 352 p.
3. Korneichuk N.P. *Splainy v teorii priblizheniya* [Splines in approximation theory]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 352 p.
4. Shevaldin V.T. *Approksimatsiya lokal'nymi splainami* [Approximation by local splines]. Ekaterinburg: Ural Branch of RAS Publ., 2014, 198 p.
5. Shevaldina E.V. Approximation by local $\mathcal{L}$-splines of even order preserving the kernel of differential operator. *Izv. of Tula state University. Natural Sciences*, 2009, no. 2, pp. 62–73 (in Russian).
6. Shevaldina E.V. Local $\mathcal{L}$-splines preserving the differential operator kernel. *Num. Anal. Appl.*, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 90–99. doi: 10.1134/S1995423910010106 .
7. Subbotin Yu.N. Inheritance of monotonicity and convexity in local approximations. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1993, vol. 33, no. 7, pp. 879–884.
8. Kvasov B.I. Interpolation by parabolic Hermitian splines. *Soviet Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)*, 1984, vol. 28, no. 5, pp. 29–37.
9. Kostousov K.V., Shevaldin V.T. Approximation by local exponential splines. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2004, suppl. 10, pp. 147–157.
10. Shevaldin V.T. Some problems of extremal interpolation in the mean for linear differential operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1985, vol. 164, pp. 233–273.

Received June 14, 2019
Revised July 10, 2019
Accepted August 5, 2019

Shevaldin Valerii Trifonovich, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia,
e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. T. Shevaldin. Algorithms for the construction of third-order local exponential splines with equidistant knots, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 279–287 .