ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 519.837

# УСЛОВИЯ КОАЛИЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ДИНАМИЧЕСКИХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ИГРАХ[1]

**А. Н. Реттиева**

В работе исследованы проблемы устойчивости коалиций в многокритериальных динамических играх. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного — арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры. Условия внутренней и внешней устойчивости распространены для динамических игр с векторными функциями выигрыша. Введено понятие коалиционной устойчивости, учитывающее стимулы перехода игроков из одной коалиции в другую. Для иллюстрации предложенных концепций исследована динамическая многокритериальная модель управления биоресурсами. Получены условия внутренней и внешней устойчивости коалиций, а также коалиционной устойчивости.

Ключевые слова: динамические игры, многокритериальные игры, арбитражная схема Нэша, внутренняя и внешняя устойчивость, коалиционная устойчивость.

**A. N. Rettieva. Coalitional stability conditions in multicriteria dynamic games.**

We study the stability of coalitions in multicriteria dynamic games. We use the Nash bargaining solution (Nash products) to construct a noncooperative equilibrium and the Nash bargaining solution for the entire planning horizon to find a cooperative solution. Conditions for the internal and external stability are extended to dynamic games with vector payoff functions. The notion of coalitional stability, which takes into account the stimuli for the player to transfer to other coalitions, is introduced. To illustrate the presented approach, we consider a multicriteria dynamic model of bioresource management. Conditions for the internal, external, and coalitional stability are presented.

Keywords: dynamic games, multicriteria games, Nash bargaining solution, internal and external stability, coalitional stability.

**MSC:** 91A25, 91A80, 90B50, 91B76

**DOI**: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-200-216

## Введение

Математические модели, учитывающие наличие нескольких целевых функций у участников конфликтно-управляемых процессов, наиболее приближены к реальности. Игроки часто хотят достичь одновременно нескольких целей, которые могут быть не сравнимы. Такие ситуации встречаются в экономических и экологических моделях. Например, предприятия хотят увеличить прибыль и уменьшить затраты на производство, в соглашениях по охране окружающей среды участники хотят увеличить производство и уменьшить затраты на очистку и т. д. Многокритериальный подход позволяет определить оптимальное поведение в таких ситуациях.

Ллойд Шепли [1] в 1959 г. ввел понятие многокритериальной игры, т. е. игры с векторными функциями выигрышей участников, а в качестве решения — оптимальность по Парето (сильную и слабую). В последние годы предложены другие концепции решения многокритериальных игр, такие как идеальное равновесие по Нэшу [2] и E-равновесие [3]. В кооперативных многокритериальных играх для распределения общего кооперативного выигрыша используется естественное расширение вектора Шепли.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке провинции Шаньдун “План двухсот талантов” (№ WST2017009).

Однако все предложенные концепции решений используются только в статических многокритериальных играх. Малоисследованной проблемой является определение оптимального поведения участников в динамической постановке. В работе [4] было формализовано понятие многокритериального некооперативного равновесия, а в [5] — многокритериального кооперативного равновесия с использованием арбитражной схемы Нэша. В [6] был исследован процесс формирования коалиции в многокритериальных динамических играх.

В кооперативной теории игр важными показателями целесообразности формирования коалиций являются понятия внутренней и внешней устойчивости [7]. Внутренняя устойчивость означает, что игроку невыгодно выходить из коалиции и становиться индивидуальным игроком. А внешняя устойчивость означает, что независимому игроку невыгодно присоединяться к коалиции. При этом данные понятия применяются в ситуации, когда может быть сформирована только одна коалиция. В работе эти условия устойчивости адаптированы для многокритериальных динамических игр.

В данной статье мы исследуем многокритериальные динамические игры с асимметричными участниками, в которых возможно формирование нескольких коалиций. Следовательно, должны учитываться стимулы перехода игроков из одной коалиции в другую. Карраро [8] ввел понятие интеркоалиционной устойчивости для такого анализа. В работе для многокритериальных динамических игр мы введим понятие коалиционной устойчивости, учитывающее возможность перехода множества игроков из одной коалиции в другую.

Для иллюстрации предложенных концепций устойчивости нами исследована динамическая многокритериальная модель управления биоресурсами с конечным горизонтом планирования. Построены некооперативное и кооперативное равновесия. Определены стратегии и выигрыши участников при формировании двух коалиций. Получены условия устойчивости коалиций и показано, что условия внутренней устойчивости не выполняются, а внешней, наоборот, выполняются для всех параметров задачи. Построены условия коалиционной внутренней и внешней устойчивости. Исследован асимптотический случай, в котором показано отсутствие устойчивых коалиционных разбиений.

## 1. Многокритериальная динамическая игра с асимметричными участниками

Рассмотрим многокритериальную динамическую игру, в которой участвуют агенты двух типов. Игроки $N_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ и $N_2 = \{1, \ldots, n_2\}$ эксплуатируют некоторый общий возобновляемый ресурс и стремятся достигнуть $k$ различных целей.

Пусть $U_i$, $V_j$ — компактные пространства при $i \in N_1$, $j \in N_2$. Динамика развития ресурса имеет вид

$$x_{t+1} = f(x_t, u_{1t}, \ldots, u_{n_1 t}, v_{1t}, \ldots, v_{n_2 t}), \quad x_0 = x. \tag{1.1}$$

Здесь $x_t \geq 0$ — размер ресурса в момент времени $t \geq 0$; $f(x_t, u_{1t}, \ldots, u_{n_1 t}, v_{1t}, \ldots, v_{n_2 t})$ — непрерывная функция развития возобновляемого ресурса; $u_{it} \in U_i$, $v_{jt} \in V_j$ — стратегии (интенсивность эксплуатации) игроков $i$, $j$ в момент времени $t \geq 0$, $i \in N_1$, $j \in N_2$.

Обозначим профили стратегий $u_t = (u_{1t}, \ldots, u_{n_1 t})$, $v_t = (v_{1t}, \ldots, v_{n_2 t})$. Вектор-функции выигрышей игроков на конечном промежутке планирования $[0, m]$ имеют вид

$$I_i = \begin{pmatrix} I_i^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_i^1(u_t, v_t) \\ \ldots \\ I_i^k = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_i^k(u_t, v_t) \end{pmatrix}, \quad i \in N_1, \quad J_j = \begin{pmatrix} J_j^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_j^1(u_t, v_t) \\ \ldots \\ J_j^k = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_j^k(u_t, v_t) \end{pmatrix}, \quad j \in N_2, \tag{1.2}$$

где $g_i^l(u_t, v_t) \geq 0$, $q_j^l(u_t, v_t) \geq 0$ — непрерывные функции “мгновенного” выигрыша, $l = 1, \ldots, k$, $i \in N_1$, $j \in N_2$; $\delta \in (0, 1)$ — общий коэффициент дисконтирования.

В представленной модели исследуем следующие варианты поведения игроков: некооперативное, кооперативное (формирование гранд-коалиции) и формирование двух коалиций из игроков каждого типа. Для полученного коалиционного разбиения распространим понятия внутренней и внешней устойчивости, а также введем понятие коалиционной устойчивости, учитывающее возможность перехода участников из одной коалиции в другую.

### 1.1. Многокритериальное равновесие по Нэшу

Для построения некооперативного равновесия в многокритериальной динамической игре используется подход, предложенный в [4]. А именно применяется конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша). Поэтому сначала определяются гарантированные выигрыши, которые играют роль точек статус-кво.

