ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 519.857

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ПОМЕХИ И ВОЗМОЖНОЙ ПОЛОМКЕ[1]

В. И. Ухоботов

Рассматривается линейная задача управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи. Известно только, что ее значения принадлежат заданному связному компакту. Задан момент окончания процесса управления. Терминальная составляющая платы зависит от модуля линейной функции фазовых переменных. Интегральная составляющая платы задается интегралом от степени управления. Считается, что возможна одна поломка, которая приводит к изменению динамики управляемого процесса. Время наступления поломки заранее не известно. Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата. Противной стороной выступает помеха и момент наступления поломки. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным.

Ключевые слова: управление, помеха, поломка.

V. I. Ukhobotov. On a control problem under a disturbance and a possible breakdown.

A linear control problem is considered in the presence of an uncontrolled disturbance. It is only known that the values of the disturbance belong to a given connected compact set. The terminal time of the control process is fixed. The terminal component of the payoff depends on the modulus of a linear function of the phase variables, and the integral component is given by an integral of a power of the control. We admit the possibility of one breakdown leading to a change in the dynamics of the control process. The time of the breakdown is not known in advance. The construction of the control is based on the principle of minimizing the guaranteed result. The opponents are the disturbance and the time of the breakdown. Necessary and sufficient conditions for the optimality of an admissible control are found.

Keywords: control, disturbance, breakdown.

MSC: 91A23, 91A24, 91A80

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-265-278

Введение

Задача управления с возможными нарушениями в динамике в результате поломки может быть рассмотрена в рамках подхода, который основывается на принципе оптимизации гарантированного результата [1]. Такой подход естественен, если известен только промежуток времени, когда может произойти поломка. К числу первых работ, посвященных задачам управления с поломкой в такой постановке, относится исследование [2].

Линейную задачу управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи и с фиксированным моментом окончания процесса управления с помощью линейной замены переменных [3] можно свести к виду, когда в правой части новых уравнений стоит только сумма управления и помехи, значения которых принадлежат заданным множествам, зависящим от времени. Важный класс составляют задачи, когда в приведенном виде как терминальное множество, так и воздействия управления и помехи описываются одним и тем же выпуклым компактом, который может быть параллельно перенесен и гомотетично растянут. Такую динамику имеют после замены переменных известные дифференциальные игры “изотропные ракеты” [4], контрольный пример Л.С. Понтрягина [5], в которых помехой является управление второго игрока-противника. Для таких дифференциальных игр в [5] построен альтернированный интеграл. В [6] представлен альтернированный интеграл для однотипных игр

[1]Работа выполнена при поддержке РНФ (проект 19-11-00105).

с произвольным выпуклым замкнутым терминальным множеством и построены оптимальные позиционные управления игроков. В [7] первый игрок, выводя фазовую точку на круг заданного радиуса, минимизирует интегральную плату, которая задается интегралом от выпуклой функции, зависящей от нормы его управления.

В случае, если в линейной задаче управления с помехой терминальная составляющая платы является значением в момент окончания процесса управления модуля линейной функции от фазовых переменных, линейная замена переменных приводит к однотипной задаче, когда множества значений управления и помехи суть отрезки, зависящие от времени. В работе [8] рассмотрена такая задача, когда плата является суммой как терминальной составляющей, так и интеграла от выпуклой функции. Найдены необходимые условия, которым удовлетворяет оптимальное управление. В [9] рассмотрена аналогичная задача, в которой интегральная составляющая платы является интегралом от степени нормы управления. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых управление является оптимальным.

В настоящей работе рассматривается линейная задача управления при наличии воздействия со стороны неконтролируемой помехи с заданным моментом окончания процесса управления. Терминальная составляющая платы зависит от модуля линейной функции фазовых переменных в момент окончания процесса управления. Интегральная составляющая платы задается интегралом от степени управления. Считается, что возможна одна поломка, которая приводит к изменению динамики управляемого процесса. Время наступления поломки заранее не известно. Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата. Найдены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых допустимое управление является оптимальным.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемый процесс

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)\xi + \phi C(t)\chi + \eta, \quad x(t_0) = x_0; \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad t_0 \le t \le p. \tag{1.1}$$

Здесь p — заданный момент окончания процесса управления; t_0 — начальный момент времени; $\xi \in M \subset \mathbb{R}^d$; $\phi \in \mathbb{R}$ и $\chi \in N \subset \mathbb{R}^\rho$ являются управлениями. Множества M и N суть связные компакты, симметричные относительно начала координат. Помеха η принадлежит связному компакту $Q \subset \mathbb{R}^m$. Непрерывные при $t_0 \le t \le p$ матрицы $A(t)$ и $C(t)$ имеют размерности $m \times m$ и $m \times \rho$ соответственно. Далее, $B(t) = B_1(t)$ при $t_0 \le t < \tau \le p$ и $B(t) = B_2(t)$ при $\tau \le t \le p$. Здесь $B_j(t)$, $j = 1, 2$ непрерывные при $t_0 \le t \le p$ матрицы размерности $m \times d$.

Такая ситуация может иметь место, когда в момент времени $t_0 \le \tau \le p$ происходит поломка и меняется динамика процесса. Момент поломки τ заранее не известен.

Определим допустимое управление. Задано число $q > 1$. Обозначим через $L_q[t_0, p]$ пространство измеримых функций $\phi : [t_0, p] \to \mathbb{R}$ с суммируемой на отрезке $[t_0, p]$ степенью $|\phi(r)|^q$. Допустимым управлением являются неотрицательная функция $\phi(\cdot) \in L_q[t_0, p]$ и произвольные функции $\chi : [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to N$ и $\xi : [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to M$. Помеха реализуется в виде произвольной функции $\eta : [t_0, p] \times \mathbb{R}^m \to Q$.

Такое определение допустимого управления продиктовано следующим соображением. В задачах управления механическими системами переменного состава, движение в которых описывается уравнением Мещерского [10], возможен случай, когда закон изменения реактивной массы нужно задавать программным образом, а управлять можно только направлением относительной скорости ее отделения. В этом случае приходим к сформулированному выше допустимому управлению.

