ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.983.54

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЭТОГО РЕШЕНИЯ

В. П. Танана, А. И. Сидикова

В статье изучается задача об определении граничного условия в уравнении теплопроводности для полого шара из композиционного материала, состоящего из двух однородных составных частей. В качестве граничных условий внутри шара при $r = r_0$ рассматривается условие Дирихле. В обратной задаче температура внутри шара считается неизвестной на бесконечном интервале времени. Для ее отыскания измеряется температура теплового потока в разделе сред в точке $r = r_1$. В работе проведено аналитическое исследование прямой задачи, позволившее дать строгую постановку обратной задачи и определить функциональные пространства, в которых естественно решать обратную задачу. Основная трудность, на решение которой направлена статья, заключается в получении оценки погрешности приближенного решения. Для этого используется метод проекционной регуляризации, который позволяющий получить точные по порядку оценки.

Ключевые слова: оценка погрешности, модуль непрерывности, преобразование Фурье, некорректная задача.

V. P. Tanana, A. I. Sidikova. Approximate solution of an inverse boundary value problem for a system of differential equations of parabolic type and estimation of the error of this solution.

We study the problem of finding a boundary condition in the heat equation for a hollow ball made of a composite material consisting of two homogeneous components. The Dirichlet condition is considered as boundary conditions inside the ball at $r = r_0$. In the inverse problem, the temperature inside the ball is assumed to be unknown on an infinite time interval. For finding it, the temperature of the heat flux at the media interface for $r = r_1$ is measured. We analyze the direct problem, which allows us to give a strict formulation of the inverse problem and determine the functional spaces in which it is natural to solve the inverse problem. Estimating the error of the approximate solution presents a major difficulty, which is dealt with in this paper by the method of projection regularization. Using this method, we find order-exact estimates.

Keywords: error estimation, modulus of continuity, Fourier transform, ill-posed problem.

MSC: 35R30

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-247-264

Введение

В различных отраслях современной техники нашли широкое применение композиционные материалы. Дальнейшие успехи в развитии многих направлений приборостроения в большей степени связан с увеличением доли использования таких материалов, а при создании новой аэрокосмической и специальной техники их роль становится решающей [1].

Прогресс в приборостроении идет по пути усложнения изучаемых моделей и постановок задач [2]. Исходя из модельных представлений механики композиционный материал можно определить как неоднородную среду, описываемую с помощью разрывных по координатам функций. В статье исследуется и решается обратная задача об определении температуры на внутренней стенке полого шара, состоящего из композитных материалов. Поскольку к решению подобных задач предъявляются высокие требования точности, то необходимо получение гарантированных оценок, которые существенно повышают надежность численных результатов.

В связи с этим в работе проведено аналитическое исследование прямой задачи, которое позволило применить к обратной граничной задаче преобразование Фурье по времени. Далее использован метод проекционной регуляризации [3], с помощью которого получено приближенное решение, а также точная по порядку оценка погрешности этого решения. Отметим, что изучению и решению обратной граничной задачи теплопроводности для отрезка, состоящего из двух кусков с различными коэффициентами теплопроводности, посвящена работа [4]; достаточно широкий класс обратных граничных задач представлен в [5–9].

1. Постановка задачи и исследование прямой задачи

Рассмотрим тепловой процесс, который описывается системой уравнений [10; 11]

$$\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial t} = a_1^2\Big(\frac{\partial^2 u_1(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial r}\Big), \quad r_0 < r < r_1, \quad t > 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial t} = a_2^2\Big(\frac{\partial^2 u_2(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\Big), \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0, \tag{1.2}$$

где $a_1, a_2 > 0,\ a_1 \neq a_2$;

$$u_1(r,0) = 0, \quad r_0 \le r \le r_1, \quad u_2(r,0) = 0, \quad r_1 \le r \le r_2, \tag{1.3}$$

$$u_1(r_0,t) = q(t), \quad t \ge 0, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial u_2(r_2,t)}{\partial r} = 0, \quad t \ge 0, \tag{1.5}$$

$$u_1(r_1,t) = u_2(r_1,t), \quad \frac{a_1 \partial u_1(r_1,t)}{\partial r} = \frac{a_2 \partial u_2(r_1,t)}{\partial r}, \quad t \ge 0; \tag{1.6}$$

здесь $q(t) \in C^2[0,+\infty)$, $q(0) = q'(0) = 0$ и существует число $t_0 > 0$ такое, что для любого $t \ge t_0$

$$q(t) = 0. \tag{1.7}$$

В прямой задаче (1.1)–(1.6) требуется найти функцию

$$u(r,t) = \begin{cases} u_1(r,t), & r_0 \le r \le r_1, \quad t > 0, \\ u_2(r,t), & r_1 \le r \le r_2, \quad t > 0. \end{cases}$$

Сделав замену $u(r,t) = v(r,t) + q(t)$, перейдем к задаче

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v_1(r,t)}{\partial t} = a_1^2\Big(\frac{\partial^2 v_1(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_1(r,t)}{\partial r}\Big) - q'(t), \quad r_0 < r < r_1, \quad t > 0, \\
\frac{\partial v_2(r,t)}{\partial t} = a_2^2\Big(\frac{\partial^2 v_2(r,t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_2(r,t)}{\partial r}\Big) - q'(t), \quad r_1 < r < r_2, \quad t > 0, \\
v_1(r,0) = 0, \quad r_0 \le r \le r_1, \quad v_2(r,0) = 0, \quad r_1 \le r \le r_2, \\
v_1(r_0,t) = 0, \quad \frac{\partial v_2(r_2,t)}{\partial r} = 0, \quad t \ge 0, \\
v_1(r_1,t) = v_2(r_1,t), \quad \frac{a_1 \partial v_1(r_1,t)}{\partial r} = \frac{a_2 \partial v_2(r_1,t)}{\partial r}, \quad t \ge 0.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

Введем оператор $A : C[r_0,r_2] \to C[r_0,r_2]$,

$$AU(r) = \begin{cases} \dfrac{a_1^2}{r^2}\dfrac{d}{dr}\Big(r^2\dfrac{dU_1(r)}{dr}\Big), & r \in [r_0,r_1], \\ \dfrac{a_2^2}{r^2}\dfrac{d}{dr}\Big(r^2\dfrac{dU_2(r)}{\partial r}\Big), & r \in [r_1,r_2], \end{cases} \tag{1.9}$$

$D(A)=\Big\{U(r),\ AU(r)\in C[r_0,r_2],\ U_1(r_0)=0,\ U_2'(r_2)=0,\ U_1(r_1)=U_2(r_1),\ a_1U_1'(r_1)=a_2U_2'(r_1)\Big\}.$

Решая задачу Штурма — Лиувилля

$$AU(r)+\lambda^2U(r)=0,\quad U(r)=\begin{cases}U_1(r), & r\in[r_0,r_1],\\ U_2(r), & r\in[r_1,r_2],\end{cases}\quad U(r)\in D(A),$$

аналогично [4, с. 475; 10, гл. 5, п. 2], определим последовательность собственных значений λ_n этой задачи, где λ_n– положительные корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{ctg}\frac{\lambda(r_1-r_0)}{a_1}+\frac{\cos\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}+\dfrac{r_2\lambda}{a_2}\sin\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}}{\sin\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}-\dfrac{r_2\lambda}{a_2}\cos\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}}=\frac{(a_1-a_2)}{\lambda\, r_1},\tag{1.10}$$