В работе [4] были предложены различные варианты построения гарантированных выигрышей для игр с двумя участниками. Было показано, что наилучшим для состояния эксплуатируемой системы и выгодным для участников способом построения является определение гарантированных выигрышей как равновесных по Нэшу решений в играх с соответствующими критериями всех участников. Исходя из этого в данной модели ограничимся именно этим способом определения гарантированных точек при динамике развития ресурса (1.1):

$G_1^1,\dots,G_{n_1}^1$, $Q_1^1,\dots,Q_{n_2}^1$ — это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре

$$\langle x, N_1, N_2, \{U_i\}_{i=1}^{n_1}, \{V_j\}_{j=1}^{n_2}, \{I_i^1\}_{i=1}^{n_1}, \{J_j^1\}_{j=1}^{n_2}\rangle,$$

$$\dots$$

$G_1^k,\dots,G_{n_1}^k$, $Q_1^k,\dots,Q_{n_2}^k$ — это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре

$$\langle x, N_1, N_2, \{U_i\}_{i=1}^{n_1}, \{V_j\}_{j=1}^{n_2}, \{I_i^k\}_{i=1}^{n_1}, \{J_j^k\}_{j=1}^{n_2}\rangle$$

Для построения выигрышей игроков в динамической многокритериальной игре используем произведения Нэша, при этом гарантированные выигрыши играют роль точек статус-кво:

$$\begin{aligned}
H_1(u_t,v_t) &= (I_1^1(u_t,v_t)-G_1^1)\times\ldots\times(I_1^k(u_t,v_t)-G_1^k),\\
&\ \ \dots\\
H_{n_1} &= (I_1^1(u_t,v_t)-G_1^1)\times\ldots\times(I_1^k(u_t,v_t)-G_1^k)\,;\\
M_1(u_t,v_t) &= (J_1^1(u_t,v_t)-Q_1^1)\times\ldots\times(J_1^k(u_t,v_t)-Q_1^k),\\
&\ \ \dots\\
M_{n_2} &= (J_1^1(u_t,v_t)-Q_1^1)\times\ldots\times(J_1^k(u_t,v_t)-Q_1^k)\,.
\end{aligned}$$

Следующее определение содержит концепцию некооперативного решения [4] для динамической многокритериальной игры с асимметричными участниками.

О п р е д е л е н и е 1. Профили стратегий $u_t^N=(u_{1t}^N,\dots,u_{n_1t}^N)$, $v_t^N=(v_{1t}^N,\dots,v_{n_2t}^N)$ являются многокритериальным равновесием по Нэшу в игре (1.1), (1.2), если

$$H_i(u_t^N,v_t^N)\ge H_i(u_{1t}^N,\dots,u_{i-1\,t}^N,u_{it},u_{i+1\,t}^N,\dots,u_{n_1t}^N,v_t^N)\quad\forall u_{it}\in U_i,\quad i\in N_1,$$

$$M_j(u_t^N,v_t^N)\ge M_j(u_t^N,v_{1t}^N,\dots,v_{i-1\,t}^N,v_{it},v_{i+1\,t}^N,\dots,v_{n_2t}^N)\quad\forall v_{jt}\in V_j,\quad j\in N_2\,.$$

### 1.2. Многокритериальное кооперативное равновесие

Теперь предположим, что игроки хотят действовать кооперативно, т. е. формируется гранд-коалиция. Для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры [5]. При этом в качестве точки статус-кво выступают суммы некооперативных выигрышей, полученных при использовании игроками многокритериальных равновесных по Нэшу стратегий.

Некооперативные выигрыши в соответствии с определением 1 примут вид

$$I_1^N = \begin{pmatrix} I_1^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^1(u_t^N, v_t^N) \\ \dots \\ I_1^{kN} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_1^k(u_t^N, v_t^N) \end{pmatrix}, \ \dots, \ I_{n_1}^N = \begin{pmatrix} I_{n_1}^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_{n_1}^1(u_t^N, v_t^N) \\ \dots \\ I_{n_1}^{kN} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t g_{n_1}^k(u_t^N, v_t^N) \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

$$J_1^N = \begin{pmatrix} J_1^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_1^1(u_t^N, v_t^N) \\ \dots \\ J_1^{kN} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_1^k(u_t^N, v_t^N) \end{pmatrix}, \ \dots, \ J_{n_2}^N = \begin{pmatrix} J_{n_2}^{1N} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_{n_2}^1(u_t^N, v_t^N) \\ \dots \\ J_{n_2}^{kN} = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t q_{n_2}^k(u_t^N, v_t^N) \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Поскольку для определения кооперативного поведения используется арбитражная схема Нэша, необходимо решить следующую задачу:

$$\begin{aligned}
&\Big(\sum_{i=1}^{n_1} V_i^{1c} + \sum_{j=1}^{n_2} W_j^{1c} - \sum_{i=1}^{n_1} I_i^{1N} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{1N}\Big) \times \dots \times \Big(\sum_{i=1}^{n_1} V_i^{kc} + \sum_{j=1}^{n_2} W_j^{kc} - \sum_{i=1}^{n_1} I_i^{kN} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{kN}\Big) \\
&= \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big[\sum_{i=1}^{n_1} g_i^1(u_t^c, v_t^c) + \sum_{j=1}^{n_2} q_j^1(u_t^c, v_t^c)\Big] - \sum_{i=1}^{n_1} I_i^{1N} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{1N}\Big) \times \dots \\
&\times \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big[\sum_{i=1}^{n_1} g_i^k(u_t^c, v_t^c) + \sum_{j=1}^{n_2} q_j^k(u_t^c, v_t^c)\Big] - \sum_{i=1}^{n_1} J_i^{kN} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{kN}\Big) \\
&= \max_{u_t, v_t} \Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big[\sum_{i=1}^{n_1} g_i^1(u_t, v_t) + \sum_{j=1}^{n_2} q_j^1(u_t, v_t)\Big] - \sum_{i=1}^{n_1} I_i^{1N} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{1N}\Big) \times \dots \\
&\times \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big[\sum_{i=1}^{n_1} g_i^k(u_t, v_t) + \sum_{j=1}^{n_2} q_j^k(u_t, v_t)\Big] - \sum_{i=1}^{n_1} J_i^{kN} - \sum_{j=1}^{n_2} J_j^{kN}\Big)\Big],
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где некооперативные выигрыши определены в (1.3), (1.4).

О п р е д е л е н и е 2. Профили стратегий $u_t^c = (u_{1t}^c, \dots, u_{n_1 t}^c)$, $v_t^c = (v_{1t}^c, \dots, v_{n_2 t}^c)$ составляют многокритериальное кооперативное равновесие в игре (1.1), (1.2), если они являются решением задачи (1.5).

### 1.3. Формирование коалиций

В данной многокритериальной динамической игре, в отличие от [6; 9], участвуют игроки двух типов. Поэтому возможно формирование двух коалиций ($K \subseteq N_1$ и $L \subseteq N_2$) и присутствие индивидуальных (не входящих ни в одну коалицию) игроков обоих типов ($N_1 \backslash K$ и $N_2 \backslash L$). Размеры коалиций, устойчивых в классическом смысле (внутренне и внешне) и коалиционно устойчивых, являются предметом исследования.

Существуют различные подходы к определению оптимального поведения участников при формировании коалиции. В [6] были исследованы случаи информированных и не информированных участников, а в [9] — стратегии Курно — Нэша и Штакельберга.

В данной работе предположим, что все игроки информированы о факте заключения кооперативных соглашений и принимают решения независимо. При этом участники коалиций выбирают свои стратегии согласно кооперативной концепции (определение 2), а индивидуальные игроки — как некооперативное равновесие (определение 1).

Таким образом, для определения общих кооперативных выигрышей коалиций $K \subseteq N_1$ и $L \subseteq N_2$ применим арбитражную схему Нэша, т. е. решим следующую задачу:

$$\Big(\sum_{i\in K} V_i^{1K}(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{1N}\Big) \times \ldots \times \Big(\sum_{i\in K} V_i^{kK}(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{kN}\Big)$$

$$= \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in K} g_i^1(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{1N}\Big) \times \ldots \times \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in K} g_i^k(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{kN}\Big)$$

$$= \max_{u_{it},\, i\in K}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in K} g_i^1(u_t, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{1N}\Big) \times \ldots$$

$$\times \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i\in K} g_i^k(u_t, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{i\in K} I_i^{kN}\Big)\Big], \tag{1.6}$$

$$\Big(\sum_{j\in L} W_j^{1L}(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{1N}\Big) \times \ldots \times \Big(\sum_{j\in L} W_j^{kL}(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{kN}\Big)$$

$$= \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{j\in L} q_j^1(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{1N}\Big) \times \ldots \times \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{j\in L} q_j^k(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{kN}\Big)$$

$$= \max_{v_{jt},\, j\in L}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{j\in L} q_j^1(u_t^K, v_t, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{1N}\Big) \times \ldots$$

$$\times \Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{j\in L} q_j^k(u_t^K, v_t, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - \sum_{j\in L} J_j^{kN}\Big)\Big]. \tag{1.7}$$