Следуя [3], движения системы (1.1), порожденные допустимыми управлением и помехой, определим с помощью ломаных.

Возьмем разбиение ω отрезка $[t_0, p]$ с диаметром $d(\omega)$:

$$\omega : t_0 < t_1 < \ldots < t_l < t_{l+1} = p, \quad d(\omega) = \max(t_{i+1} - t_i), \quad i = \overline{0, l}.$$

Построим $x_\omega(t)$ при $t_0 < t \le t_1$ как решение задачи Коши:

$$\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + B(t,\tau)\xi(t_0, x_\omega(t_0)) + \phi(t)C(t)\xi(t_0, x_\omega(t_0)) + \eta(t_0, x_\omega(t_0)), \quad x_\omega(t_0) = x_0.$$

Обозначим $x_1 = x_\omega(t_1)$. Построим $x_\omega(t)$ при $t_1 < t \le t_2$ как решение задачи Коши:

$$\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + B(t,\tau)\xi(t_1, x_\omega(t_1)) + \phi(t)C(t)\xi(t_1, x_\omega(t_1)) + \eta(t_1, x_\omega(t_1)), \quad x_\omega(t_1) = x_1.$$

Далее, предположим, что $x_\omega(t)$ построено при $t_{i-1} < t \le t_i$, $i \le l$. Обозначим $x_i = x_\omega(t_i)$. Построим $x_\omega(t)$ при $t_i < t \le t_{i+1}$ как решение задачи Коши

$$\dot{x}_\omega(t) = A(t)x_\omega(t) + B(t,\tau)\xi(t_i, x_\omega(t_i)) + \phi(t)C(t)\xi(t_i, x_\omega(t_i)) + \eta(t_i, x_\omega(t_i)), \quad x_\omega(t_i) = x_i. \quad (1.2)$$

Здесь обозначено $B(t,\tau) = B_1(t)$ при $t_0 \le t < \tau$ и $B(t,\tau) = B_2(t)$ при $\tau \le t \le p$.

Можно показать, что семейство ломаных (1.2), определенных на отрезке $[t_0, p]$, является равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным [11, с. 56]. По теореме Арцела [12, с. 104], из любой последовательности ломаных (1.2) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся на отрезке $[t_0, p]$. Под движением, реализовавшимся при допустимых $\phi(t)$, $\xi(t,x)$, $\eta(t,x)$ и моменте поломки τ из начального состояния $x(t_0) = x_0$, будем понимать любой равномерный предел последовательности ломаных (1.2), у которых диаметр разбиения $d(\omega)$ стремится к нулю.

Показателем качества управления является величина

$$G\left(|\langle \psi_0, x(p)\rangle| - C\right) + \int\limits_{t_0}^{p} \phi^q(r)\,dr. \quad (1.3)$$

Здесь $\psi_0 \in \mathbb{R}^m$ — заданный вектор; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$; C — заданное число; $G : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — заданная функция.

Управление строится исходя из принципа минимизации гарантированного результата [1] показателя качества (1.3).

2. Переход к одномерной однотипной задаче

Следуя [3, с. 160], перейдем к новой управляемой системе, в уравнениях движения которой отсутствует фазовый вектор. Рассмотрим при $t_0 \le t \le p$ решение $\psi(t)$ задачи Коши:

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad \psi(t_0) = \psi_0. \quad (2.1)$$

Здесь $A^*(t)$ — транспонированная матрица. Положим

$$\beta_-(t) = \min_{\eta\in Q}\langle \psi(t), \eta\rangle, \quad \beta_+(t) = \max_{\eta\in Q}\langle \psi(t), \eta\rangle. \quad (2.2)$$

Тогда из связности компакта Q следует [13, с. 333, теорема 4], что

$$\langle \psi(t), \eta\rangle = \frac{1}{2}(\beta_+(t) + \beta_-(t)) + \beta(t)v, \quad |v| \le 1, \quad \beta(t) = \frac{1}{2}(\beta_+(t) - \beta_-(t)) \ge 0. \quad (2.3)$$

Обозначим

$$b_j(t) = \max_{\xi\in M}\langle \psi(t), B_j(t)\xi\rangle, \quad j = 1,2; \quad c(t) = \max_{\chi\in N}\langle \psi(t), C(t)\chi\rangle. \quad (2.4)$$

Из связности и из симметрии компактов M и N имеем, что $b_j(t) \ge 0$, $c(t) \ge 0$ и

$$\langle \psi(t), B_j(t)\xi\rangle = -b_j(t)u_*, \quad |u_*| \le 1; \quad \langle \psi(t), C(t)\chi\rangle = -c(t)u^*, \quad |u^*| \le 1. \quad (2.5)$$

Следовательно, при $\phi(t) \geq 0$

$$\langle \psi(t), B_j(t)\xi\rangle + \langle \psi(t), \phi(t)C(t)\chi\rangle = -b_j(t)u_* - \phi(t)c(t)u^* = -(b_j(t) + \phi(t)c(t))u, \quad |u| \leq 1.$$

Последнее равенство можно показать, заметив, что множество всех возможных значений выражения $-b_j(t)u_* - \phi(t)c(t)u^*$ при $|u_*| \leq 1$, $|u^*| \leq 1$ совпадает с отрезком $[-b_j(t) - \phi(t)c(t), b_j(t) + \phi(t)c(t)]$. Отметим, что функции (2.2) и (2.4) являются непрерывными [14, с. 84, лемма 3.5]. Следовательно, непрерывной является и функция $\beta(t)$ (2.3).