и соответствующие им собственные функции $\{\varphi_n(r)\}$:

$$\varphi_n(r)=\begin{cases}\dfrac{\sin\dfrac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}}{r\sin\dfrac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}}, & r_0\le r\le r_1,\\[3ex] \dfrac{\sin\dfrac{\lambda_n(r_2-r)}{a_2}-\dfrac{r_2\lambda_n}{a_2}\cos\dfrac{\lambda_n(r_2-r)}{a_2}}{r\Big(\sin\dfrac{\lambda_n(r_2-r_1)}{a_2}-\dfrac{r_2\lambda_n}{a_2}\cos\dfrac{\lambda_n(r_2-r_1)}{a_2}\Big)}, & r_1\le r\le r_2.\end{cases}\tag{1.11}$$

Лемма 1. *Пусть оператор A определен формулой* (1.9). *Тогда оператор A симметричен на множестве $D(A)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $\vartheta(r)=(\vartheta_1(r),\ \vartheta_2(r)),\ \phi(r)=(\phi_1(r),\ \phi_2(r))\in D(A)$. Необходимо показать, что

$$\int\limits_{r_0}^{r_1}\vartheta_1(r)\,\frac{a_1^2}{r^2}\big(r^2\phi_1'(r)\big)'r^2\frac{dr}{a_1}+\int\limits_{r_1}^{r_2}\vartheta_2(r)\,\frac{a_2^2}{r^2}(r^2\phi_2'(r))'r^2\frac{dr}{a_2}$$

$$=\int\limits_{r_0}^{r_1}\phi_1(r)\,\frac{a_1^2}{r^2}\big(r^2\vartheta_1'(r)\big)'r^2\frac{dr}{a_1}+\int\limits_{r_1}^{r_2}\phi_2(r)\,\frac{a_2^2}{r^2}(r^2\vartheta_2'(r))'r^2\frac{dr}{a_2}.$$

Проинтегрировав левую часть этого равенства дважды по частям, получим $(A\vartheta(r),\phi(r))=(\vartheta(r),A\phi(r))$.

Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что собственные функции оператора A ортогональны в пространстве $L_2(r_0,r_2)$. Обозначим через X подпространство $L_2(r_0,r_2)$, определяемое формулой

$$X=\overline{\langle\{\varphi_n(r)\}\rangle},\tag{1.12}$$

где $\overline{\langle\{\varphi_n(r)\}\rangle}$ — замыкание в $L_2(r_0,r_2)$ линейной оболочки $\langle\{\varphi_n(r)\}\rangle$, порожденной $\{\varphi_n(r)\}$.

Лемма 2. *Существуют числа $c_1,c_2>0$ такие, что для любого n $c_1n\le\lambda_n\le c_2n$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем уравнение (1.10):

$$\frac{\sin\lambda\Big(\dfrac{r_1-r_0}{a_1}+\dfrac{r_2-r_1}{a_2}\Big)-\dfrac{\lambda r_2}{a_2}\cos\lambda\Big(\dfrac{r_1-r_0}{a_1}+\dfrac{r_2-r_1}{a_2}\Big)}{\sin\dfrac{\lambda(r_1-r_0)}{a_1}\Big(\sin\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}-\dfrac{\lambda r_2}{a_2}\cos\dfrac{\lambda(r_2-r_1)}{a_2}\Big)}=\frac{(a_1-a_2)}{\lambda r_1}.$$

Умножив обе части предыдущего равенства на $a_2/\sqrt{a_2^2+r_2^2\lambda^2}$ и введя обозначения

$$\sin\widetilde{\xi}(\lambda)=\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+r_2^2\lambda^2}},\quad \cos\widetilde{\xi}(\lambda)=\frac{\lambda r_2}{\sqrt{a_2^2+r_2^2\lambda^2}}, \tag{1.13}$$

получим

$$\Big|\cos\Big(\Big(\frac{r_1-r_0}{a_1}+\frac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\lambda+\widetilde{\xi}(\lambda)\Big)\Big|$$

$$=\Big|\frac{a_1-a_2}{r_1}\Big|\cdot\frac{1}{|\lambda|}\cdot\Big|\sin\frac{\lambda(r_1-r_0)}{a_1}\Big|\cdot\Big|\cos\lambda\Big(\widetilde{\xi}(\lambda)+\frac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\Big|\le\frac{1}{\lambda}\Big|\frac{a_1-a_2}{r_1}\Big|,$$

$$\Big|\sin\Big(\frac{\pi}{2}-\Big(\frac{r_1-r_0}{a_1}+\frac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\lambda+\widetilde{\xi}(\lambda)\Big)\Big|\le\frac{|a_1-a_2|}{\lambda r_1}. \tag{1.14}$$

Обозначим: $\sigma_n=\dfrac{\pi}{2}-\Big(\dfrac{r_1-r_0}{a_1}+\dfrac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\lambda_n+\widetilde{\xi}(\lambda_n)$; тогда из (1.13) следует $|\widetilde{\xi}(\lambda_n)|\le a_2/r_2\lambda_n$, а из (1.14) будем иметь существование некоторого числа $d_1>0$ такого, что $\forall n\ \ |\sigma_n|\le d_1/\lambda_n$.

Так как $\cos\Big(\Big(\dfrac{r_1-r_0}{a_1}+\dfrac{r_2-r_1}{a_2}\Big)\lambda_n+\widetilde{\xi}(\lambda_n)\Big)\to 0$ при $\lambda_n\to\infty$, то

$$\lambda_n=\frac{a_1\,a_2\,(\pi/2+\pi n+\xi_n)}{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}, \tag{1.15}$$

где $\xi_n=\sigma_n-\widetilde{\xi}(\lambda_n)$.

Из вышесказанного следует существование чисел $c_1,c_2>0$ таких, что для любого n выполняется неравенство $c_1/n\le|\xi_n|\le c_2/n$.

Лемма доказана.

Рассмотрим функции $\psi_n(r)=\varphi_n(r)/\|\varphi_n(r)\|,\ r_0\le r\le r_2$. Тогда для любого n имеем $\psi_n(r)$, $A\psi_n(r)\in C[r_0,r_2]$, а последовательность $\{\psi_n(r)\}$ ортонормирована.

Лемма 3. *Существует число $d_2>0$ такое, что для любых n и $r\in[r_0,r_2]$ $|\psi_n(r)|\le d_2$.*

Доказательство. Вычислим $\|\varphi_n(r)\|^2$ по формуле

$$\|\varphi_n(r)\|^2=\int_{r_0}^{r_1}r^2(\varphi_n^1(r))^2d\Big(\frac{r}{a_1}\Big)+\int_{r_1}^{r_2}r^2(\varphi_n^2(r))^2d\Big(\frac{r}{a_2}\Big).$$

Учитывая, что $\sin\dfrac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}=(-1)^n\cos\Big(\dfrac{\lambda_n(r_2-r_1)}{a_2}+\xi_n\Big)$, получим

$$\|\varphi_n(r)\|^2=\frac{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}{2a_1a_2\sin^2(\lambda_n(r_1-r_0)/a_1)}.$$

Тогда $$|\psi_n(r)|=\frac{|\varphi_n(r)|}{\|\varphi_n(r)\|}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2a_1a_2}\,|\sin(\lambda_n(r-r_0)/a_1)|}{r\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}, & r_0\le r\le r_1,\\[2ex] \dfrac{\sqrt{2a_1a_2}\,|\cos(\lambda_n(r_2-r)/a_2+\xi_n)|}{r\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}, & r_1\le r\le r_2.\end{cases}$$

Из предыдущего равенства следует $d_2=\dfrac{\sqrt{2a_1a_2}}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}$.