Стратегии индивидуальных игроков определяем из решения задач

$$(I_i^1(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - G_i^1) \times \ldots \times (I_i^k(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - G_i^k)$$

$$= \max_{\tilde{u}_{it},\, i\in N_1\backslash K}\Big[(I_i^1(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t, \tilde{v}_t^N) - G_i^1) \times \ldots \times (I_i^k(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t, \tilde{v}_t^N) - G_i^k)\Big], \quad i \in N_1\backslash K,$$

$$(J_j^1(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - Q_j^1) \times \ldots \times (J_j^k(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N) - G_i^k)$$

$$= \max_{\tilde{v}_{jt},\, j\in N_2\backslash L}\Big[(J_j^1(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t) - Q_j^1) \times \ldots \times (J_j^k(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t) - G_i^k)\Big], \quad j \in N_2\backslash L, \tag{1.8}$$

при этом динамика развития ресурса принимает вид

$$x_{t+1} = f(u_t^K, v_t^L, \tilde{u}_t^N, \tilde{v}_t^N), \quad x_0 = x.$$

Обозначим полученные стратегии членов коалиций $K$ и $L$ как $u_t^K = (u_{it}^K)_{i\in K}$, $v_t^L = (v_{it}^L)_{i\in L}$, а индивидуальных игроков — как $u_t^{NK} = (u_{it}^N)_{i\in N_1\backslash K}$, $v_t^{NL} = (v_{it}^N)_{i\in N_2\backslash L}$.

### 1.4. Устойчивость коалиций

Понятия внутренней и внешней устойчивости, введенные в работе [7], широко используются для исследования вопросов целесообразности формирования коалиций. Распространим условия устойчивости для многокритериальных динамических игр (приведем определение для коалиции $K$, для второй коалиции — аналогично).

О п р е д е л е н и е 3. Коалиция $K$ называется внутренне устойчивой, если не существует такого $i \in K$, что

$$I_i^K(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \leqq I_i^N(u_t^{K\backslash\{i\}}, u_t^{NK\backslash\{i\}}, v_t^L, v_t^{NL}). \tag{1.9}$$

Коалиция $K$ называется внешне устойчивой, если не существует такого $i \in N_1 \backslash K$, что

$$I_i^N(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \leqq I_i^{K\cup\{i\}}(u_t^{K\cup\{i\}}, u_t^{NK\cup\{i\}}, v_t^L, v_t^{NL}). \tag{1.10}$$

Здесь $a \leqq b \Leftrightarrow a_j \le b_j \ \ \forall j = 1, 2$.

Таким образом, внутренняя устойчивость означает, что игроку невыгодно выходить из коалиции и становиться индивидуальным игроком. А внешняя устойчивость означает, что независимому игроку невыгодно присоединяться к коалиции.

Определение 4. Коалиция $K$ является устойчивой, если выполнены условия (1.9), (1.10).

### 1.5. Коалиционная устойчивость

Традиционно понятия внутренней и внешней устойчивости применяются в ситуации, когда формируется только одна коалиция. В данной работе возможно формирование двух кооперативных соглашений, следовательно, должны учитываться стимулы перехода игроков из одной коалиции в другую. Carraro [8] ввел понятие интеркоалиционной устойчивости для такого анализа. В [10] было предложено расширение данной схемы на случай, когда не один, а несколько игроков могут переходить из одной коалиции в другую. Введем понятие коалиционной устойчивости, расширяющее понятие интеркоалиционной устойчивости, для многокритериальных динамических игр с коалиционной структурой.

Определение 5. Коалиция $K$ называется коалиционно внутренне устойчивой, если

$$I_i^K(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \geqq I_i^{L\cup P}(u_t^{K\backslash P}, u_t^{NK\backslash P}, v_t^{L\cup P}, v_t^{NL\cup P}) \ \ \forall i \in P \subset K, \quad |P| = p. \tag{1.11}$$

Коалиция $K$ называется коалиционно внешне устойчивой, если

$$J_j^L(u_t^K, u_t^{NK}, v_t^L, v_t^{NL}) \geqq J_j^{K\cup Q}(u_t^{K\cup Q}, u_t^{NK\cup Q}, v_t^{L\backslash Q}, v_t^{NL\backslash Q}) \ \ \forall j \in Q \subset L, \quad |Q| = q. \tag{1.12}$$

Внутренняя коалиционная устойчивость означает, что никакому множеству участников коалиции $K$ невыгодно выйти из нее и присоединиться к коалиции $L$. Внешняя коалиционная устойчивость означает, что никакому множеству участников коалиции $L$ невыгодно выйти из нее и присоединиться к коалиции $K$.

Для коалиции $L$ условия коалиционной устойчивости совпадают с (1.11), (1.12).

Определение 6. Коалиционное разбиение $(K, L)$ является коалиционно устойчивым, если выполнены условия (1.11), (1.12).

Далее рассмотрим бикритериальную задачу управления биоресурсами для демонстрации предложенных концепций.

## 2. Многокритериальная задача управления биоресурсами

Исследуется динамическая бикритериальная модель управления биоресурсами. Игроки двух типов $N_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ и $N_2 = \{1, \ldots, n_2\}$ (страны или фирмы) эксплуатируют ресурс на протяжении конечного промежутка времени $[0, m]$. Динамика развития популяции имеет вид

$$x_{t+1} = \varepsilon x_t - u_{1t} - \ldots - u_{n_1 t} - v_{1t} - \ldots - v_{n_2 t}, \quad x_0 = x, \tag{2.1}$$

где $x_t \ge 0$ — размер популяции в момент времени $t \ge 0$; $\varepsilon \ge 1$ — коэффициент естественного роста популяции; $u_{it} \ge 0$, $v_{jt} \ge 0$ — стратегии (вылов) игроков $i$, $j$ в момент времени $t \ge 0$, $i \in N_1$, $j \in N_2$.

Игроки стремятся достичь двух целей — максимизировать доход от продажи ресурса и минимизировать затраты на эксплуатацию. Предполагается, что цена на рынке для игроков двух типов различается, а затраты равны и зависят от интенсивности эксплуатации каждого игрока. Такая ситуация возможна, например, когда участники из разных стран ведут эксплуатацию в одном водоеме, а добытый ресурс продают на собственном рынке, что влечет различие в ценах. Тогда вектор-функции выигрышей на конечном промежутке планирования примут вид

$$I_i = \begin{pmatrix} I_i^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t p_1 u_{it} \\ I_i^2 = -\sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t c u_{it}^2 \end{pmatrix}, \quad i \in N_1, \quad \ldots, \quad J_j = \begin{pmatrix} J_j^1 = \sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t p_2 v_{jt} \\ J_j^2 = -\sum\limits_{t=0}^{m} \delta^t c v_{jt}^2 \end{pmatrix}, \quad j \in N_2, \qquad (2.2)$$

где $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ — рыночная цена за единицу ресурса для игроков $i$, $j$, $i \in N_1$, $j \in N_2$; $c \geq 0$ — затраты на эксплуатацию и $\delta \in (0,1)$ — общий коэффициент дисконтирования.

Можно заметить, что представленный пример является линейно-квадратичной динамическая игрой, в которой можно было бы рассмотреть свертку критериев. Однако многокритериальный подход кажется более адекватным, чем сложение прибыли, выраженной в денежных единицах, и затрат, пропорциональных квадрату интенсивности эксплуатации.