Перейдем к новой переменной

$$z = \langle \psi(t), x\rangle + \frac{1}{2}\int_t^p (\beta_+(r) + \beta_-(r))dr - C. \tag{2.6}$$

Тогда из (2.1) и (2.6) следует, что $z(p) = \langle \psi_0, x(p)\rangle - C$, а ломаная $z_\omega(t)$, отвечающая ломаной (1.2), определяется равенствами

$$\dot{z}_\omega(t) = -(b(t,\tau) + \phi(t)c(t))u_i + \beta(t)v_i, \quad |u_i| \leq 1, \quad |v_i| \leq 1.$$

Здесь обозначено $b(t,\tau) = b_1(t)$ при $t_0 \leq t < \tau$ и $b(t,\tau) = b_2(t)$ при $\tau \leq t \leq p$. Таким образом, получили одномерную однотипную задачу управления

$$\dot{z} = -(b(t,\tau) + \phi(t)c(t))u + \beta(t)v, \quad z(t_0) = z_0; \quad \phi(t) \geq 0, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1 \tag{2.7}$$

с критерием качества

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^p \phi^q(r)dr \to \min_u \max_{v,\ \tau}. \tag{2.8}$$

В этой задаче допустимым управлением являются неотрицательная функция $\phi(\cdot) \in L_q[t_0, p]$ и произвольная функция $u(t,z)$ с $|u(t,z)| \leq 1$. Допустимой помехой является произвольная функция $v(t,z)$ с $|v(t,z)| \leq 1$. Движение $z(t)$ определяется как равномерный предел последовательности ломаных

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int_{t_i}^t (b(r,\tau) + \phi(r)c(r))dr\ u(t_i, z_\omega(t_i)) + \int_{t_i}^t \beta(r)dr\ v(t_i, z_\omega(t_i)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \tag{2.9}$$

у которых $z_\omega(t_0) = z_0$ и диаметр разбиения $d(\omega) \to 0$.

Определение. Решением задачи (2.7), (2.8) называются допустимое управление $\phi_0(t)$, $u_0(t,z)$ и число V_0 такие, что

1) для любых допустимой помехи $v(t,z)$, момента поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ и любого движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$, порожденного $\phi_0(t)$, $u_0(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^p \phi_0^q(r)dr \leq V_0;$$

2) для любого допустимого управления $\phi(t)$, $u(t,z)$ и для любого числа $V < V_0$ найдутся допустимая помеха $v(t,z)$ и момент поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ такие, что для движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$, порожденного $\phi(t)$, $u(t,z)$ и $v(t,z)$, выполнено неравенство

$$G(|z(p)|) + \int_{t_0}^p \phi^q(r)dr > V.$$

3. Условия окончания в однотипной задаче

Рассмотрим уравнения движения (2.7) в более общем случае, когда z, u, v принадлежат пространству $\mathbb{R}^n$, а $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Зафиксируем неотрицательную функцию $\phi(\cdot) \in L_q[t_0, p]$, число $\varepsilon \geq 0$ и рассмотрим задачу управления с помехой и с возможной поломкой

$$\dot{z} = -a(t,\tau)u + \beta v, \quad |u| \leq 1, \quad |v| \leq 1 \tag{3.1}$$

с условием окончания

$$|z(p)| \leq \varepsilon. \tag{3.2}$$

Здесь обозначено

$$a(t,\tau) = b(t,\tau) + c(t)\phi(t). \tag{3.3}$$

Для полноты изложения считаем, что функции $b_i(t) \geq 0$, $i = 1, 2$, $\beta(t) \geq 0$ и $c(t) \geq 0$ суммируемы на отрезке $[t_0, p]$, причем $c(t) \in L_\gamma[t_0, p]$. Здесь $\gamma = \dfrac{q}{q-1}$. Перепишем уравнение ломаной (2.9) для уравнения (3.1)

$$z_\omega(t) = z_\omega(t_i) - \int\limits_{t_i}^{t} a(r,\tau)dr\ u(t_i, z_\omega(t_i)) + \int\limits_{t_i}^{t} \beta(r)dr\ v(t_i, z_\omega(t_i)), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}. \tag{3.4}$$

При $t_0 \leq t \leq p$ определим функции

$$D(t) = \min_{t\leq\tau\leq p}\left(\int\limits_{t}^{\tau} b_1(r)dr + \int\limits_{\tau}^{p} b_2(r)dr\right), \quad f(t) = \int\limits_{t}^{p}(\beta(r) - c(r)\phi(r))dr - D(t), \tag{3.5}$$

$$F(t) = \max_{t\leq s\leq p} f(s). \tag{3.6}$$

Отметим, что эти функции являются непрерывными. Обозначим

$$\varrho(z) = \frac{z}{|z|} \text{ при } |z| > 0 \text{ и } \varrho(0) \text{ — любое с ограничением } |\varrho(0)| = 1. \tag{3.7}$$

Теорема 1. *Помеха $v = \varrho(z)$ с некоторым моментом поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ обеспечивает выполнение неравенства*

$$|z(p)| \geq \max(F(t_0); |z_0| + f(t_0)) \tag{3.8}$$

для любого управления $|u(t,z)| \leq 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный момент поломки $t_0 \leq \tau \leq p$. Подставим помеху $v = \varrho(z)$ в формулу (3.4). Тогда из (3.7) и неравенства треугольника следует, что любая ломаная $z_\omega(t)$ в точках t_i ее разбиения ω удовлетворяет неравенству

$$|z_\omega(t_{i+1})| \geq \left|z_\omega(t_i) + \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \beta(r)dr\varrho(z)\right| - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} a(r,\tau)dr = |z_\omega(t_i)| - \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (a(r,\tau) - \beta(r))dr.$$

Просуммируем эти неравенства. Для любой точки t_i разбиения ω получим

$$|z_\omega(p)| \geq |z_\omega(t_i)| - \int\limits_{t_i}^{p}(a(r,\tau) - \beta(r))dr. \tag{3.9}$$

Пусть последовательность ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметры разбиений стремятся к нулю, равномерно сходится на отрезке $[t_0, p]$ к рассматриваемому движению $z(t)$. Тогда из (3.9) получим, что

$$|z(p)| \geq |z(t)| - \int\limits_t^p (a(r,\tau) - \beta(r))dr \tag{3.10}$$

для любого $t_0 \leq t \leq p$.

Пусть $|z_0| + f(t_0) \geq F(t_0)$. Из (3.3) и (3.5) следует, что существует момент поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ такой, что $f(t_0) = \int\limits_{t_0}^p (\beta(r) - a(r,\tau))dr$. Отсюда и из формулы (3.10) при $t = t_0$ имеем неравенство (3.8).