Лемма доказана.

Возьмем $t_1=t_0+2$. Для доказательства применимости преобразования Фурье прямую задачу разобьем на две: первая при $t\in[0,t_1)$, вторая при $t\in[t_0,\infty)$.

Лемма 4. *Существует решение $v(r,t)$ задачи* (1.8), *удовлетворяющее условиям*

$$v(r,t)\in C([r_0,r_2]\times[0,t_1]),\quad \begin{cases} a_1\dfrac{\partial v_1(r,t)}{\partial r}\\ a_2\dfrac{\partial v_2(r,t)}{\partial r}\end{cases}\in C((r_0,r_2]\times(0,t_1]),$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v_1(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_0,r_1)\times(0,t_1])\\ \dfrac{\partial^2 v_2(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_1,r_2)\times(0,t_1])\end{cases}\quad \textit{и для любого}\ \ t\in[0,t_1]\quad \begin{cases} a_1^2\dfrac{\partial^2 v_1(r,t)}{\partial r^2}\\ a_2^2\dfrac{\partial^2 v_2(r,t)}{\partial r^2}\end{cases}\in L_2(r_0,r_2).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим ряд

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(\int\limits_0^t g_n(\theta)e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta\Bigg)\psi_n(r). \tag{1.16}$$

Введем обозначения:

$$P_n(t)=\int\limits_0^t g_n(\theta)\,e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta, \tag{1.17}$$

$$g_n(\theta)=\frac{-\sqrt{2a_1a_2}q'(\theta)}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\Bigg(\frac{r_0\sin((r_1-r_0)\lambda_n/a_1)}{\lambda_n}$$
$$+\frac{a_1-a_2}{\lambda_n^2}\sin^2\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}+\frac{(-1)^n a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\Bigg).$$

Проинтегрировав равенство (1.17) по частям, получим

$$P_n(t)=\frac{-\sqrt{2a_1a_2}}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\Bigg(\frac{r_0\sin((r_1-r_0)\lambda_n/a_1)}{\lambda_n}+\frac{a_1-a_2}{\lambda_n^2}\sin^2\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}$$
$$+\frac{(-1)^n a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\Bigg)\cdot\Bigg(\frac{q'(t)}{\lambda_n^2}-\frac{1}{\lambda_n^2}\int\limits_0^t q''(\theta)e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta\Bigg).$$

Представим $\psi_n(r)=\gamma_n(r)/r$, где $\gamma_n(r)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2a_1a_2}\,\sin\left(\lambda_n(r-r_0)/a_1\right)}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}, & r_0\le r\le r_1,\\ \dfrac{\sqrt{2a_1a_2}\,\cos\left(\lambda_n(r_2-r)/a_2+\xi_n\right)}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}, & r_1\le r\le r_2.\end{cases}$

Тогда ряд (1.16) перепишем в виде $v(r,t)=\dfrac{1}{r}w(r,t),\quad w(r,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n(t)\,\gamma_n(r)$.

Поскольку

$$\frac{\partial v(r,t)}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial w(r,t)}{\partial r}-\frac{1}{r^2}w(r,t),\quad \frac{\partial^2 v(r,t)}{\partial r^2}=\frac{2}{r^3}\,w(r,t)-\frac{2}{r^2}\frac{\partial w(r,t)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2},$$

то необходимо доказать, что $w(r,t)\in C([r_0,r_2]\times[0,t_1])$, $\begin{cases} a_1\dfrac{\partial w_1(r,t)}{\partial r}\\ a_2\dfrac{\partial w_2(r,t)}{\partial r}\end{cases}\in C((r_0,r_2]\times(0,t_1])$,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w_1(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_0,r_1)\times(0,t_1])\\ \dfrac{\partial^2 w_2(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_1,r_2)\times(0,t_1])\end{cases}\quad \text{и для любого}\ \ t\in[0,t_1]\quad \begin{cases} a_1^2\dfrac{\partial^2 w_1(r,t)}{\partial r^2}\\ a_2^2\dfrac{\partial^2 w_2(r,t)}{\partial r^2}\end{cases}\in L_2(r_0,r_2).$$

Из того, что $e^{-\lambda_n^2 t}\displaystyle\int_0^t q''(\theta)\, e^{\lambda_n^2\theta} d\theta \in C[0,t_1]$, и из сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}$ по признаку Вейерштрасса получим равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(t)\,\gamma_n(r) \;\text{ на }\; [r_0,r_2]\times[0,t_1].$$

С учетом того что $q'(t)\in C[0,t_1]$ и $P_n(t)\in C[0,t_1]$, имеем $w(r,t)\in C([r_0,r_2]\times[0,t_1])$.

Аналогично доказываем, что $\partial w(r,t)/\partial r = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(P_n(t)\gamma_n(r))'_r$,

$$a_1\partial w_1(r,t)/\partial r \in C([r_0,r_1]\times(0,t_1]), \quad a_2\partial w_2(r,t)/\partial r \in C([r_1,r_2]\times(0,t_1]).$$

Теперь перейдем к исследованию $\partial^2 w(r,t)/\partial r^2$. Так как

$$\frac{\partial^2 w(r,t)}{\partial r^2} = \begin{cases} -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\, a_1^{-2} P_n(t)\gamma_n^1(r) \;\text{ при }\; r\in(r_0,r_1), \\ -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2\, a_2^{-2} P_n(t)\gamma_n^2(r) \;\text{ при }\; r\in(r_1,r_2), \end{cases}$$

то интересующий нас ряд на промежутке (r_0,r_1) будет иметь вид

$$\partial^2 w_1(r,t)/\partial r^2 = \frac{\sqrt{2a_1a_2}}{a_1^2\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\sum_{n=1}^{\infty}\biggl(\frac{a_1-a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\sin\frac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}$$

$$+\frac{r_0\sin((r-r_0)\lambda_n/a_1)}{\lambda_n}+\frac{(-1)^n a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}\biggr)\cdot\biggl(q'(t)-\int\limits_0^t q''(\theta)e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta\biggr), \tag{1.18}$$

а на промежутке (r_1,r_2)

$$\partial^2 w_2(r,t)/\partial r^2 = \frac{\sqrt{2a_1a_2}}{a_2^2\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\sum_{n=1}^{\infty}\biggl[\frac{r_0(-1)^n\cos((r_2-r)\lambda_n/a_2+\xi_n)}{\lambda_n}$$

$$+\frac{a_1-a_2}{\lambda_n^2}\sin\frac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}(-1)^n\cos\Bigl(\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Bigr)+\frac{a_2}{\lambda_n^2}\cos\Bigl(\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Bigr)\biggr]$$

$$\times\biggl(q'(t)-\int\limits_0^t q''(\theta)e^{-\lambda_n^2(t-\theta)}d\theta\biggr). \tag{1.19}$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ сходится, то по признаку Вейерштрасса функциональные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\sin\dfrac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}}{\lambda_n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{\lambda_n(r-r_0)}{a_1}}{\lambda_n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}}{\lambda_n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\dfrac{\lambda_n(r_1-r_0)}{a_1}\cos\Bigl(\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Bigr)}{\lambda_n^2}$$

сходятся равномерно на $[r_0,r_2]$.