## 2.1. Некооперативное поведение

Начнем с построения гарантированных выигрышей, используя третий вариант их определения [4]. $G_1^1, \ldots, G_{n_1}^1$, $Q_1^1, \ldots, Q_{n_2}^1$ — это выигрыши в равновесии по Нэшу в игре $\langle x, N_1, N_2, \{U_i\}_{i=1}^{n_1}, \{V_j\}_{j=1}^{n_2}, \{I_i^1\}_{i=1}^{n_1}, \{J_j^1\}_{j=1}^{n_2} \rangle$. Используя принцип Беллмана, получим равновесные по Нэшу стратегии $u_{1t} = \ldots = u_{n_1 t} = v_{1t} = \ldots = v_{n_2 t} = \dfrac{\varepsilon - 1}{n_1 + n_2 - 1} x_t$ и размер популяции в равновесии по Нэшу

$$x_t = \Big(\frac{n_1 + n_2 - \varepsilon}{n_1 + n_2 - 1}\Big)^t x_0 \,.$$

Тогда гарантированные выигрыши примут вид $G_i^1 = p_1 A x_0$, $i \in N_1$, $Q_j^1 = p_2 A x_0$, $j \in N_2$, где

$$A = \frac{(\varepsilon - 1)(\delta(n_1 + n_2 - \varepsilon))^{m+1} + (n_1 + n_2 - 1)^{m+1}}{(n_1 + n_2 - 1)^{m+1}(\delta(n_1 + n_2 - \varepsilon) - n_1 - n_2 + 1)}. \qquad (2.3)$$

Аналогично определяя равновесие по Нэшу в игре со вторыми критериями $\langle x, N_1, N_2, \{U_i\}_{i=1}^{n_1}, \{V_j\}_{j=1}^{n_2}, \{I_i^2\}_{i=1}^{n_1}, \{J_j^2\}_{j=1}^{n_2} \rangle$, получим вторые гарантированные выигрыши

$$G_i^2 = Q_j^2 = G x_0^2, \quad i \in N_1, \quad j \in N_2,$$

где

$$G = -c\Big(\frac{2(n_1+n_2) - \varepsilon^2 + \varepsilon\sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)}}{(n_1+n_2)(-\varepsilon + \sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)})}\Big)^2$$

$$\times \frac{(2\delta n)^{m+1} - (\varepsilon - \sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)})^{m+1}}{(\varepsilon - \sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)})^m (2\delta(n_1+n_2) - \varepsilon + \sqrt{4(n_1+n_2)^2 + \varepsilon^2 - 4(n_1+n_2)})}. \quad (2.4)$$

Согласно определению 1 для построения многокритериального равновесия по Нэшу необходимо решить следующие задачи:

$$(I_i^1(u_t^N, v_t^N) - p_1 A x)(I_i^2(u_t^N, v_t^N) - G x^2) = \max_{u_{it},\, i \in N_1} \big[(I_i^1(u_t, v_t^N) - p_1 A x)(I_i^2(u_t, v_t^N) - G x^2)\big]$$

$$= p_1 \max_{u_{it},\, i \in N_1} \Big[\Big(\sum_{t=0}^{m} \delta^t u_{it} - A x\Big)\Big(-c \sum_{t=0}^{m} \delta^t u_{it}^2 - G x^2\Big)\Big], \quad i \in N_1,$$

$$(J_j^1(u_t^N,v_t^N)-p_2Ax)(J_j^2(u_t^N,v_t^N)-Gx^2)=\max_{v_{jt},\,j\in N_2}\left[(J_j^1(u_t^N,v_t)-p_2Ax)(J_j^2(u_t^N,v_t)-Gx^2)\right]$$

$$=p_2\max_{v_{jt},\,j\in N_2}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t v_{jt}-Ax\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t v_{jt}^2-Gx^2\Big)\Big],\quad j\in N_2\,.$$

Рассматривая процесс последовательно, т. е. начиная с одношаговой игры и заканчивая $m$-шаговой, и предполагая линейный вид стратегий, получим, что многокритериальные равновесные стратегии по Нэшу у игроков обоих типов совпадают и имеют вид

$$u_{it}^N=v_{jt}^N=\gamma_t^N x_t=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^N}{1+(n_1+n_2)\gamma_1^N\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j}\,x_t,\quad i\in N_1,\quad j\in N_2,\tag{2.5}$$

а стратегия на последнем шаге $\gamma_1^N$ определяется из уравнения

$$-2c\gamma_1^N\prod_{i=2}^{m}(\varepsilon-n\gamma_i^N)\Big[\sum_{i=0}^{m-1}\delta^i\gamma_{m-i}^N\prod_{j=m+1-i}^{m}(\varepsilon-(n_1+n_2)\gamma_j^N)-A\Big]$$

$$+\Big[-c\sum_{i=0}^{m-1}\delta^i(\gamma_{m-i}^N)^2\prod_{j=m+1-i}^{m}(\varepsilon-(n_1+n_2)\gamma_j^N)^2-G\Big]=0,$$

где $A$ и $G$ заданы в (2.3), (2.4).

### 2.2. Формирование гранд-коалиции

В соответствии с (2.5) определим выигрыши в многокритериальном равновесии по Нэшу

$$\begin{aligned}
I_i^{1N}(x)&=p_1\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N x,\quad i\in N_1,\\
J_j^{1N}(x)&=p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N x,\quad j\in N_2,\\
I_i^{2N}(x)&=J_j^{2N}(x)=-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2x^2,\quad i\in N_1,\quad j\in N_2\,.
\end{aligned}$$

Согласно определению 2 для построения многокритериального кооперативного равновесия необходимо решить следующую задачу:

$$(V_1^{1c}+\ldots+V_{n_1}^{1c}+W_1^{1c}+\ldots+W_{n_2}^{1c}-I_1^{1N}-\ldots-I_{n_1}^{1N}-J_1^{1N}-\ldots-J_{n_1}^{1N})$$

$$\times(V_1^{2c}+\ldots+V_{n_1}^{2c}+W_1^{2c}+\ldots+W_{n_2}^{2c}-I_1^{2N}-\ldots-I_{n_1}^{2N}-J_1^{2N}-\ldots-J_{n_1}^{2N})$$

$$=\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\Big(p_1\sum_{i\in N_1}u_{it}^c+p_2\sum_{j\in N_2}v_{jt}^c\Big)-Px\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t\Big(\sum_{i\in N_1}(u_{it}^c)^2+\sum_{j\in N_2}(v_{jt}^c)^2\Big)-Mx^2\Big)$$

$$=\max_{u_t,v_t}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\Big(p_1\sum_{i\in N_1}u_{it}+p_2\sum_{j\in N_2}v_{jt}\Big)-Px\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t\Big(\sum_{i\in N_1}(u_{it})^2+\sum_{j\in N_2}(v_{jt})^2\Big)-Mx^2\Big)\Big],$$

где $P=(n_1p_1+n_2p_2)\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N$; $M=-(n_1+n_2)c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2$.

Рассматривая процесс последовательно, т. е. начиная с одношаговой игры и заканчивая $m$-шаговой, и предполагая линейный вид стратегий, получим многокритериальные кооперативные стратегии

$$u_{it}^c=u_t^c=\gamma_t^c x_t,\quad i\in N_1,\quad v_{jt}^c=v_t^c=\theta_t^c x_t,\quad j\in N_2,\tag{2.6}$$

где
$$\gamma_t^c = \frac{p_1 \varepsilon^{t-1}\gamma_1^c}{p_1 + \gamma_1^c(p_1 n_1 + p_2 n_2)\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j}\,, \quad t = 2,\ldots,m; \quad \theta_t^c = \frac{p_2}{p_1}\gamma_t^c, \quad t = 1,\ldots,m,$$
а стратегия игрока на последнем шаге $\gamma_1^c$ определяется из уравнения
$$p_1\Big[-c\sum_{i=2}^{m}\delta^{m-i}(n_1(\gamma_i^c)^2 + n_2(\theta_i^c)^2)\prod_{j=i+1}^{m}(\varepsilon - n_1\gamma_j^c - n_2\theta_j^c)^2 - M\Big]$$
$$-\,2c\gamma_1^c\prod_{j=2}^{m}(\varepsilon - n_1\gamma_j^c - n_2\theta_j^c)\Big[\sum_{i=1}^{m}\delta^{m-i}(n_1 p_l\gamma_i^c + n_2 p_2\theta_i^c)\prod_{j=i+1}^{m}(\varepsilon - n_1\gamma_j^c - n_2\theta_j^c) - P\Big] = 0\,.$$

Исследуем асимптотическое некооперативное и кооперативное поведение в задаче управления биоресурсами.