Пусть $|z_0| + f(t_0) < F(t_0)$. Из формул (3.3), (3.5) и (3.6) следует, что существуют числа $t_0 \leq s \leq \tau \leq p$ такие, что

$$F(t_0) = \int\limits_s^p (\beta(r) - a(r,\tau))dr.$$

Отсюда и из неравенства (3.10) при $t = s$ получим, что $|z(p)| \geq |z(s)| + F(t_0) \geq F(t_0)$. Стало быть, неравенство (3.8) выполнено. $\square$

Теорема 2. *Управление $u = \varrho(z)$ обеспечивает выполнение неравенства*

$$|z(p)| \leq \max(F(t_0); |z_0| + f(t_0)) \tag{3.11}$$

для любой помехи $|v(t,z)| \leq 1$ и при любом моменте поломки $t_0 \leq \tau \leq p$ для любого реализовавшегося движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (3.5) и (3.6) следует, что $f(p) = 0$ и $F(t) \geq F(p) = 0$ при всех $t_0 \leq t \leq p$. Поэтому, если $|z(p)| = 0$, то неравенство (3.11) выполнено.

Пусть $|z(p)| > 0$. Покажем, что существует число $t_0 \leq t_* < p$ такое, что

$$|z(t_*)| \leq \max(F(t_0); |z_0| + f(t_0)) - f(t_*), \tag{3.12}$$

$$|z(t)| > F(t) - f(t) \text{ для всех } t_* < t \leq p. \tag{3.13}$$

Неравенство (3.12) выполнено при $t_* = t_0$. Поэтому, если неравенство (3.13) выполнено при всех $t_0 < t \leq p$, то искомым числом t_* будет t_0.

Пусть неравенство (3.13) нарушается для некоторых чисел $t_0 < t < p$. Обозначим через t_* верхнюю грань этих чисел. Поскольку $f(p) = F(p) = 0$ и $|z(p)| > 0$, то $t_0 < t_* < p$. Далее, неравенство (3.13) выполнено при всех $t_* < t \leq p$, а при $t = t_*$ в нем достигается равенство. Отсюда, учитывая монотонность функции $F(t)$, получим, что

$$|z(t_*)| = F(t_*) - f(t_*) \leq F(t_0) - f(t_*).$$

Следовательно, неравенство (3.12) выполнено.

Зафиксируем число $t_* < t^* < p$. Поскольку $F(t) \geq f(t)$, то из неравенства (3.13) следует, что существует число $\delta > 0$, для которого

$$|z(t)| \geq 2\delta \text{ при всех } t^* \leq t \leq p. \tag{3.14}$$

Пусть последовательность ломаных $z_{\omega_k}(t)$, у которых диаметры разбиений стремятся к нулю, равномерно сходится на отрезке $[t_0, p]$ к рассматриваемому движению $z(t)$. Тогда из неравенств (3.13) и (3.14), используя равномерную сходимость $z_{\omega_k}(t) \to z(t)$, получим

$$|z_{\omega_k}(t)| \geq \delta \text{ при всех } t^* \leq t \leq p \tag{3.15}$$

для всех достаточно больших номеров k. Из неравенства (3.15), используя свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега [12, с. 282], имеем

$$|z_{\omega_k}(t)| - \int\limits_t^s a(r,\tau)dr > 0 \text{ при всех } t^* \le t < s \le t + d(\omega_k) \le p. \tag{3.16}$$

Отбрасывая ненужные номера k, считаем, что неравенства (3.15) и (3.16) выполнены для всех номеров k.

Рассмотрим ломаную $z_{\omega_k}(t)$. Пусть $t_{i_k-1} < t^* \le t_{i_k} < \ldots < t_{l_k+1} = p$ — это часть точек разбиения ω_k. Используя неравенство (3.15), из формулы (3.7) получим, что

$$u(t_j, z_{\omega_j}(t_j)) = \frac{z_{\omega_j}(t_j)}{|z_{\omega_j}(t_j)|}, \quad j = \overline{i_k, l_k}.$$

Подставим это управление в формулу (3.4). Получим

$$|z_{\omega_k}(t_{j+1})| \le \left| |z_{\omega_k}(t_j)| - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} a(r,\tau)dr \right| + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \beta(r)dr, \quad j = \overline{i_k, l_k}.$$

Отсюда и из неравенства (3.16) следует, что

$$|z_{\omega_k}(t_{j+1})| \le |z_{\omega_k}(t_j)| - \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} a(r,\tau)dr + \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \beta(r)dr, \quad j = \overline{i_k, l_k}.$$

Просуммируем эти неравенства. Имеем

$$|z_{\omega_k}(p)| \le |z_{\omega_k}(t_{i_k})| + \int\limits_{t_{i_k}}^{p} (\beta(r) - a(r,\tau))dr.$$

Перейдем к пределу в этом неравенстве и учтем, что $t_{i_k} \to t^*$. В получившемся неравенстве перейдем к пределу при $t^* \to t_*$. В результате

$$|z(p)| \le |z(t_*)| + \int\limits_{t_*}^{p} (\beta(r) - a(r,\tau))dr.$$

Отсюда, используя формулы (3.5) и неравенство (3.12), выводим требуемое неравенство (3.11). □

Из этих теорем получим, что если выполнены неравенства

$$|z_0| + f(t_0) \le \varepsilon, \quad F(t_0) \le \varepsilon, \tag{3.17}$$

то управление $u = \varrho(z)$ обеспечивает выполнение неравенства (3.2) для любой помехи $|v(t,z)| \le 1$, для любого момента поломки $t_0 \le \tau \le p$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$. Если же одно из неравенств (3.17) не выполнено, то помеха $v = \varrho(z)$ при некотором моменте поломки обеспечивает выполнение противоположного неравенства $|z(p)| > \varepsilon$ для любого управления $|u(t,z)| \le 1$ и для любого реализовавшегося движения $z(t)$ с начальным условием $z(t_0) = z_0$.

