ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

МНОГОКРАТНАЯ ПОИМКА ЗАДАННОГО ЧИСЛА УБЕГАЮЩИХ В ЗАДАЧЕ С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ПРОСТОЙ МАТРИЦЕЙ[1]

Н. Н. Петров, А. Я. Нарманов

В конечномерном евклидовом пространстве рассматривается задача преследования группой преследователей группы убегающих с равными возможностями всех участников, описываемая системой вида

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = a z_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V,$$

где $D^{(\alpha)} f$ — производная по Капуто порядка α функции f. Множество допустимых управлений V — строго выпуклый компакт, a — вещественное число. Целью группы преследователей является поимка не менее q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r различных преследователей, при этом моменты поимки могут не совпадать. Терминальные множества — начало координат. В предположении, что убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, в терминах начальных позиций получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. При исследовании в качестве базового используется метод разрешающих функций, позволяющий получить достаточные условия разрешимости задачи сближения с одним убегающим за некоторое гарантированное время. Для доказательства основного результата используется теорема Холла о системе различных представителей.

Ключевые слова: дифференциальная игра, групповое преследование, многократная поимка, преследователь, убегающий, дробная производная.

N. N. Petrov, A. Ya. Narmanov. Multiple capture of a given number of evaders in a problem with fractional derivatives and a simple matrix.

A problem of pursuing a group of evaders by a group of pursuers with equal capabilities of all the participants is considered in a finite-dimensional Euclidean space. The system is described by the equation

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = a z_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V,$$

where $D^{(\alpha)} f$ is the Caputo fractional derivative of order α of the function f, the set of admissible controls V is strictly convex and compact, and a is a real number. The aim of the group of pursuers is to capture at least q evaders; each evader must be captured by at least r different pursuers, and the capture moments may be different. The terminal sets are the origin. Assuming that the evaders use program strategies and each pursuer captures at most one evader, we obtain sufficient conditions for the solvability of the pursuit problem in terms of the initial positions. Using the method of resolving functions as a basic research tool, we derive sufficient conditions for the solvability of the approach problem with one evader in some guaranteed time. Hall's theorem on a system of distinct representatives is used in the proof of the main theorem.

Keywords: differential game, group pursuit, multiple capture, pursuer, evader, fractional derivative.

MSC: 49N79, 49N70, 91A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-188-199

Введение

Важное направление развития современной теории дифференциальных игр связано с разработкой методов решения игровых задач преследования-уклонения с участием нескольких объектов [1–4], причем кроме углубления классических методов решения, ведется активный

[1]Работа первого автора поддержана РФФИ (проект 18-51-41005), второго автора — грантом MRU-10/17.

поиск новых задач, к которым применимы уже разработанные методы. В частности, в работах [5; 6] рассматривались задачи преследования двух лиц, описываемые уравнениями с дробными производными, где были получены достаточные условия поимки. В недавней статье М. И. Гомоюнова “Экстремальный сдвиг на сопутствующие точки в позиционной дифференциальной игре с дробными производными” (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 11–34) было доказано существование цены игры в нелинейной дифференциальной игре с дробными производными.

Рассматривается линейная задача преследования группой преследователей группы убегающих при условии, что все участники обладают равными возможностями. Задача простого преследования группой преследователей одного убегающего рассматривалась Б. Н. Пшеничным [7], который получил необходимые и достаточные условия поимки. Многократная поимка убегающего в задаче простого группового преследования исследовалась в работе Н. Л. Григоренко [8]. Задача о поимке заданного числа убегающих в задаче простого преследования при условиях, что множество допустимых управлений — шар единичного радиуса с центром в нуле, терминальные множества — начала координат, убегающие используют программные стратегии, а каждый преследователь ловит не более одного убегающего, представлена в [9], где были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования. Общий случай задачи о поимке заданного числа убегающих в случае простого преследования рассматривался в [10]. Задача о многократной поимке убегающего в примере Л. С. Понтрягина представлена в работах [11–13]. Многократная поимка в линейных дифференциальных играх изучена в [14]. Задача о многократной поимке убегающего в дифференциальной игре с дробными производными исследовалась в [15] (здесь также см. более подробный список литературы по представленным задачам). Достаточные условия поимки заданного числа убегающих в стационарном примере Л. С. Понтрягина и линейных рекуррентных дифференциальных играх получены в [16; 17].

В данной работе рассматриваемые ранее отдельно задачи о многократной поимке и поимке заданного числа убегающих объединены в одну задачу. Цель группы преследователей — поимка не менее q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей. В предположении, что убегающие используют программные стратегии, а каждый из преследователей ловит не более одного убегающего, получены достаточные условия разрешимости задачи преследования. Отметим, что в случае простого движения задача в такой постановке изучена в статье [18].