Многокритериальные равновесные по Нэшу стратегии (2.5) при $t\to\infty$ примут вид
$$\gamma_t^N \to \frac{\varepsilon - 1}{n_1 + n_2},$$
а кооперативные (2.6) — $\gamma_t^c \to \dfrac{p_1(\varepsilon-1)}{p_1 n_1 + p_2 n_2}, \quad \theta_t^c \to \dfrac{p_2(\varepsilon-1)}{p_1 n_1 + p_2 n_2}\,.$

Таким образом, в обоих случаях $x_t \to x_0$, и разница — только в распределении общего вылова $(\varepsilon-1)x_t$ между игроками. При некооперативном поведении он распределяется равномерно, а при кооперативном — пропорционально рыночным ценам за ресурс.

Заметим также, что интенсивность эксплуатации при некооперативном поведении при $p_2 > p_1$ больше, чем у участников коалиции $K$, но меньше, чем у участников коалиции $L$. При $p_1 > p_2$ ситуация противоположная.

### 2.3. Формирование коалиционного разбиения

Рассмотрим процесс формирования двух коалиций ($K \subseteq N_1$ и $L \subseteq N_2$). При этом участники коалиций определяют свои стратегии согласно задачам (1.6), (1.7), а индивидуальные игроки ($i \in N_1 \setminus K$, $j \in N_2 \setminus L$) — из решения задач (1.8). Обозначим размеры коалиций как $k = |K|$, $l = |L|$.

Таким образом, для определения общего кооперативного выигрыша коалиций $K$ и $L$ решаются следующие задачи:
$$\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{i\in K}u_{it}^K - P^K x\Big)\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{i\in K}(u_{it}^K)^2 - M^K x^2\Big)$$
$$= \max_{u_{it},\, i\in K}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{i\in K}u_{it} - P^K x\Big)\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{i\in K}(u_{it})^2 - M^K x^2\Big)\Big],$$
$$\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{j\in L}v_{jt}^L - P^L x\Big)\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{j\in L}(v_{jt}^L)^2 - M^L x^2\Big)$$
$$= \max_{v_{jt},\, j\in L}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{j\in L}v_{jt} - P^L x\Big)\Big(\sum_{t=0}^{m}\delta^t\sum_{j\in L}(v_{jt})^2 - M^L x^2\Big)\Big],$$
где $P^K = k\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N$; $M^K = k\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2$; $P^L = l\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N$; $M^L = l\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2$.
Для нахождения же оптимальных стратегий индивидуальных игроков решаются задачи (1.8)
$$\Big(p_1\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde{u}_{it}^N - G_i^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde{u}_{it}^N)^2 - G_i^2\Big)$$

$$= \max_{\tilde{u}_{it},\, i\in N_1\backslash K}\Big[\Big(p_1\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde{u}_{it}-G_i^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde{u}_{it})^2-G_i^2\Big)\Big],\quad i\in N_1\backslash K,$$

$$\Big(p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde{v}_{jt}^N-Q_j^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde{v}_{jt}^N)^2-Q_j^2\Big)$$

$$= \max_{\tilde{v}_{jt}^N,\, j\in N_2\backslash L}\Big[\Big(p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde{v}_{jt}-Q_j^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde{v}_{jt})^2-Q_j^2\Big)\Big],\quad j\in N_2\backslash L,$$

при следующей динамике развития популяции:

$$x_{t+1}=\varepsilon x_t-\sum_{i\in K}u_{it}^K-\sum_{j\in L}v_{jt}^L-\sum_{i\in N_1\backslash K}\tilde{u}_{it}^N-\sum_{j\in N_2\backslash L}\tilde{v}_{jt}^N,\quad x_0=x\,.$$

Аналогично рассматривая процесс, начиная с одношагового и заканчивая $m$-шаговым, и предполагая линейный вид стратегий, получим

**Утверждение 1.** *Стратегии участников коалиций $K$ и $L$ при формировании коалиционного разбиения в задаче* (2.1), (2.2) *принимают вид*

$$u_{it}^K=\gamma_t^K x_t,\quad i\in K,\quad v_{jt}^L=\theta_t^L x_t,\quad j\in L,$$

$$\begin{aligned}&\gamma_t^K=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^K}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j(k\gamma_1^K+l\theta_1^L+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N)},\quad t=2,\dots,m,\\&\theta_t^s=\frac{\theta_1^L}{\gamma_1^K}\gamma_t^K,\quad t=2,\dots,m;\end{aligned}\tag{2.7}$$

*стратегии игроков $\gamma_1^K$ и $\theta_1^L$ на последнем шаге определяются из уравнений*

$$\begin{aligned}&\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}k(\gamma_j^K)^2\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)^2-M^K\Big]\\&\qquad+\;2\gamma_1^K\prod_{j=2}^{m}(\varepsilon-k\gamma_j^K-l\theta_j^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_j^N)\\&\times\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}k\gamma_j^K\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)-P^K\Big]=0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}&\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}k(\theta_j^L)^2\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)^2-M^L\Big]\\&\qquad+\;2\theta_1^L\prod_{j=2}^{m}(\varepsilon-k\gamma_j^K-l\theta_j^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_j^N)\\&\times\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}l\theta_j^L\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)-P^L\Big]=0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

*Оптимальные стратегии индивидуальных игроков в задаче* (2.1), (2.2) *совпадают и имеют вид*

$$\tilde{u}_{it}^N=\tilde{v}_{jt}^N=\gamma_t^N x_t,\quad i\in N_1\backslash K,\quad j\in N_2\backslash L,$$

$$\gamma_t^N = \frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^N}{1+\sum\limits_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j(k\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N)}, \quad t=2,\ldots,m; \tag{2.10}$$

*стратегия на последнем шаге $\gamma_1^N$ определяется из уравнения*

$$\Big[-c\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}(\gamma_j^N)^2\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)^2-G\Big]$$
$$-\,2c\gamma_1^N\prod_{j=2}^{m}(\varepsilon-k\gamma_j^K-l\theta_j^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_j^N)\gamma_j^N)$$
$$\times\Big[\sum_{j=1}^{m}\delta^{m-j}\gamma_j^N\prod_{d=j+1}^{m}(\varepsilon-k\gamma_d^K-l\theta_d^L-(n_1+n_2-k-l)\gamma_d^N)-A\Big]=0, \tag{2.11}$$

*где $A$ и $G$ заданы в* (2.3), (2.4).

Рассмотрим асимптотическое поведение при формировании коалиционного разбиения. Стратегии участников коалиций (2.7) при $t\to\infty$ примут вид

$$\gamma_t^K \to \frac{(\varepsilon-1)\gamma_1^K}{k\gamma_1^K+l\theta_1^L+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N}, \quad \theta_t^L \to \frac{(\varepsilon-1)\theta_1^L}{k\gamma_1^K+l\theta_1^L+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N},$$

а стратегии индивидуальных игроков (2.10) — $\gamma_t^N \to \dfrac{(\varepsilon-1)\gamma_1^N}{k\gamma_1^K+l\theta_1^L+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N}$.

Таким образом, при формировании коалиционного разбиения также $x_t\to x_0$ и игроки вылавливают только естественный прирост ресурса $(\varepsilon-1)x_t$.