Воспользовавшись результатом

$$(-1)^n \cos\Big(\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Big)$$

$$=(-1)^n\Big(\cos\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}-\cos\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,2\sin^2\frac{\xi_n}{2}-\sin\frac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,\sin\xi_n\Big),$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\Big(\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}+\xi_n\Big)}{\lambda_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}}{\lambda_n}$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,2\sin^2\dfrac{\xi_n}{2}}{\lambda_n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,\sin\xi_n}{\lambda_n}.$$

Из леммы 2 следует, что

$$\left|\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,2\sin^2\dfrac{\xi_n}{2}}{\lambda_n}\right|\le\frac{c_1}{\lambda_n^3},\qquad \left|\frac{(-1)^n\sin\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,\sin\xi_n}{\lambda_n}\right|\le\frac{c_2}{\lambda_n^2}.$$

В этом случае ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,2\sin^2\dfrac{\xi_n}{2}}{\lambda_n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}\,\sin\xi_n}{\lambda_n}$$

сходятся равномерно на промежутке $[r_1,r_2]$ по признаку Вейерштрасса. По признаку Дирихле для любого $\varepsilon>0$ может быть доказана равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n(r-r_0)/a_1)}{\lambda_n}\ \text{ на }\ [r_0+\varepsilon,r_1-\varepsilon]\ \text{ и }\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\dfrac{(r_2-r)\lambda_n}{a_2}}{\lambda_n}\ \text{ на }\ [r_1+\varepsilon,r_2-\varepsilon].$$

Подробное доказательство этого факта приведено в работе [4, лемма 2].

Из (1.18), (1.19) и ортогональности последовательности $\{\psi_n(r)\}$ вытекает, что для любого $t\in[0,t_1]$ $v(r,t)\in H^2[r_0,r_2]$.

Лемма доказана.

Из леммы 4 следует следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $q(t)$ *удовлетворяет условию* (1.7). *Тогда существует решение* $u(r,t)$ *задачи* (1.1)–(1.6) *такое, что* $u(r,t)$ *удовлетворяет начальному условию* (1.3), *граничным условиям* (1.4), (1.5), *условиям сопряжения* (1.6), *а также выполняются условия*

$$u(r,t)\in C([r_0,r_2]\times[0,t_1]),\quad \begin{cases} a_1\dfrac{\partial u_1(r,t)}{\partial r}\\ a_2\dfrac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}\end{cases}\in C([r_0,r_2]\times(0,t_1]),\quad \begin{cases} a_1^2\dfrac{\partial^2 u_1(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_0,r_1)\times(0,t_1])\\ a_2^2\dfrac{\partial^2 u_2(r,t)}{\partial r^2}\in C((r_1,r_2)\times(0,t_1])\end{cases}$$

и для любого фиксированного $t\in[0,t_1]$ *справедливо* $Au(r,t)\in X$ (*см.* (1.9), (1.12)).

Из теоремы 1 следует справедливость условий

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1} a_1\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial x}e^{-i\tau t}dt=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1} u_1(r,t)e^{-i\tau t}dt\right),\quad r\in[r_0,r_1],\ |\tau|\ge 0,\\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1} a_2\frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r}e^{-i\tau t}dt=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1} u_2(r,t)e^{-i\tau t}dt\right),\quad r\in[r_1,r_2],\ |\tau|\ge 0,\\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1} a_i^2\frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2}e^{-i\tau t}dt=\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{a_i^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1} u(r,t)e^{-i\tau t}dt\right),\quad r\in(r_0,r_1)\cup(r_1,r_2).
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

Для окончательного обоснования применимости преобразования Фурье по t на полупрямой $[0,\infty)$ для решения задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6) необходимо формулу (1.20) распространить на $[t_0,\infty)$.

2. Исследование скорости убывания функций $v(r,t), \partial v(r,t)/\partial r,\ \partial^2 v(r,t)/\partial r^2$

В данном разделе использована методика, приведенная в [12, разд. 5.1].

Рассмотрим вспомогательную задачу, использующую условие (1.7)

$$\frac{\partial v_1(r,t)}{\partial t}=\frac{a_1^2\partial^2 v_1(r,t)}{\partial r^2},\quad r_0<r\le r_1,\quad t\ge t_0,$$

$$\frac{\partial v_2(r,t)}{\partial t}=\frac{a_2^2\partial^2 v_2(r,t)}{\partial r^2},\quad r_1\le r<r_2,\quad t\ge t_0,$$

$$v(r,t_0)=f(r),\quad r_0\le r\le r_2,$$

$$v_1(r_0,t)=0,\quad \frac{\partial v_2(r_2,t)}{\partial r}=0,\quad t\ge t_0,$$

$$v_1(r_1,t)=v_2(r_1,t),\quad \frac{a_1\partial v_1(r_1,t)}{\partial r}=\frac{a_2\partial v_2(r_1,t)}{\partial r},\quad t\ge t_0.$$

Решение этой задачи имеет вид

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2(t-t_0)}\psi_n(r), \tag{2.1}$$

$$b_n=\frac{\sqrt{2a_1a_2}\sin(\lambda_n(r_1-r_0)/a_1)}{\sqrt{a_1(r_2-r_1)+a_2(r_1-r_0)}}\int_{r_0}^{r_2}\rho(r)\,f(r)\,\varphi_n(r)dr,$$

где $\rho(r)=\begin{cases} r^2/a_1 \text{ при } r_0\le r\le r_1,\\ r^2/a_2 \text{ при } r_1\le r\le r_2,\end{cases}$ $\varphi_n(r)$ и λ_n введены соответственно в (1.11) и (1.15).

Лемма 5. *Пусть b_n определяется формулой* (2.1), *тогда существует число $d_3>0$ такое, что для любого n* $|b_n|\le d_3/\lambda_n^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2.1) и леммы 3 имеем $b_n=(f(r),\psi_n(r))$; $A\psi_n(r)=-\lambda_n^2\psi_n(r)$. Поэтому

$$(f(r),A\psi_n(r))=-\lambda_n^2(f(r),\psi_n(r))=(Af(r),\psi_n(r)).$$

Тогда $(f(r),\psi_n(r))=-1/\lambda_n^2\cdot(Af(r),\psi_n(r))$. Поскольку $Af(r)\in L_2(r_0,r_2)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2<\infty$.

Соответственно, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Откуда следует, что существует $d_3 > 0$ такое, что для любого n $|(f(r), \psi_n(r))| \le d_3/\lambda_n^2$.

Лемма доказана.

Теперь перейдем к оценке скорости убывания решения $v(r,t)$ при $t \to \infty$.

Из лемм 3, 5 и соотношения (2.1) следует, что при $t \ge t_0 + 1$

$$|v(r,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} d_2 d_3 \lambda_n^{-2} e^{-\lambda_n^2 (t-t_0)}, \quad |v'_r(r,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} d_2 d_3 \lambda_n^{-1} e^{-\lambda_n^2 (t-t_0)}$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $d_4(\varepsilon)$ такое, что

$$|v''_{rr}(r,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} d_4(\varepsilon) e^{-\lambda_n^2 (t-t_0)}, \quad r \in [r_0+\varepsilon, r_1-\varepsilon] \cup [r_1+\varepsilon, r_2-\varepsilon].$$