4. Условия оптимальности в однотипной задаче

Учитывая формулы (3.5) и (3.6), перепишем условия (3.17) в следующем виде:

$$|z_0| + \int\limits_{t_0}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi(r))dr - D(t_0) - \varepsilon \le 0, \tag{4.1}$$

$$\int\limits_{t}^{p} (\beta(r) - c(r)\phi(r))dr - D(t) - \varepsilon \le 0 \ \text{ для всех } \ t_0 \le t \le p. \tag{4.2}$$

Здесь

$$\varepsilon \ge 0, \quad \phi(\cdot) \in L_q[t_0, p], \quad \phi(t) \ge 0. \tag{4.3}$$

Далее будем считать, что выполнено следующее предположение.

Предположение 1. *Функция $G : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ является непрерывной, строго возрастает, и $G(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to +\infty$.*

Рассмотрим задачу

$$g(\varepsilon, \phi(\cdot)) = G(\varepsilon) + \int\limits_{t_0}^{p} \phi^q(r)dr \to \min_{\varepsilon,\ \phi(\cdot)} \tag{4.4}$$

с ограничениями (4.1)–(4.3).

Теорема 3. *Пусть $\varepsilon_0 \ge 0$ и $\phi_0(t)$ — решение задачи* (4.1)–(4.4)*. Тогда решением задачи* (2.7)*,* (2.8) *являются функции $\phi_0(t)$, $u = \varrho(z)$ и число $V_0 = g(\varepsilon_0, \phi_0(\cdot))$.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 2 из [9]. □

Замечание 1. Поскольку функция (3.7) удовлетворяет условию $|\varrho(z)| = 1$, то теорема 3 остается справедливой и для случая, когда ограничение на управление u в задаче (2.7), (2.8) имеет вид равенства $|u| = 1$.

Теорема 4. *Решение в задаче* (4.1)–(4.4) *существует.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 3 из [9]. □

Замечание 2. Если дополнительно к предположению 1 функция $G : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ является выпуклой, то решение в задаче (4.1)–(4.4) существует и единственно. Единственность следует из того, что связи (4.1) и (4.2) являются линейными относительно неизвестных $\varepsilon \ge 0$ и $\phi(t) \ge 0$, а функционал (4.4) выпуклый по этим неизвестным, причем по $\phi(t)$ он строго выпуклый.

Приведем достаточные условия, при выполнении которых число ε_0 и функция $\phi_0(t)$ являются решением задачи (4.1)–(4.4). Доказательства теорем, как и доказательства аналогичных теорем в работе [9], базируются на применении правила множителей Лагранжа. Однако наличие слагаемого $D(t)$ в условиях (4.1) и (4.2) потребовало внесение некоторых изменений в эти доказательства.

Теорема 5. *Пусть число ε_0 и функция $\phi_0 \colon [t_0, p] \to \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям* (4.1)–(4.3)*. Пусть существуют число $\lambda \ge 0$ и неубывающая на отрезке $[t_0, p]$ функция $\theta(t)$ такие, что $\theta(t_0) = 0$ и*

$$\int\limits_{t_0}^{p} \theta(r)(\beta(r) - c(r)\phi_0(r))dr - \int\limits_{t_0}^{p} D(r)d\theta(r) = \theta(p)\varepsilon_0, \tag{4.5}$$

$$\lambda\Big(\int\limits_{t_0}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_0(r))dr+|z_0|-D(t_0)-\varepsilon_0\Big)=0, \tag{4.6}$$

$$G(\varepsilon_0)-(\lambda+\theta(p))\varepsilon_0\le G(\varepsilon)-(\lambda+\theta(p))\varepsilon \ \textit{при любом}\ \ \varepsilon\ge 0, \tag{4.7}$$

$$\phi_0(t)=\left(\frac{c(t)}{q}(\lambda+\theta(t))\right)^{1/(q-1)}\quad \textit{при}\ \ t\in[t_0,p]. \tag{4.8}$$

Тогда число ε_0 *и функция* $\phi_0(t)$ *являются решением задачи* (4.1)–(4.4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные число $\varepsilon\ge 0$ и функцию $\phi(\cdot)\in L_q[t_0,p]$, $\phi(t)\ge 0$. Запишем функцию Лагранжа

$$\Lambda(\varepsilon,\phi(\cdot))=G(\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{p}\phi^q(r)dr+\int\limits_{t_0}^{p}\Big(\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr-D(t)-\varepsilon\Big)d\theta(t)$$

$$+\lambda\Big(\int\limits_{t_0}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr+|z_0|-D(t_0)-\varepsilon\Big). \tag{4.9}$$

Второй интеграл в этой формуле является интегралом Римана — Стилтьеса. Поскольку число $\lambda\ge 0$, а функция $\theta(t)$ не убывает, то для любых ε и $\phi(t)$, удовлетворяющих условиям (4.1)–(4.3), выполнено неравенство

$$\Lambda(\varepsilon,\phi(\cdot))\le G(\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{p}\phi^q(r)dr.$$

Применяя формулу интегрирования по частям в интеграле Римана — Стилтьеса [15, с. 134], получим, что

$$\int\limits_{t_0}^{p}\theta(r)(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr-\int\limits_{t_0}^{p}(D(r)+\varepsilon)d\theta(r)=\int\limits_{t_0}^{p}\Big(\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr-D(t)-\varepsilon\Big)d\theta(t).$$

Здесь учтено, что $\theta(t_0)=0$. Поэтому формула (4.9) примет вид

$$\Lambda(\varepsilon,\phi(\cdot))=G(\varepsilon)-(\lambda+\theta(p))\varepsilon$$

$$+\int\limits_{t_0}^{p}(\phi^q(r)-(\lambda+\theta(r))c(r)\phi(r)+(\lambda+\theta(r))\beta(r))dr-\int\limits_{t_0}^{p}D(r)d\theta(r)+\lambda(|z_0|-D(t_0)). \tag{4.10}$$