## 2.4. Устойчивость коалиций

Согласно утверждению 1 стратегии участников коалиций $K$ и $L$ принимают вид $u_t^K$ — для всех $i\in K$ и $v_t^L$ — для всех $j\in L$; стратегии индивидуальных игроков обозначим как $u_t^{NK}=v_t^{NL}=\gamma_t^N x_t$. Рассмотрим условия устойчивости для коалиции $K$:
условия внутренней устойчивости (1.9)

$$I_i^{1K}(u_t^K,u_t^{NK},v_t^L,v_t^{NL}) \ge I_i^{1N}(u_t^{K\setminus\{i\}},u_t^{NK\setminus\{i\}},v_t^L,v_t^{NL}),$$

$$I_i^{2K}(u_t^K,u_t^{NK},v_t^L,v_t^{NL}) \ge I_i^{2N}(u_t^{K\setminus\{i\}},u_t^{NK\setminus\{i\}},v_t^L,v_t^{NL}) \ \ \forall i\in K;$$

условия внешней устойчивости (1.10)

$$I_i^{1N}(u_t^K,u_t^{NK},v_t^L,v_t^{NL}) \ge I_i^{1K\cup\{i\}}(u_t^{K\cup\{i\}},u_t^{NK\cup\{i\}},v_t^L,v_t^{NL}),$$

$$I_i^{2N}(u_t^K,u_t^{NK},v_t^L,v_t^{NL}) \ge I_i^{2K\cup\{i\}}(u_t^{K\cup\{i\}},u_t^{NK\cup\{i\}},v_t^L,v_t^{NL}) \ \ \forall i\in N_1\setminus K.$$

Упростив, получим, что условия внутренней устойчивости коалиции $K$ имеют вид

$$(\gamma_1^K-\gamma_1^N)\Big(1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j\big((k-1)\gamma_1^K+l\theta_1^L+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N\big)\Big)\ge 0,$$

$$(\gamma_1^K-\gamma_1^N)\Big((\gamma_1^K+\gamma_1^N)\Big(1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j\big((k-1)\gamma_1^K+l\theta_1^L+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N\big)\Big)^2$$

$$- \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j (\gamma_1^K)^2 \Big( 2 + \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j \big( (2k-1)\gamma_1^K + l\theta_1^L + (2(n_1+n_2-k-l)+1)\gamma_1^N \big) \Big) \Big) \leq 0; \qquad (2.12)$$

условия внешней устойчивости —

$$(\gamma_1^K - \gamma_1^N) \Big( 1 + \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j \big( k\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l+1)\gamma_1^N \big) \Big) \leq 0,$$

$$(\gamma_1^K - \gamma_1^N) \Bigg( (\gamma_1^K + \gamma_1^N) \Big( 1 + \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j ((k-1)\gamma_1^K + l\theta_1^L + (n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N) \Big)^2$$

$$- \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j (\gamma_1^N)^2 \Big( 2 + \sum_{j=0}^{t-2} \varepsilon^j \big( (2k-1)\gamma_1^K + l\theta_1^L + (2(n_1+n_2-k-l)+1)\gamma_1^N \big) \Big) \Bigg) \leq 0. \qquad (2.13)$$

Поскольку $\gamma_1^K \leq \gamma_1^N$, то условие внутренней устойчивости (2.12) выполняется только для коалиций размера 1, а условия внешней устойчивости (2.13) выполняются всегда.

Следовательно, как и в большинстве эколого-экономических моделей оба условия устойчивости выполняются только для коалиций малой размерности (см., например, [11]).

## 2.5. Коалиционная устойчивость

Для проверки введенных условий устойчивости (1.11), (1.12) построим стратегии игроков и выигрыши коалиций для следующих случаев.

1. Подмножество игроков $P \subset K$, $|P| = p$, присоединяется к коалиции $L$. Таким образом, игроки формируют коалицию $L \cup P$, где $j \in L \subset N_2$ — игроки типа 2, $i \in P \subset K$ — игроки типа 1. При этом у игроков типа 1 остается коалиция $K \backslash P$, а все оставшиеся участники играют индивидуально.

2. Подмножество игроков $Q \subset L$, $|Q| = q$, присоединяется к коалиции $K$. Таким образом, игроки формируют коалицию $K \cup Q$, где $i \in K \subset N_1$ — игроки типа 1, $j \in Q \subset N_2$ — игроки типа 2. При этом у игроков типа 2 остается коалиция $L \backslash Q$, а все оставшиеся участники играют индивидуально.

Рассмотрим случай 1. Для определения кооперативных выигрышей новых коалиций $L \cup P$, $K \backslash P$ решаются следующие задачи:

$$\Big( \sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K\backslash P} u_{it}^K - P^{K\backslash P} x \Big) \Big( \sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K\backslash P} (u_{it}^K)^2 - M^{K\backslash P} x^2 \Big)$$

$$= \max_{u_{it},\, i \in K\backslash P} \Big[ \Big( \sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K\backslash P} u_{it} - P^{K\backslash P} x \Big) \Big( \sum_{t=0}^{m} \delta^t \sum_{i \in K\backslash P} (u_{it})^2 - M^{K\backslash P} x^2 \Big) \Big],$$

$$\Big( \sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big( p_2 \sum_{j \in L} v_{jt}^L + p_1 \sum_{i \in P} \tilde{u}_{it}^K \Big) - P^{L\cup P} x \Big) \Big( \sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big( \sum_{j \in L} (v_{jt}^L)^2 + \sum_{i \in P} (\tilde{u}_{it}^K)^2 \Big) - M^{L\cup P} x^2 \Big)$$

$$= \max_{\substack{\tilde{u}_{it},\ i \in P \\ v_{jt},\ j \in L}} \Big[ \Big( \sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big( p_2 \sum_{j \in L} v_{jt} + p_1 \sum_{i \in P} \tilde{u}_{it} \Big) - P^{L\cup P} x \Big) \Big( \sum_{t=0}^{m} \delta^t \Big( \sum_{j \in L} (v_{jt})^2 + \sum_{i \in P} (\tilde{u}_{it})^2 \Big) - M^{L\cup P} x^2 \Big) \Big],$$

где

$$P^{K\backslash P} = (k-p) \sum_{t=0}^{m} \delta^t \gamma_t^N, \quad M^{K\backslash P} = (k-p) \sum_{t=0}^{m} \delta^t (\gamma_t^N)^2,$$

$$P^{L\cup P}=(p_1p+p_2l)\sum_{t=0}^{m}\delta^t\gamma_t^N,\quad M^{L\cup P}=(l+p)\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\gamma_t^N)^2;$$

индивидуальные игроки, как и ранее, решают задачи (1.8)

$$\Big(p_1\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde u_{it}^N-G_i^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde u_{it}^N)^2-G_i^2\Big)$$

$$=\max_{\tilde u_{it},\, i\in N_1\backslash K}\Big[\Big(p_1\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde u_{it}-G_i^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde u_{it})^2-G_i^2\Big)\Big],\quad i\in N_1\backslash K,$$

$$\Big(p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde v_{jt}^N-Q_j^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde v_{jt}^N)^2-Q_j^2\Big)$$

$$=\max_{\tilde v_{jt},\, i\in N_2\backslash L}\Big[\Big(p_2\sum_{t=0}^{m}\delta^t\tilde v_{jt}-Q_j^1\Big)\Big(-c\sum_{t=0}^{m}\delta^t(\tilde v_{jt})^2-Q_j^2\Big)\Big],\quad j\in N_2\backslash L,$$

при следующей динамике развития популяции

$$x_{t+1}=\varepsilon x_t-\sum_{i\in K\backslash P}u_{it}^K-\sum_{i\in P}\tilde u_{it}^K-\sum_{j\in L}v_{jt}^L-\sum_{i\in N_1\backslash K}\tilde u_{it}^N-\sum_{j\in N_2\backslash L}\tilde v_{jt}^N,\ x_0=x\,.$$

Справедливо следующее утверждение.

**Утверждение 2.** *Стратегии участников новой коалиции $L\cup P$ в задаче* (2.1), (2.2) *принимают вид*

$$\tilde u_{it}^K=\gamma_t^{L\cup P}x_t,\quad i\in P,\quad v_{jt}^L=\theta_t^{L\cup P}x_t,\quad j\in L,$$

$$\gamma_t^{L\cup P}=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^{L\cup P}}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((k-p)\gamma_1^{K\backslash P}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(p+\frac{p_2}{p_1}l)\gamma_1^{L\cup P})},\quad t=2,\dots,m,$$

$$\theta_t^{L\cup P}=\frac{p_2}{p_1}\gamma_t^{L\cup P},\quad t=1,\dots,m; \tag{2.14}$$

*стратегии игроков, оставшихся в коалиции $K$, определяются как*

$$u_{it}^K=\gamma_t^{K\backslash P}x_t,\quad i\in K\backslash P,$$

$$\gamma_t^{K\backslash P}=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^{K\backslash P}}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((k-p)\gamma_1^{K\backslash P}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(p+\frac{p_2}{p_1}l)\gamma_1^{L\cup P})},\quad t=2,\dots,m;$$