Поскольку $e^{-\lambda_n^2(t-t_0)} = e^{-\lambda_n^2}\, e^{-\lambda_n^2(t-t_0-1)}$, то получим существование числа $d_5 > 0$ такого, что для любого $t \ge t_0 + 2$

$$\sup_{r\in[r_0,r_2]} \{|v(r,t)|,\ |v'_r(r,t)|\} \le d_5 e^{-(t-t_0-1)}$$

и для любого $\varepsilon > 0$ существует $d_6(\varepsilon)$ такое, что для любых $r \in [r_0+\varepsilon, r_1-\varepsilon] \cup [r_1+\varepsilon, r_2-\varepsilon]$ и $t \ge t_0 + 2$ справедливо соотношение

$$|v''_{rr}(r,t)| \le d_6(\varepsilon) e^{-(t-t_0-1)}.$$

Из теоремы 1 и леммы 5 следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда существует решение* $u(r,t)$ *задачи* (1.1)–(1.6) *такое, что* $u(r,t)$ *удовлетворяет начальному условию* (1.3), *граничным условиям* (1.4), (1.5), *условиям сопряжения* (1.6), *а также выполняются условия*

$$u(r,t) \in C([r_0,r_2]\times(0,\infty)), \quad \begin{cases} a_1 \dfrac{\partial u_1(r,t)}{\partial r} \\ a_2 \dfrac{\partial u_2(r,t)}{\partial r} \end{cases} \in C([r_0,r_2]\times(0,\infty)),$$

$$\begin{cases} a_1^2 \dfrac{\partial^2 u_1(r,t)}{\partial r^2} \in C((r_0,r_1)\times(0,\infty)) \\ a_2^2 \dfrac{\partial^2 u_2(r,t)}{\partial r^2} \in C((r_1,r_2)\times(0,\infty)) \end{cases}$$

и для любого фиксированного $t \in [0,t_1]$ *справедливо* $u(r,t), Au(r,t) \in X$ (*см.* (1.9), (1.12)).

Тогда на основании теоремы, доказанной в [13, гл. XIV, теорема 3], получим

Теорема 3. *Пусть* $u(r,t)$ *определена формулой* (2.1). *Тогда для любого* τ, $|\tau| \ge 0$, *справедливы равенства*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_1 \frac{\partial u_1(r,t)}{\partial x} e^{-i\tau t} dt = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_1(r,t) e^{-i\tau t} dt \right), \quad r \in [r_0, r_1],\ |\tau| \ge 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_2 \frac{\partial u_2(r,t)}{\partial r} e^{-i\tau t} dt = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{a_2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u_2(r,t) e^{-i\tau t} dt \right), \quad r \in [r_1, r_2],\ |\tau| \ge 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty a_i^2 \frac{\partial^2 u(r,t)}{\partial r^2} e^{-i\tau t} dt = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\frac{a_i^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty u(r,t) e^{-i\tau t} dt \right), \quad r \in (r_0, r_1) \cup (r_1, r_2),\ i = 1, 2.$$

3. Постановка обратной граничной задачи

Предположим, что в условии (1.4) функция $q(t)$ не известна, а вместо нее в точке r_1 измеряется температура $f(t)$, соответствующая данному процессу

$$u_2(r_1, t) = f(t), \quad t \geq 0. \tag{3.1}$$

Требуется, используя $f(t)$, определить функцию $q(t)$ такую, что при подстановке ее в условие (1.4), решение $u(r,t)$ задачи (1.1)–(1.6) удовлетворяет соотношению (3.1).

Пусть $M_d \subset L_2(0;\infty)$, тогда

$$M_d = \left\{ q(t)\colon q(t) \in C^2(0;\infty), \int\limits_0^{+\infty} |q(t)|^2 dt + \int\limits_0^{+\infty} |q''(t)|^2 dt \leq d^2 \right\},$$

где d — известное положительное число.

Так как обратная задача некорректно поставлена, то дополнительно предположим, что при $f(t) = f_0(t) \in C[0,\infty)$ существует решение $q_0(t)$ обратной задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1), принадлежащее множеству M_d, но функция $f_0(t)$ нам не известна, а вместо нее даны некоторая приближенная функция $f_\delta(t) \in C[0;\infty) \cap L_1(0,\infty)$ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\int\limits_0^{\infty} |f_\delta(t) - f_0(t)|^2 dt \leq \delta^2. \tag{3.2}$$

Требуется, используя f_δ, δ и M_d, найти приближенное решение q_δ задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1) и оценить величину $\|q_\delta - q_0\|_{L_2(0,\infty)}$.

4. Сведение обратной граничной задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1) к задаче вычисления значений неограниченного оператора

При решении обратной граничной задачи очень важно не только получить приближенное решение, но и оценить его погрешность. Для этого будем использовать преобразование Фурье функции $u(r,t)$ по переменной t. Введем оператор F, отображающий $L_2(0;\infty)$ в $L_2(-\infty;\infty)$, который определим следующим образом:

$$\hat{q}(\tau) := F_t[q(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} q(t) e^{-it\tau} dt, \quad q(t) \in L_2(0;\infty). \tag{4.1}$$

Отметим, что введенное преобразование для функции $q(t)$ совпадает со стандартным преобразованием Фурье функции

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} q(t), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Тем самым все стандартные свойства введенного преобразования совпадают с аналогичными свойствами преобразования Фурье.

Из теоремы 3 следует применимость преобразования F, определяемого формулой (4.1), к решению задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1). Таким образом, сведем ее к следующей

$$i\tau \hat{u}_1(r,\tau) = a_1^2 \Big(\frac{\partial^2 \hat{u}_1(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{u}_1(r,\tau)}{\partial r} \Big), \quad r_0 < r < r_1, \quad \tau \in (-\infty,\infty), \tag{4.2}$$

$$i\tau \hat{u}_2(r,\tau) = a_2^2 \Big(\frac{\partial^2 \hat{u}_2(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{u}_2(r,\tau)}{\partial r} \Big), \quad r_1 < r < r_2, \quad \tau \in (-\infty,\infty), \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \hat{u}_2(r_2,\tau)}{\partial r}=0,\quad \hat{u}_1(r_1,\tau)=\hat{u}_2(r_1,\tau),\quad a_1\frac{\partial \hat{u}_1(r_1,\tau)}{\partial r}=a_2\frac{\partial \hat{u}_2(r_1,\tau)}{\partial r}\quad -\infty<\tau<\infty, \tag{4.4}$$

где $\hat{u}_1(r,\tau)=F[u_1(r,t)]$, $\hat{u}_2(r,\tau)=F[u_2(r,t)]$, $\hat{u}(r,\tau)=\begin{cases}\hat{u}_1(r,\tau), & r\in[r_0,r_1],\\ \hat{u}_2(r,\tau), & r\in[r_1,r_2].\end{cases}$

Решения уравнений (4.2), (4.3) имеют вид

$$\hat{u}_1(r,\tau)=A_1(\tau)\,\frac{a_1^3}{i\sqrt{\mu^3}}\,\frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{r\sqrt{\mu}}{a_1}\right)}{r}+A_2(\tau)\,\frac{a_1^2}{i\mu}\,\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{r\sqrt{\mu}}{a_1}\right)}{r},$$

$$\hat{u}_2(r,\tau)=B_1(\tau)\,\frac{a_2^3}{i\sqrt{\mu^3}}\,\frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{r\sqrt{\mu}}{a_2}\right)}{r}+B_2(\tau)\,\frac{a_2^2}{i\mu}\,\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{r\sqrt{\mu}}{a_2}\right)}{r},$$

где $\mu=i\tau$, $\sqrt{\mu}=\pm(1+i)\sqrt{\tau}/\sqrt{2}$.