Минимальное значение функции Лагранжа по $\phi(\cdot)\in L_q[t_0,p]$, $\phi(t)\ge 0$ находится из условия минимума подынтегрального выражения

$$\mu(\phi)=\phi^q-(\lambda+\theta(r))c(r)\phi\to\min,\quad \phi\ge 0.$$

Функция $\mu(\phi)$ является выпуклой. Приравнивая к нулю ее производную, получим, что минимальное значение функции Лагранжа доставляет неотрицательная функция (4.8). Далее, можно показать [11, с. 63], что функция (4.8) принадлежит пространству $L_q[t_0,p]$. Минимизация функции Лагранжа (4.10) по переменной ε дает условие (4.7). Далее, из условий (4.5) и (4.6) следует, что

$$\Lambda(\varepsilon_0,\phi_0(\cdot))=G(\varepsilon_0)+\int\limits_{t_0}^{p}\phi_0^q(r)dr.$$

Возьмем число ε и функцию $\phi(t)$, которые удовлетворяют условиям (4.1)–(4.3). Тогда имеем

$$G(\varepsilon_0)+\int\limits_{t_0}^{p}\phi_0^q(r)dr=\Lambda(\varepsilon_0,\phi_0(\cdot))\leq\Lambda(\varepsilon,\phi(\cdot))\leq G(\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{p}\phi^q(r)dr. \qquad \square$$

Теорема 6. *Пусть дополнительно к предположению* 1 *функция* $G:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ *является выпуклой. Тогда для решения* ε_0, $\phi_0(t)$ *задачи* (4.1)–(4.4) *найдутся число* $\lambda\geq 0$ *и неубывающая функция* $\theta:[t_0,p]\to\mathbb{R}$ *с* $\theta(t_0)=0$, *которые удовлетворяют условиям* (4.5)–(4.8).

Доказательство. Возьмем последовательность разбиений

$$\omega_l: t_0=t_0^{(i)}<t_1^{(i)}<\ldots<t_{k_i}^{(i)}<t_{k_i+1}^{(i)}=p,$$

у которых диаметры $d(\omega_i)$ стремятся к нулю. Запишем неравенства

$$\int\limits_{t_j}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr-D(t_j)-\varepsilon\leq 0,\quad j=\overline{1,k_i}. \tag{4.11}$$

Рассмотрим оптимизационную задачу (4.4) с ограничениями (4.1), (4.3) и (4.10). Эти ограничения являются совместными. Аналогично теореме 4 доказывается, что в этой задаче существует единственное решение ε_i, $\phi_i(t)$. Рассматриваемая задача является задачей выпуклого программирования, связи в которой удовлетворяют условию Слейтера [16, с. 53]. По теореме Куна — Таккера [16, с. 90–91] существует набор множителей Лагранжа $\lambda^{(i)}\geq 0$, $\lambda_j^{(i)}\geq 0$, $j=\overline{1,k_i}$, такой, что выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\lambda^{(i)}\Bigg(\int\limits_{t_0}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr+|z_0|-D(t_0)-\varepsilon_i\Bigg)=0, \tag{4.12}$$

$$\lambda_j^{(i)}\Bigg(\int\limits_{t_j^{(i)}}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr-D(t_j^{(i)})-\varepsilon_i\Bigg)=0,\quad j=\overline{1,k_i}, \tag{4.13}$$

и условие минимума функции Лагранжа $\Lambda_i(\varepsilon_i,\phi_i(\cdot))\leq\Lambda_i(\varepsilon,\phi(\cdot))$ для любых ε и $\phi(\cdot)$, которые удовлетворяют (4.3). Здесь

$$\Lambda_i(\varepsilon,\phi(\cdot))=G(\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{p}\phi^q(r)dr+\lambda^{(i)}\Bigg(\int\limits_{t_0}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr+|z_0|-D(t_0)-\varepsilon\Bigg)$$

$$+\sum_{j=1}^{k_i}\lambda_j^{(i)}\Bigg(\int\limits_{t_j^{(i)}}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi(r))dr-D(t_j^{(i)})-\varepsilon\Bigg).$$

С помощью функции

$$\theta_i(t)=\begin{cases}\lambda_1^{(i)}+\ldots+\lambda_{k_i}^{(i)}, & t_{k_i}^{(i)}<t\leq p,\\ \lambda_1^{(i)}+\ldots+\lambda_{k_i-1}^{(i)}, & t_{k_i-1}^{(i)}<t\leq t_{k_i}^{(i)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1^{(i)}, & t_1^{(i)}<t\leq t_2^{(i)}\\ 0, & t_0\leq t\leq t_1^{(i)},\end{cases} \tag{4.14}$$

запишем функцию Лагранжа $\Lambda_i(\varepsilon,\phi(\cdot))$ формулой (4.9) при $\lambda=\lambda^{(i)}$, $\theta(t)=\theta_i(t)$. Поэтому она может быть записана формулой (4.10) при $\lambda=\lambda^{(i)}$, $\theta(t)=\theta_i(t)$.

Минимизируя по ε функцию $\Lambda_i(\varepsilon,\phi(\cdot))$, получим неравенство

$$G(\varepsilon_i)-(\lambda^{(i)}+\theta_i(p))\varepsilon_i\le G(\varepsilon)-(\lambda^{(i)}+\theta_i(p))\varepsilon \ \text{ для любого числа } \ \varepsilon\ge 0. \tag{4.15}$$

Минимизируя по $\phi\ge 0$ подынтегральное выражение в формуле для функции Лагранжа $\Lambda_i(\varepsilon,\phi(\cdot))$, получим равенство

$$\phi_i(t)=\Big(\frac{c(t)}{q}(\lambda^{(i)}+\theta_i(t))\Big)^{1/(q-1)}. \tag{4.16}$$

Можно считать, что $\lambda^{(i)}+\theta_i(p)>0$ для всех достаточно больших номеров i. В самом деле, пусть $\lambda^{(i_m)}+\theta_{i_m}(p)=0$ для некоторой подпоследовательности $i_m\to\infty$. Из неотрицательности множителей Лагранжа и из формулы (4.14) получим, что все $\lambda^{(i_m)}$ и $\theta_{i_m}(t)$ равны 0 для любого $t\in[t_0,p]$. Учитывая предположение 1, из формулы (4.15) получим, что все $\varepsilon_{i_m}=0$. Из формулы (4.16) следует, что $\phi_{i_m}(t)=0$ для любого $t\in[t_0,p]$. Стало быть, $\varepsilon=0$ и $\phi(t)=0$ удовлетворяют условиям (4.1) и (4.4). Далее, учитывая, что диаметры разбиений ω_{i_m} стремятся к нулю, а $\varepsilon_{i_m}=0$ и $\phi_{i_m}(t)=0$ удовлетворяют неравенствам (4.11), получим, что $\varepsilon=0$ и $\phi(t)=0$ удовлетворяют условию (4.2). Стало быть, $\varepsilon=0$ и $\phi(t)=0$ являются решением задачи (4.1)–(4.4). В этом случае условия (4.5)–(4.8) выполнены при $\lambda=0$ и $\theta(t)=0$.