*стратегии индивидуальных игроков совпадают и имеют вид*

$$\tilde u_{it}^N=\tilde v_{jt}^N=\gamma_t^Nx_t,\quad i\in N_1\backslash K,\quad j\in N_2\backslash L,$$

$$\gamma_t^{N}=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^{N}}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((k-p)\gamma_1^{K\backslash P}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(p+\frac{p_2}{p_1}l)\gamma_1^{L\cup P})},\quad t=2,\dots,m;$$

*стратегии игроков $\gamma_1^{K\backslash P}$, $\gamma_1^{L\cup P}$ и $\gamma_1^N$ на последнем шаге определяются из уравнений, аналогичных* (2.8), (2.11), *с соответствующими гарантированными выигрышами.*

Рассмотрим случай 2. Действуя аналогично, когда подмножество игроков $Q\subset L$, $|Q|=q$, присоединяется к коалиции $K$, получим

**Утверждение 3.** *Стратегии участников новой коалиции* $K\cup Q$ *в задаче* (2.1), (2.2) *принимают вид*

$$\tilde{v}_{jt}^L=\theta_t^{K\cup Q}x_t,\quad j\in Q,\quad u_{it}^K=\gamma_t^{K\cup Q}x_t,\quad i\in K,$$

$$\theta_t^{K\cup Q}=\frac{\varepsilon^{t-1}\theta_1^{K\cup Q}}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((l-q)\theta_1^{L\setminus Q}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(q+\frac{p_1}{p_2}k)\theta_1^{K\cup Q})},\quad t=2,\ldots,m,$$

$$\gamma_t^{K\cup Q}=\frac{p_1}{p_2}\theta_t^{K\cup Q},\quad t=1,\ldots,m; \tag{2.15}$$

*стратегии игроков, оставшихся в коалиции* $L$*, определяются как*

$$v_{jt}^L=\theta_t^{L\setminus Q}x_t,\quad j\in L\setminus Q,$$

$$\theta_t^{L\setminus Q}=\frac{\varepsilon^{t-1}\theta_1^{L\setminus Q}}{1+\sum_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((l-q)\theta_1^{L\setminus Q}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(q+\frac{p_1}{p_2}k)\theta_1^{K\cup Q})},\quad t=2,\ldots,m;$$

*стратегии индивидуальных игроков совпадают и имеют вид*

$$\tilde{u}_{it}^N=\tilde{v}_{jt}^N=\gamma_t^N x_t,\quad i\in N_1\setminus K,\quad j\in N_2\setminus L,$$

$$\gamma_t^N=\frac{\varepsilon^{t-1}\gamma_1^N}{1+\sum\limits_{j=0}^{t-2}\varepsilon^j((l-q)\theta_1^{L\setminus Q}+(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N+(q+\frac{p_1}{p_2}k)\theta_1^{K\cup Q})},\quad t=2,\ldots,m;$$

*стратегии игроков* $\theta_1^{L\setminus Q}$, $\theta_1^{K\cup Q}$ *и* $\gamma_1^N$ *на последнем шаге определяются из уравнений, аналогичных* (2.9), (2.11)*, с соответствующими гарантированными выигрышами.*

Условия коалиционной внутренней устойчивости (1.11) примут вид

$$\sum_{t=0}^m\delta^t\gamma_t^K\ge\sum_{t=0}^m\delta^t\gamma_t^{L\cup P},\quad \sum_{t=0}^m\delta^t(\gamma_t^K)^2\le\sum_{t=0}^m\delta^t(\gamma_t^{L\cup P})^2,$$

где $\gamma_t^K$ определены в (2.7), $\gamma_t^{L\cup P}$ — в (2.14);

условия коалиционной внешней устойчивости (1.12) —

$$\sum_{t=0}^m\delta^t\theta_t^L\ge\sum_{t=0}^m\delta^t\theta_t^{K\cup Q},\quad \sum_{t=0}^m\delta^t(\theta_t^L)^2\le\sum_{t=0}^m\delta^t(\theta_t^{K\cup Q})^2,$$

где $\theta_t^L$ определены в (2.7), $\theta_t^{K\cup Q}$ — в (2.15).

Рассмотрим первое условие коалиционной внутренней устойчивости, оно примет вид

$$(\gamma_1^K-\gamma_1^{L\cup P})\Big(1+\sum_{j=0}^m\varepsilon^j(n_1+n_2-k-l)\gamma_1^N\Big)+(k-p)\gamma_1^K(\gamma_1^{K\setminus P}-\gamma_1^{L\cup P})+l\gamma_1^{L\cup P}\Big(\frac{p_2}{p_1}\gamma_1^K-\theta_1^L\Big)\ge 0\,.$$

Поскольку $\gamma_t^K$ возрастает по $k$, то нам известно, что $\gamma_1^K\ge\gamma_1^{K\setminus P}$. Для сравнения остальных стратегий игроков при формировании коалиций $K$, $L$ и при переходе игроков из коалиции $K$ в коалицию $L$ исследуем асимптотический случай ($t\to\infty$). Так как в асимптотике игроки вылавливают ровно естественный прирост ресурса, имеем

$$k\gamma_1^K+l\theta_1^L=(k-p)\gamma_1^{K\setminus P}+\Big(l\frac{p_2}{p_1}+p\Big)\gamma_1^{L\cup P}\,. \tag{2.16}$$

Используя возрастание $\gamma_t^K$ по $k$ и тот факт, что $\gamma_1^{L\cup P} = p_1/p_2\,\theta_1^{L\cup P}$, из (2.16) получим следующие условия:

$$p(\gamma_1^K - \gamma_1^{L\cup P}) \ge l(\theta_1^{L\cup P} - \theta_1^L), \quad l(\theta_1^L - \theta_1^{L\cup P}) \ge p(\gamma_1^{L\cup P} - \gamma_1^{K\setminus P})\,.$$

Поскольку $\theta_t^L$ возрастает по $l$, то из этих условий делаем вывод, что

$$\gamma_1^K \ge \gamma_1^{L\cup P}, \quad \gamma_1^{K\setminus P} \ge \gamma_1^{L\cup P}\,.$$

Таким образом, при $p_2/p_1\,\gamma_1^K - \theta_1^L \ge 0$, условие внутренней коалиционной устойчивости выполняется при любых параметрах задачи, а второе условие внутренней коалиционной устойчивости не выполняется.

Теперь рассмотрим первое условие коалиционной внешней устойчивости, оно примет вид

$$(\theta_1^L - \theta_1^{K\cup Q})\Big(1 + \sum_{j=0}^{m} \varepsilon^j (n_1 + n_2 - k - l)\gamma_1^N\Big) + (l - q)\theta_1^L(\theta_1^{L\setminus Q} - \theta_1^{K\cup Q}) + k\theta_1^{K\cup Q}\Big(\frac{p_1}{p_2}\theta_1^L - \gamma_1^K\Big) \ge 0\,.$$

Поскольку $\theta_t^L$ возрастает по $l$, то нам известно, что $\theta_1^L \ge \theta_1^{L\setminus Q}$. Для сравнения остальных стратегий игроков при формировании коалиций $K$, $L$ и при переходе игроков из коалиции $L$ в коалицию $K$ также рассмотрим асимптотический случай ($t \to \infty$). Так как в асимптотике игроки вылавливают ровно естественный прирост ресурса, имеем

$$k\gamma_1^K + l\theta_1^L = (l - q)\theta_1^{L\setminus Q} + \Big(k\frac{p_1}{p_2} + q\Big)\theta_1^{K\cup Q}. \tag{2.17}$$

Используя возрастание $\gamma_t^K$ по $k$ и то, что $\theta_1^{K\cup Q} = p_2/p_1\,\gamma_1^{K\cup Q}$, из (2.17) получим следующие условия:

$$q(\theta_1^L - \theta_1^{K\cup Q}) \ge k(\gamma_1^{K\cup Q} - \gamma_1^K), \quad k(\gamma_1^K - \gamma_1^{K\cup Q}) \ge q(\theta_1^{K\cup Q} - \theta_1^{L\setminus Q})\,.$$

Поскольку $\gamma_t^K$ возрастает по $k$, то из этих условий делаем вывод, что

$$\theta_1^L \ge \gamma_1^{K\cup Q}, \quad \theta_1^{L\setminus Q} \ge \theta_1^{K\cup Q}\,.$$

Таким образом, при $p_1/p_2\,\theta_1^L - \gamma_1^K \ge 0$ условие внешней коалиционной устойчивости выполняется при любых параметрах задачи. При этом же второе условие внешней коалиционной устойчивости не выполняется.