Решая задачу (4.2)–(4.4), сведем ее к задаче вычисления значений неограниченного оператора T:

$$T(\tau)\hat{f}(\tau)=\hat{q}(\tau),\quad -\infty<\tau<\infty, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}T(\tau)=\Bigg[&a_2r_1\sqrt{\mu}\operatorname{sh}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)-r_1r_2\mu\operatorname{ch}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)\\
&+(1-a_1)\operatorname{sh}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\right)\left(a_2\operatorname{sh}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)-r_2\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)\right)\Bigg]\\
&\times\left[a_2r_0\sqrt{\mu}\operatorname{sh}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)-r_0r_2\mu\operatorname{ch}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}\right)\right]^{-1}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

В дальнейшем, учитывая, что $|T(\tau)|\to\infty$ при $\tau\to\infty$, воспользуемся $\sqrt{i\tau}=(1+i)\sqrt{\tau}/\sqrt{2}$. Преобразуем формулу (4.6), разделив числитель и знаменатель на $\sqrt{r_2^2\mu-a_2^2}$.

Пусть $\beta(\mu)$ определена формулой

$$\operatorname{sh}\beta(\mu)=\frac{a_2}{\sqrt{r_2^2\mu-a_2^2}}. \tag{4.7}$$

Из свойств функции $\operatorname{Arsh}\beta(\mu)$, доказанных в [14, гл. II], следует, что эта функция отображает комплексную плоскость $\mathbb{C}$, из которой выброшены лучи $1\le y<\infty$ и $-\infty<y\le -1$ в полосу $-\dfrac{\pi}{2}<v<\dfrac{\pi}{2}$.

Таким образом, из (4.7) следует существование функции $\beta(\mu)$:

$$\beta(\mu)\to 0 \ \text{ при } \ \mu\to\infty, \tag{4.8}$$

а из (4.6) получаем, что

$$\begin{aligned}T(\tau)=\Bigg[&r_1\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\right)\\
&+(a_1-1)\operatorname{sh}\left(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\right)\Bigg]\cdot\left[r_0\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\left(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\right)\right]^{-1},\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$D(T)=\{\hat{f}(\tau)\colon\ \hat{f}(\tau)\in L_2(0,\infty)\ \text{ и }\ T\hat{f}(\tau)\in L_2(0,\infty)\}. \tag{4.10}$$

Из (4.6) и (4.10) имеем, что оператор T линеен, неограничен, замкнут и инъективен.

Возьмем $\hat{q}_0(\tau)=T\hat{f}_0(\tau)$, $\hat{f}_0(\tau)=F[f_0(t)]$, $\hat{f}_\delta(\tau)=F[f_\delta(t)]$. Из формулы (3.2) следует, что

$$\|\hat{f}_\delta-\hat{f}_0\|\le\delta. \tag{4.11}$$

Множество M_d при преобразовании F перейдет в множество $\widehat{M}_d \supset F[M_d]$, определяемое формулой

$$\widehat{M}_d = \left\{ \hat{q}(\tau) \colon \hat{q}(\tau) \in L_2(0,\infty), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+\tau^4)|\hat{q}(\tau)|^2 d\tau \leq 2d^2 \right\}. \tag{4.12}$$

Из того, что $q_0(t) \in M_d$, получаем

$$\hat{q}_0(\tau) \in \widehat{M}_d. \tag{4.13}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия, сформулированные в теореме* 1. *Тогда для любого* $q(t)$, *удовлетворяющему условию* (1.7), *существует единственное решение задачи* (1.1)–(1.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из теорем 1, 2, формул (4.9), (4.10) и инъективности оператора T.

5. Решение задачи (4.5), (4.9)–(4.13)

Лемма 6. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют числа* τ_ε, $b_1(\varepsilon)$ *и* $b_2(\varepsilon) > 0$ *такие, что для любого* τ, $|\tau| \geq \tau_\varepsilon$, *справедливо следующее соотношение*:

$$b_1(\varepsilon)\, \frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}}{\sqrt{\tau}} \leq |T(\tau)| \leq b_2(\varepsilon)\, \frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}}{\sqrt{\tau}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем равенство (4.9) в виде

$$|T(\tau)| \leq \frac{\left| r_1 \operatorname{ch}\left(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1} + \dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu) \right) \right|}{\left| r_0 \operatorname{ch}\left(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu) \right) \right|}$$

$$+ \frac{\left| (a_1-1) \operatorname{sh}\left(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1} \right) \operatorname{ch}\left(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu) \right) \right|}{\left| r_0\sqrt{\mu} \operatorname{ch}\left(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu) \right) \right|}. \tag{5.1}$$

Поскольку $\beta(\mu) = \beta_1(\mu) + i\beta_2(\mu)$, $|\sqrt{\mu}| = \sqrt{\tau}$, то для получения оценки сверху, воспользуемся формулами $|\operatorname{ch} z_1| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x_1 - \sin^2 y_1}$ — для числителя и $|\operatorname{ch} z_2| = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x_2 + \cos^2 y_2}$, $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ — для знаменателя.

Таким образом, получим оценку сверху для частного:

$$\frac{\left| \operatorname{ch}\left(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1} + \dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu) \right) \right|}{\left| \operatorname{ch}\left(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2} - \beta(\mu) \right) \right|} \leq \frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1} + \dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2} - \beta_1(\mu) \right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2} - \beta_1(\mu) \right)}.$$

Далее

$$\frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1} + \dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2} - \beta_1(\mu) \right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2} - \beta_1(\mu) \right)}$$

$$= \frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)}\Big(1+e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}-\frac{2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}{e^{\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)}\Big(1-e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}.$$

Так как из (4.8) и вышесказанного следует, что для любого $\eta>0$ найдется $\tau_1>0,\ \tau_1\geq\tau_\varepsilon$, например $\tau_1=\dfrac{a_2^2}{2(r_2-r_1)^2}\ln^2\dfrac{1}{\eta}$ такое, что для любого $|\tau|\geq\tau_1$

$$\sup\Big\{e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}-\frac{2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)};\ e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big\}<\eta,$$

то для любого $\tau,\ |\tau|\geq\tau_1$, будет верно неравенство

$$\frac{\Big|\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\leq\frac{1+\eta}{1-\eta}\,e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}. \tag{5.2}$$

Аналогично можно показать, что

$$\frac{\Big|\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\geq\frac{\operatorname{sh}\Big(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}.$$

Тогда при $|\tau|\geq\tau_1$

$$\frac{\Big|\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\geq\frac{1-\eta}{1+\eta}\,e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}. \tag{5.3}$$

Пусть $\eta=\dfrac{\varepsilon}{8+3\varepsilon}$, тогда согласно (5.2), (5.3) для любого $\varepsilon>0$ существует число $\tau_\varepsilon>0$ такое, что для любого $\tau,\ |\tau|\geq\tau_\varepsilon$, справедливо неравенство

$$\Big(1-\frac{\varepsilon}{4+2\varepsilon}\Big)e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\leq\frac{\Big|\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}+\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}$$

$$\leq\Big(1+\frac{\varepsilon}{4+\varepsilon}\Big)e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}. \tag{5.4}$$

Для оценки сверху второго слагаемого в формуле (5.1) используем формулы $|\operatorname{sh}z_1|=\sqrt{\operatorname{ch}^2x_1-\cos^2y_1},\ \ |\operatorname{ch}z_2|=\sqrt{\operatorname{ch}^2x_2-\sin^2y_2}$, $z_1=x_1+iy_1,\ z_2=x_2+iy_2$ — для числителя и $|\operatorname{ch}z_3|=\sqrt{\operatorname{sh}^2x_3+\cos^2y_3}$, $z_3=x_3+iy_3$ — для знаменателя. Тогда

$$\frac{\Big|\operatorname{sh}\Big(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\leq\frac{\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{sh}\Big(\frac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}.$$