Будем считать, что $\lambda^{(i)}+\theta_i(p)>0$ для всех номеров i. Поскольку решение ε_0 и $\phi_0(t)$ задачи (4.1)–(4.4) удовлетворяет ограничениям (4.11), то $g(\varepsilon_i,\phi_i(\cdot))\le g(\varepsilon_0,\phi_0(\cdot))$. Из этого неравенства и из формулы (4.4) следует неравенство $G(\varepsilon_i)\le g(\varepsilon_0,\phi_0(\cdot))$. Отсюда, используя предположение 1, получим, что последовательность чисел ε_i ограничена сверху. Переходя, если нужно, к подпоследовательности, будем считать, что $\varepsilon_i\to\varepsilon_*\ge 0$.

Покажем, что существует число $B>0$ такое, что

$$\lambda^{(i)}\le B,\quad \theta_i(p)\le B \text{ для всех } i\ge 1. \tag{4.17}$$

По условию теоремы функция $G:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ является непрерывной и выпуклой. Поэтому [14, с. 61] существуют числа $B_0>0$ и $\delta>0$ такие, что

$$|G(\varepsilon)-G(\varepsilon_*)|\le B_0|\varepsilon-\varepsilon_*| \text{ для всех } |\varepsilon-\varepsilon_*|<3\delta,\quad \varepsilon>0. \tag{4.18}$$

Поскольку $\varepsilon_i\to\varepsilon_*$, то $|\varepsilon_i-\varepsilon_*|<\delta$ для всех i, начиная с некоторого номера. Производя перенумеровку, считаем, что неравенство $|\varepsilon_i-\varepsilon_*|<\delta$ выполнено для всех $i\ge 1$. Возьмем $\varepsilon=\varepsilon_*+2\delta$. Тогда из неравенств (4.15) и (4.18) получим, что

$$(\lambda^{(i)}+\theta_i(p))(\varepsilon-\varepsilon_i)\le G(\varepsilon)-G(\varepsilon_i)\le |G(\varepsilon)-G(\varepsilon_*)|+|G(\varepsilon_i)-G(\varepsilon_*)|\le B_0(|\varepsilon-\varepsilon_*|+|\varepsilon_i-\varepsilon_*|)\le 3B_0\delta.$$

Поскольку $\varepsilon-\varepsilon_i>\delta$, то из предыдущего неравенства следует, что $\lambda^{(i)}+\theta_i(p)\le 3B_0$. Отсюда и из того, что $\lambda^{(i)}\ge 0$ и $\theta_i(p)\ge 0$, получим неравенства (4.17) с $B=3B_0$.

Каждая из функций (4.14) не убывает на отрезке $[t_0,p]$ и удовлетворяет равенству $\theta_i(0)=0$. Отсюда и из второго неравенства (4.17) получим, что $0\le\theta_i(t)\le B$ для всех $t\in[t_0,p]$. Далее, полная вариация [12, с. 313] функции (4.14) равна $\theta_i(p)-\theta_i(t_0)\le B$. Согласно второй теореме Хелли [12, с. 346] из последовательности функций (4.14) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке отрезка $[t_0,p]$ к некоторой функции $\theta(t)$. Предельная функция не убывает и удовлетворяет равенству $\theta(t_0)=0$.

Поскольку $0\le\lambda^{(i)}\le B$, то из последовательности чисел $\lambda^{(i)}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не вводя новых обозначений, считаем, что

$$\lim_{i\to\infty}\theta_i(t)=\theta(t) \text{ для всех } t\in[t_0,p] \ \text{ и } \ \lim_{i\to\infty}\lambda^{(i)}=\lambda\ge 0. \tag{4.19}$$

Из формул (4.16) и (4.19) получим, что $\lim\limits_{i\to\infty}\phi_i(t)=\phi_*(t)$ для любого $t\in[t_0,p]$, где предельная функция $\phi_*(t)$ задается формулой (4.8). Поэтому она принадлежит пространству $L_q[t_0,p]$.

Из формул (4.16) и (4.17) следует, что

$$0\le c(t)\phi_i(t)\le\Big(\frac{2B}{q}\Big)^{1/(1-q)}c^l(t)\ \text{ при всех }\ t\in[t_0,p]. \tag{4.20}$$

Зафиксируем число $t\in[t_0,p]$. Пусть $t_j^{(i)}\le t<t_{j+1}^{(i)}$. Тогда из неравенства (4.11) получим, что

$$D(t_j^{(i)})+\varepsilon_i\ge\int\limits_{t_j^{(i)}}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr=\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr$$
$$+\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}c(r)\phi_i(r)dr-\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}\beta(r)dr. \tag{4.21}$$

Далее, учитывая, что диаметры разбиений ω_i стремятся к нулю, имеем

$$0\le\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}c(r)\phi_i(r)dr\le\Big(\frac{2B}{q}\Big)^{1/(1-q)}\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}c^l(r)dr\to0,\quad\int\limits_{t_j^{(i)}}^{t}\beta(r)dr\to0.$$

Здесь использованы неравенство (4.20) и теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. По теореме Лебега [12, с. 284]

$$\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr\to\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_*(r))dr.$$

Поэтому, переходя в неравенстве (4.21) к пределу, получим

$$\int\limits_{t}^{p}(\beta(r)-c(r)\phi_*(r))dr\le D(t)+\varepsilon_*\ \text{ при любом }\ t\in[t_0,p].$$

Стало быть, ε_* и $\phi_*(t)$ удовлетворяют условию (4.2). Поскольку ε_i и $\phi_i(t)$ удовлетворяют неравенству (4.1), то их пределы ε_* и $\phi_*(t)$ также удовлетворяют этому неравенству. Покажем, что выполнены условия (4.5)–(4.7).