Таким образом, мы получили следующий результат.

**Утверждение 4.** *В асимптотическом случае* ($t \to \infty$) *в задаче* (2.1), (2.2) *нет коалиционно устойчивых коалиций* $(K, L)$.

## Заключение

В работе предложены концепции определения оптимального поведения в многокритериальных динамических играх с асимметричными участниками и формированием коалиционного разбиения. Для построения некооперативного равновесия использована конструкция арбитражной схемы Нэша (произведения Нэша), а для определения кооперативного — арбитражная схема Нэша для всего периода продолжения игры.

Исследован процесс формирования коалиционного разбиения в многокритериальных динамических играх. В предложенной модели формируются две коалиции $K$, $L$ и присутствуют индивидуальные игроки обоих типов в предположении информированности игроков о факте заключения кооперативных соглашений. Таким образом, участники коалиций определяют свои стратегии, используя арбитражную схему Нэша, а индивидуальные игроки выстраивают стратегии как многокритериальное равновесие по Нэшу в динамической игре с $(N_1 \backslash K) \cup (N_2 \backslash L)$ игроками.

Условия внутренней и внешней устойчивости адаптированы для многокритериальных динамических игр. Поскольку эти условия применяются при формировании только одной коалиции, а в представленной модели формируются два соглашения, то должны учитываться стимулы перехода игроков между коалициями. Поэтому в работе введено понятие коалиционной устойчивости, учитывающее возможность перехода множества игроков из одной коалиции в другую.

Исследована динамическая бикритериальная задача управления биоресурсами. Построены стратегии и выигрыши участников при некооперативном, кооперативном (формирование гранд-коалиции) поведении и при формировании двух коалиций.

Получены условия внутренней и внешней устойчивости. Показано, что в данной задаче управления биоресурсами, как и в большинстве эколого-экономических моделей, условия внутренней устойчивости выполняются только для коалиций малой размерности.

Построены условия коалиционной внутренней и внешней устойчивости. Показано, что в асимптотическом случае не существует устойчивых коалиционных разбиений. Следовательно, игрокам выгодно переходить из одной коалиции в другую. Поэтому дальнейшее исследование будет посвящено определению параметров модели, при которых выполняются условия коалиционной устойчивости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shapley L.S.** Equilibrium points in games with vector payoffs // Naval Research Logistic Quarterly. 1959. Vol. 6, no. 1. P. 57–61. doi: 10.1002/nav.3800060107 .
2. **Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M.** Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games // Math. Met. Oper. Res. 2000. Vol. 52, no. 1. P. 65–77. doi: 10.1007/s001860000069 .
3. **Pusillo L., Tijs S.** E-equilibria for multicriteria games // Annals ISDG. 2013. Vol. 12. P. 217–228. doi: 10.1007/978-0-8176-8355-91 .
4. **Rettieva A.N.** Multicriteria dynamic games // International Game Theory Review. 2017. Vol. 19, no. 1. Art.-no. 1750002. doi: 10.1142 /S0219198917500020 .
5. **Rettieva A.N.** Dynamic multicriteria games with finite horizon // Mathematics. 2018. Vol. 6, iss. 9. Art.-no. 156. doi: 10.3390/math6090156 .
6. **Реттиева А.Н.** Формирование коалиций в динамических многокритериальных играх // Математическая теория игр и ее приложения. 2018. Т. 10, вып. 2. С. 40–61. doi: 10.17076/mgta2_4 .
7. **D'Aspremont C. et al.** On the stability of collusive price leadership // Can. J. Econ. 1983. Vol. 16, iss. 1. P. 17–25. doi: 10.2307/134972 .
8. **Carraro C.** The structure of international environmental agreements // FEEM/IPCC/Stanford EMF Conf. “International Environmental Agreements on Climate Change”: Paper Presented. Venice, 1997. P. 309–328.
9. **Rettieva A.** Coalition stability in dynamic multicriteria games // Intern. Conf. on Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019): Mathematical Optimization Theory and Operations Research / eds. M. Khachay, Y. Kochetov, P. Pardalos. Cham: Springer, 2019. P. 697–714. (Lecture Notes in Computer Science; vol. 11548). doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_49 .
10. **Rettieva A.N.** Stable coalition structure in Bioresource management problem // Ecological Modelling. 2012. Vol. 235-236. P. 102–118. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2012.03.015 .
11. **De Zeeuw A.** Dynamic effects on stability of international environmental agreements // J. Environmental Economics and Management. 2008. Vol. 55, iss. 2. P. 163–174. doi: 10.1016/j.jeem.2007.06.003.

Поступила 30.07.2019
После доработки 10.08.2019
Принята к публикации 19.08.2019

Реттиева Анна Николаевна
д-р физ.-мат. наук, доцент

зам. директора по научной работе
Институт прикладных математических исследований —
обособленное подразделение ФГБУН “Карельский научный центр РАН”
г. Петрозаводск;
Школа математики и статистики, Университет Циндао;
Институт прикладной математики Шандонга
г. Циндао, Китай,
e-mail: annaret@krc.karelia.ru

**REFERENCES**

1. Shapley L.S., Rigby F.D. Equilibrium points in games with vector payoffs. *Naval Research Logistic Quarterly*, 1959, vol. 6, no. 1, pp. 57–61. doi: 10.1002/nav.3800060107 .
2. Voorneveld M., Grahn S., Dufwenberg M. Ideal equilibria in noncooperative multicriteria games. *Math. Met. Oper. Res.*, 2000, vol. 52, no. 1, pp. 65–77. doi: 10.1007/s001860000069 .
3. Pusillo L., Tijs S. E-equilibria for multicriteria games. *Annals ISDG*, 2013, vol. 12, pp. 217–228. doi: 10.1007/978-0-8176-8355-91_11 .
4. Rettieva A.N. Equilibria in dynamic multicriteria games. *International Game Theory Review*, 2017, vol. 19, no. 1, art.-no. 1750002. doi: 10.1142 /S0219198917500025 .
5. Rettieva A.N. Dynamic multicriteria games with finite horizon. *Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 9, art.-no. 156. doi: 10.3390/math6090156 .
6. Rettieva A.N. Coalition formation in dynamic multicriteria games. *Automation and Remote Control*, 2019, vol. 80, no. X, pp. 345–357.
7. D’Aspremont C. et al. On the stability of collusive price leadership. *Can. J. Econ.*, 1983, vol. 16, no. 1, pp. 17–25. doi: 10.2307/134972 .
8. Carraro C. The structure of international environmental agreements. In: Paper Presented at the *FEEM/IPCC/Stanford EMF Conference on “International Environmental Agreements on Climate Change”*, Venice, 1997, pp. 309–328.
9. Rettieva A. Coalition stability in dynamic multicriteria games. In: Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. (eds) *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 11548, Cham, Springer, 2019, pp. 697–714. doi: 10.1007/978-3-030-22629-9_49 .
10. Rettieva A.N. Stable Coalition Structure in Bioresource Management Problem. *Ecological Modelling*, 2012, vol. 235-236, pp. 102-118. doi: 10.1016/j.ecolmodel.2012.03.015 .
11. De Zeeuw A. Dynamic effects on stability of International Environmental Agreements. *J. Environmental Economics and Management*, 2008, vol. 55, no. 2, pp. 163–174. doi: 10.1016/j.jeem.2007.06.003 .

Received July 30, 2019
Revised August 10, 2019
Accepted August 19, 2019

**Funding Agency**: This work was supported by the Shandong Province “Double-Hundred Talent Plan” (No. WST2017009).

*Anna Nickolaevna Rettieva,* Dr. Phys.-Math. Sci., School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao 266071, PR China; Institute of Applied Mathematics of Shandong, Qingdao 266071, PR China; Institute of Applied Mathematical Research of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Petrozavodsk, 185910 Russia; e-mail: annaret@krc.karelia.ru .

Cite this article as: A. N. Rettieva. Coalitional stability conditions in multicriteria dynamic games, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 200–216 .