Затем

$$\frac{\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}$$

$$=\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\Big(1+e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\Big)\Big(1+e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}{2\sqrt{\tau}\Big(1-e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}.$$

Рассуждая аналогично, получим оценку снизу

$$\frac{\Big|\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}\geq\frac{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}.$$

Далее

$$\frac{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}$$

$$=\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\Big(1-e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\Big)\Big(1-e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}{2\sqrt{\tau}\Big(1+e^{\frac{-2(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}+2\beta_1(\mu)}\Big)}.$$

Если $1-e^{\frac{-2(r_1-r_0)\sqrt{\tau_1/2}}{a_1}}\leq 1/2$, то для любого τ, $|\tau|\geq\tau_1$, верно неравенство

$$\frac{\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}\Big)\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}{\sqrt{\tau}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\tau/2}}{a_2}-\beta_1(\mu)\Big)}\geq\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}(1-\eta)}{4\sqrt{\tau}\,(1+\eta)}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{4\sqrt{\tau}}\Big(1-\frac{\varepsilon}{4+2\varepsilon}\Big)e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}\leq\frac{\Big|\operatorname{sh}\Big(\dfrac{(r_1-r_0)\sqrt{\mu}}{a_1}\Big)\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}{\Big|\sqrt{\mu}\operatorname{ch}\Big(\dfrac{(r_2-r_1)\sqrt{\mu}}{a_2}-\beta(\mu)\Big)\Big|}$$

$$\leq\frac{4}{3\sqrt{\tau}}\Big(1-\frac{8\varepsilon+20}{3\varepsilon^2+20\varepsilon+32}\Big)e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\tau/2}}{a_1}}.$$

Пусть ε такое, что

$$\frac{4}{3}\Big(1-\frac{8\varepsilon+20}{3\varepsilon^2+20\varepsilon+32}\Big)\leq 2.$$

Тогда из (5.1), (5.4) и предыдущего неравенства будет следовать: для любого $\varepsilon>0$ существуют числа τ_ε, $b_1(\varepsilon)$ и $b_2(\varepsilon)>0$ такие, что для любого τ, $|\tau|\geq\tau_\varepsilon$, выполняется утверждение леммы.

Лемма доказана.

Для решения задачи (4.5) воспользуемся методом проекционной регуляризации (см. [12, гл. 4, п. 4.1]). В основе этого метода лежит регуляризующее семейство операторов $\{T_\alpha\colon \alpha > \tau_\varepsilon\}$, определяемое формулой

$$T_\alpha \hat f(\tau) = \begin{cases} T\hat f(\tau), & -\alpha \le \tau \le -\tau_\varepsilon, \quad \tau_\varepsilon \le \tau \le \alpha, \\ 0, & |\tau| > \alpha. \end{cases} \tag{5.5}$$

Приближенное значение $\hat q^\alpha_\delta(\tau)$ задачи (4.5) зададим формулой

$$\hat q^\alpha_\delta(\tau) = T_\alpha \hat f_\delta(\tau), \quad |\tau| \ge \tau_\varepsilon. \tag{5.6}$$

Для выбора параметра регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta, r)$ в (5.6) рассмотрим оценку

$$\|\hat q^\alpha_\delta(\tau) - \hat q_0(t)\| \le \|\hat q^\alpha_\delta(\tau) - \hat q^\alpha_0(\tau)\| + \|\hat q^\alpha_0(\tau) - \hat q_0(\tau)\|, \ \text{ где } \ \hat q^\alpha_0(\tau) = T_\alpha \hat f_0(\tau). \tag{5.7}$$

Поскольку из (4.11), (5.5) и (5.6) следует, что $\|\hat q^\alpha_\delta(\tau) - \hat q^\alpha_0(\tau)\| \le \sqrt{2}\|T_\alpha\|\delta$, то перейдем к оценке $\|T_\alpha\|$.

Лемма 7. *При сформулированных выше условиях и $\alpha \ge \tau_\varepsilon$ справедливо соотношение*

$$b_1(\varepsilon)\, e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{2a_1}} \le \|T_\alpha(\tau)\| \le b_2(\varepsilon)\, e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{\alpha/2}}{a_1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению норма оператора $\|T_\alpha\| = \sup\limits_{\tau_\varepsilon \le |\tau| \le \alpha} |T(\tau)|$. Учитывая, что

$$\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}} = \frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{2a_1}}\, e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{2a_1}}}{\sqrt{|\tau|}},$$

получим существование $\tau_2 > \tau_1$ такого, что для любого τ, $|\tau| \ge \tau_2$, $e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{2a_1}} / \sqrt{|\tau|} \ge 1$; тогда

$$\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}} \ge e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{2a_1}}. \tag{5.8}$$

Запишем теперь равенство

$$\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}} = \frac{e^{\frac{2(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}\, e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}.$$

Существует $\tau_3 > \tau_2$ такое, что для любого τ, $|\tau| \ge \tau_3$, справедливо $e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}} / \sqrt{|\tau|} \ge 1$; тогда

$$\frac{e^{\frac{(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}}{\sqrt{|\tau|}} \le e^{\frac{2(r_1-r_0)\sqrt{|\tau|/2}}{a_1}}. \tag{5.9}$$

Из леммы 6, соотношений (5.8), (5.9) получим утверждение леммы.

Лемма доказана.

Введем

$$\omega^2(\alpha) = \sup\Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{-\alpha} |\hat q_0(\tau)|^2 d\tau + \int\limits_{\alpha}^{\infty} |\hat q_0(\tau)|^2 d\tau \colon \hat q_0(\tau) \in \hat M_d \Bigg\}. \tag{5.10}$$

Тогда

$$\sup\{\|\hat q^\alpha_0(\tau) - \hat q_0(\tau)\| \colon \hat q_0(\tau) \in \hat M_d\} = \omega(\alpha). \tag{5.11}$$

Согласно (4.12) при условии $\hat{q}_0(\tau) \in \hat{M}_d$ имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} (1+\tau^4)|\hat{q}_0(\tau)|^2 d\tau \le 2d^2.$$

Из (5.10) и предыдущего соотношения очевидно, что $\omega^2(\alpha) = 2d^2/(1+\alpha^4)$.

Таким образом, из (5.7), (5.11), предыдущего равенства и леммы 7 получим

$$\|\hat{q}_\delta^\alpha(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \le \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{1+\alpha^4}} + b_2(\varepsilon) e^{\frac{(r_1-r_0)}{a_1}\sqrt{\alpha/2}}\delta.$$

Параметр регуляризации $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}(\delta)$ в формуле (5.6) выберем из условия

$$\frac{d}{\sqrt{1+\alpha^4}} = b_1(\varepsilon) e^{\frac{(r_1-r_0)}{2a_1}\sqrt{\alpha/2}}\delta. \tag{5.12}$$

Учитывая вышесказанное, имеем

$$\|\hat{q}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \le \frac{2\sqrt{2}d}{\sqrt{1+\overline{\alpha}^4(\delta)}}. \tag{5.13}$$

Так как функция $\sqrt{1+\alpha^4}e^{\frac{(r_1-r_0)}{2a_1}\sqrt{\alpha/2}}$ строго возрастает по α и изменяется от 0 до ∞, то существует единственное решение $\overline{\alpha}(\delta)$ уравнения (5.12).