Перейдем к пределу в равенстве (4.12). Получим равенство (4.6). Из формул (4.13) и (4.14) следует равенство

$$\int\limits_{t_0}^{p}\theta_i(r)(\beta(r)-c(r)\phi_i(r))dr-\int\limits_{t_0}^{p}D(r)d\theta_i(r)=\theta_i(p)\varepsilon_i. \tag{4.22}$$

Из неравенств (4.17) и (4.20) имеем

$$0\le c(t)\phi_i(t)\theta_i(t)\le c^l(t)\Big(\frac{2B}{q}\Big)^{1/(q-1)}B.$$

Поэтому, переходя в равенстве (4.22) к пределу и применяя теорему Лебега и первую теорему Хелли [12, с. 344], выводим равенство (4.5). Зафиксируем число $\varepsilon\ge0$ и перейдем к пределу в неравенстве (4.15). Получим неравенство (4.7) при $\varepsilon_0=\varepsilon_*$.

По теореме 4 пределы ε_* и $\phi_*(t)$ являются решением задачи (4.1)–(4.4). В силу единственности $\varepsilon_*=\varepsilon_0$ и $\phi_*(t)=\phi_0(t)$. □

З а м е ч а н и е 3. Подставляя в формулы (2.5) $u_*=u^*=\varrho(z)$, где z определяется формулой (2.6), найдем управления ξ и χ в исходной задаче (1.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
2. **Никольский М.С.** Задача о переправе с возможной остановкой двигателя // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. С. 1937–1940.
3. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
4. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Наука, 1967. 479 с.
5. **Понтрягин Л.С.** Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
6. **Ухоботов В.И.** Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 196–204.
7. **Ухоботов В.И., Гущин Д.В.** Однотипные дифференциальные игры с выпуклой интегральной платой // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 251–258.
8. **Ухоботов В.И.** Необходимые условия оптимальности в линейной задаче управления с помехой и платой, зависящей от модуля линейной функции // Челябинский физико-математический журнал. 2017. Т. 2, №1. С. 80–87.
9. **Ухоботов В.И.** Об одной линейной задаче управления при наличии помехи // Вестн. ЮУрГУ. Сер. “Математика. Механика. Физика”. 2017. Т. 9, № 2. С. 36–46. doi: 10.14529/mmph170205.
10. **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
11. **Ухоботов В.И.** Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2005. 124 с.
12. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 496 с.
13. **Кудрявцев Л.Д.** Курс математического анализа. М.: Высш. шк., 1981. Т. 1. 687 с.
14. **Пшеничный Б.Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
15. **Рисс Ф., Секельфальви–Надь Б.** Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979. 587 с.
16. **Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.

Поступила 21.05.2019
После доработки 1.07.2019
Принята к публикации 8.07.2019

Ухоботов Виктор Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. кафедрой
Челябинский государственный университет,
г. Челябинск
e-mail: ukh@csu.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
2. Nikol’skii M.S. The crossing problem with possible engine shutoff. *Diff. Eq.*, 1993, vol. 29, no. 11, pp. 1681–1684.
3. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1987, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial’nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
4. Isaacs R. *Differential games.* N Y: John Wiley & Sons, 1965, 408 p. ISBN: 0471428604 . Translated to Russian under the title *Differentsial’nye igry.* Moscow: Mir Publ., 1974, 456 p.
5. Pontrjagin L.S. Linear differential games of pursuit. *Math. USSR-Sb.*, 1981, vol. 40, no. 3, pp. 285–303. doi: 10.1070/SM1981v040n03ABEH001815 .
6. Ukhobotov V.I. One type differential games with convex goal. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN*, 2010, vol. 16, no. 5, pp. 196–204 (in Russian).

7. Ukhobotov V.I., Gushchin D.V. Single–type differential games with convex integral. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. S178–S185. doi: 10.1134/S0081543811090136 .
8. Ukhobotov V.I. Necessary conditions of optimality in linear control problem under interference with a payoff depending on the modulus of a linear function. *Chelyabinsk Phys. Math. J.*, 2017, vol. 2, no. 1, pp. 80–87 (in Russian).
9. Ukhobotov V.I. On a linear control problem under interference. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematics. Mechanics. Physics*, 2017, vol. 9, no. 2, pp. 36–46 (in Russian). doi: 10.14529/mmph170205 .
10. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineinye sistemy* [Theory of motion control. Linear systems]. Moscow: Nauka Publ., 1968, 475 p.
11. Ukhobotov V.I. *Metod odnomernogo proektirovaniya v lineinykh differentsial'nykh igrakh s integral'nymi ogranicheniyami* [Method of one-dimensional projecting in linear differential games with integral constraints]. Chelyabinsk: Chelyabinsk State University, 2005, 124 p. ISBN: 5-7271-0725-3 .
12. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis. Vol.* 1, 2. Mineola; N Y: Dover Publ., 1999, 288 p. ISBN: 0486406830 . Original Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza, Vypusk* 1, 2. Moscow: MGU Publ., 1954, 154 p.; 1960, 118 p.
13. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza; Tom 1* [A course in mathematical analysis; Vol. 1; Textbook]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1981, 687 p.
14. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 320 p.
15. Riesz F., Sz.-Nagy B. *Leçcons d'analyse fonctionnelle.* Budapest: Akademiai Kiado, 1972. Translated to Russian under the title *Lektsii po funktsional'nomu analizu.* Moscow: Mir Publ., 1979, 287 p.
16. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* Studies in Mathematics and its Applications, vol. 6. Amsterdam; N Y; Oxford: North-Holland Publishing Company, 1979, 460 p. ISBN: 0444851674 . Original Russian text published in Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 479 p.

Received May 21, 2019
Revised July 1, 2019
Accepted July 8, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 19-11-00105).

Viktor Ivanovich Ukhobotov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 454001 Russia, e-mail: ukh@csu.ru .

Cite this article as: V. I. Ukhobotov. On a control problem under a disturbance and a possible breakdown, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 265–278 .