Для представления оценки (5.13) в классе элементарных функций рассмотрим два уравнения

$$e^{\frac{(r_1-r_0)}{a_1}\sqrt{\alpha/2}} = \frac{b_2(\varepsilon)d}{\delta}, \quad e^{\frac{(r_1-r_0)}{2a_1}\sqrt{\alpha/2}} = \frac{b_1(\varepsilon)d}{\delta}. \tag{5.14}$$

Решения уравнений (5.14) обозначим через $\overline{\alpha}_1(\delta)$ и $\overline{\alpha}_2(\delta)$ соответственно.

Тогда при достаточно малых значениях δ справедливы соотношения

$$\overline{\alpha}_2(\delta) \le \overline{\alpha}(\delta) \le \overline{\alpha}_1(\delta). \tag{5.15}$$

С учетом (5.14) будем иметь

$$\overline{\alpha}_1(\delta) = \frac{4a_1^2}{(r_1-r_0)^2}\ln^2\frac{b_2(\varepsilon)d}{\delta} \ \text{ и } \ \overline{\alpha}_2(\delta) = \frac{a_1^2}{2(r_1-r_0)^2}\ln^2\frac{b_1(\varepsilon)d}{\delta},$$

а из (5.15) получаем

$$\overline{\alpha}(\delta) \sim \ln^2\delta \ \text{ при } \ \delta \to 0. \tag{5.16}$$

Решение задачи (4.5), (4.9)–(4.13) выразим формулой $\hat{q}_\delta(\tau) = \hat{q}_\delta^{\overline{\alpha}(\delta)}(\tau)$.

Тогда из соотношения (5.13) следует, что

$$\|\hat{q}_\delta(\tau) - \hat{q}_0(\tau)\| \le \frac{2\sqrt{2}d}{\sqrt{1+\overline{\alpha}_1^4(\delta, r)}}.$$

Окончательно решение $q_\delta(t)$ обратной задачи (1.1)–(1.3), (1.5), (1.6), (3.1) определим формулой

$$q_\delta(t) = \begin{cases} ReF^{-1}[\overline{q}_\delta(\tau)], & t \in [0, t_0], \\ 0, & t > t_0, \end{cases}$$

где F^{-1} — оператор, обратный F.

С учетом вышесказанного для $q_\delta(t)$ будет справедлива оценка

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\| \le \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{1+\overline{\alpha}_1^4(\delta, r)}}. \tag{5.17}$$

Теорема 5. *Существует число* $l > 0$ *такое, что для любого достаточно малого* δ *справедлива следующая оценка для приближенного решения* $q_\delta(t)$ *обратной задачи*:

$$\|q_\delta(t) - q_0(t)\| \leq l \cdot d \cdot \ln^{-4} \delta.$$

Доказательство следует из (5.16) и (5.17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А.** Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.: Наука. Физматлит, 1997. 288 с.
2. **Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.** Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с
3. **Танана В.П., Данилин А.Р.** Об оптимальности регуляризующих алгоритмов при решении некорректных задач // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 2. С. 1323–1326.
4. **Танана В.П., Ершова А.А.** О решении обратной граничной задачи для композитных материалов // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2018. Т. 28, № 4. С. 474–488.
5. **Кабанихин С. И.** Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009. 457 с.
6. **Иванов В. К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
7. **Танана В.П.** Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 2. С. 117–132.
8. **Тихонов А.Н., Гласко В.Б.** К вопросу о методах определения температуры поверхности тела // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1967. № 4. С. 910–914.
9. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некоторые задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 285 с.
10. **Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А. Н.** Сборник задач по математической физике. М.: Изд-во технико-теорет. литературы, 1956. 683 с.
11. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Изд-во высшая школа, 1967. 599 с.
12. **Tanana V., Sidikova A.** Optimal methods for ill-posed problems with applications to heat conduction: with applications to heat conduction. Berlin: De Gruyter, 2018. 130 p. ISBN: 978-3-11-057721-1 .
13. **Фихтенгольц Г.М.** Основы математического анализа. Т. 2. М.: Физматлит., 2006. 864 с.
14. **Привалов И.И.** Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984. 432 с.

Поступила 28.06.2019
После доработки 22.08.2019
Принята к публикации 26.06.2019

Танана Виталий Павлович
д-р физ.-мат. наук, профессор
главный науч. сотрудник
Южно-Уральский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: tananavp@susu.ru

Сидикова Анна Ивановна
канд. физ.-мат. наук
старший науч. сотрудник
Южно-Уральский государственный университет
г. Челябинск
e-mail: sidikovaai@susu.ru

REFERENCES

1. Wildemann V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of inelastic deformation and fracture of composite materials]. Moscow: Nauka Publ., 1997, 288 p. ISBN: 5-02-015078-9 .

2. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extremal methods for the solution of ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1988, 288 p. ISBN: 5-02-013774-X .
3. Tanana V.P., Danilin A.R. The optimality of regularizing algorithms in the solution of ill-posed problems. *Differ. Uravn.*, 1976, vol. 12, no. 7, pp. 1323–1326 (in Russian).
4. Tanana V.P., Ershova A.A. On the solution of an inverse boundary value problem for composite materials. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2018, vol. 28, no. 4, pp. 474–488 (in Russian).
5. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-posed problems.* Berlin: de Gruyter, 2012, 459 p. ISBN: 978-3-11-022400-9 . Original Russian text published in Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi.* Novosibirsk: Sib. Nauch. Izd-vo, 2009, 457 p.
6. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Theory of linear ill-posed problems and its applications. Utrecht: VSP, 2002, 281 p. ISBN: 9789067643672 . Original Russian text published in Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya. Moscow: Nauka Publ., 1978, 206 p.
7. Tanana V.P. On the order-optimality of the projection regularization method in solving inverse problems. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2004, vol. 7, no. 2, pp. 117–132 (in Russian).
8. Tikhonov V.N., Glasko V.B. Methods of determining the surface temperature of a body. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1967, vol. 7, no. 4, pp. 267–273. DOI: 10.1016/0041-5553(67)90161-9 .
9. Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis.* Translations of Mathematical Monographs, 64. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1986, 290 p. ISBN: 9780821845172 . Original Russian text published in Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskii S.P. *Nekotorye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza.* Moscow: Nauka Publ., 1980, 285 p.
10. Budak B.M., Samarskii A.A., Tikhonov A. N. *Sbornik zadach po matematicheskoi fizike* [Collection of problems in mathematical physics]. Moscow: Tekhniko-Teoret. Literatura Publ., 1956, 683 p.
11. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conduction]. Moscow: Vysshaya Shkola Publ., 1967, 599 p.
12. Tanana V., Sidikova A. *Optimal methods for ill-posed problems: with applications to heat conduction.* Berlin: De Gruyter, 2018. 130 p. ISBN: 978-3-11-057721-1 .
13. Fikhtengol'ts G.M. *Osnovy matematicheskogo analiza* [The Fundamentals of Mathematical Analysis]. Vol. 2. Moscow: Fiz. Mat. Lit. Publ., 2006, 864 p.
14. Privalov I.I. *Vvedenie v teoriyu funktsii kompleksnogo peremennogo* [Introduction to the theory of functions of a complex variable]. Moscow: Nauka Publ., 1984, 432 p. ISBN(14th ed.): 5-06-003612-X .

Received June 28, 2019
Revised August 22, 2019
Accepted August 26, 2019

Vitalii Pavlovich Tanana, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: tananavp@susu.ru .

Anna Ivanovna Sidikova, Cand. Phys.-Math. Sci, South Ural State University, Chelyabinsk, 454080 Russia, e-mail: sidikovaai@susu.ru .

Cite this article as: V. P. Tanana, A. I. Sidikova. Approximate solution of an inverse boundary value problem for a system of differential equations of parabolic type and estimation of the error of this solution, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 247–264 .