1. Постановка задачи

Определение 1 [19]. Пусть p — натуральное число, $\alpha \in (p-1, p)$, $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ — функция такая, что $f^{(p)}$ — абсолютно непрерывна на $[0, \infty)$. Производной по Капуто порядка α функции f называется функция $D^{(\alpha)} f$ вида

$$\left(D^{(\alpha)} f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{f^{(p)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-p}}\, ds, \quad \text{где} \quad \Gamma(\beta) = \int\limits_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1}\, ds.$$

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра $G(n, m)$ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, \ldots, E_m$. Закон движения каждого из преследователей P_i имеет вид

$$D^{(\alpha)} x_i = a x_i + u_i, \quad x_i(0) = x_i^0, \ldots, x_i^{(p-1)}(0) = x_i^{p-1}, \quad u_i \in V. \tag{1.1}$$

Закон движения каждого из убегающих E_j имеет вид

$$D^{(\alpha)} y_j = a y_j + v_j, \quad y_j(0) = y_j^0, \ldots, y_j^{(p-1)}(0) = y_j^{p-1}, \quad v \in V. \tag{1.2}$$

Здесь $x_i, y_j, u_i, v_j \in \mathbb{R}^k$, V — строго выпуклый компакт $\mathbb{R}^k$, $a \in \mathbb{R}^1$, $i \in I = \{1, \ldots, n\}$, $j \in \{1 \ldots, m\}$. Кроме того, $x_i^0 \neq y_j^0$ для всех i, j.

Вместо систем (1.1), (1.2) рассмотрим систему

$$D^{(\alpha)} z_{ij} = a z_{ij} + u_i - v_j, \quad u_i, v_j \in V, \tag{1.3}$$

с начальными условиями

$$z_{ij}(0) = z_{ij}^0 = x_i^0 - y_j^0, \ \ldots, z_{ij}^{(p-1)}(0) = z_{ij}^{p-1} = x_i^{p-1} - y_j^{p-1}, \tag{1.4}$$

Здесь решение системы (1.3), (1.4) понимается стандартно (см., например, [20, п. 3]).

Цель группы преследователей — осуществить поимку не менее чем q убегающих, причем каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей ($r \geqslant 1, 1 \leqslant q \leqslant m$) при условии, что сначала убегающие выбирают свои управления сразу на $[0, \infty)$, а затем преследователи на основе информации о выборе убегающих выбирают свои управления; кроме того, каждый преследователь может поймать не более одного убегающего. Считаем, что $n \geqslant rq, m \geqslant q$.

Обозначим $z^0 = \{z_{ij}^0, \ldots, z_{ij}^{p-1}, i \in I, j \in J\}$ — вектор начальных позиций. Полагаем, что $z_{ij}^{p-1} \neq 0$ для всех i, j.

Измеримая функция $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}^k$ называется *допустимой*, если $v(t) \in V$ для всех $t \geqslant 0$.

Определение 2. В игре $G(n, m)$ *происходит r-кратная поимка* (*при $r = 1$ поимка*) убегающего E_β, если существует момент $T > 0$, при котором для любого допустимого управления $v_\beta(t), t \in [0, \infty)$, убегающего E_β найдутся допустимые управления $u_i(t)$, $i \in I$, преследователей P_i, $i \in I$, моменты времени $\tau_1, \ldots, \tau_r \in [0, T]$, попарно различные натуральные числа $i_1, \ldots, i_r \in I$, такие что $z_{i_s \beta}(\tau_s) = 0$ для всех $s = 1, \ldots, r$, где $z_{i_s \beta}(t)$ — решения системы (1.3), (1.4).

Определение 3. В игре $G(n, m)$ *происходит r-кратная поимка* (*при $r = 1$ поимка*) *не менее q убегающих*, если существует $T > 0$, при котором для любой совокупности допустимых управлений $v_j(t), t \in [0, \infty), j \in J$, убегающих E_j, $j \in J$, найдутся допустимые управления $u_i(t) = u_i(t, z_{ij}^0, v_j(s), s \in [0, \infty), j \in J)$, $i \in I$, преследователей P_i, $i \in I$, обладающие следующим свойством: существуют множества

$$M \subset J, \ \ |M| = q, \ \ \{N_l, l \in M\}, \ \ N_l \subset I, \ \ |N_l| = r \text{ для всех } l \in M, \ \ N_l \cap N_s = \varnothing \text{ для всех } l \neq s,$$

такие что группа преследователей $\{P_l, l \in N_\beta\}$ не позднее момента T осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β, причем если преследователь P_l ловит убегающего E_β, то остальные убегающие считаются им не пойманными.

Введем следующие обозначения. Пусть K — некоторое конечное подмножество множества натуральных чисел.

$$\Omega_K(s) = \{(i_1, \ldots, i_s) \mid i_1, \ldots, i_s \in K \text{ и попарно различны}\}, \quad D_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{R}^k \mid \|z - a\| < \varepsilon\},$$

$$\lambda(h, v) = \sup\{\lambda \geqslant 0 \mid -\lambda h \in V - v\}, \quad \xi_{ij}(t) = \sum_{l=0}^{p-1} \frac{z_{ij}^l}{\Gamma(l+1)} t^l, \quad \xi_{ij}^1(t) = t^{1-p} \xi_{ij}(t).$$

2. Многократная поимка одного убегающего при $a = 0$

В данном разделе считаем, что $m = 1$. Поэтому второй индекс опускаем.

Лемма 1. *Пусть V — строго выпуклый компакт, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^k, b_i \neq 0$, для всех $i \in I$ и*

$$\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{i \in \Lambda} \lambda(b_i, v) > 0.$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}^k$, таких что $z_i \in D_\varepsilon(b_i)$, $i \in I$, справедливо неравенство $\min\limits_{v \in V} \max\limits_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min\limits_{i \in \Lambda} \lambda(z_i, v) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы 1.3.13 [2] следует, что функция $\lambda(b, v)$ непрерывна на множестве $B \times V$, где B — произвольный компакт $\mathbb{R}^k$, не содержащий нуля. Поэтому непрерывными будут функции

$$g_\Lambda(z_1, \ldots, z_n, v) = \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(z_\alpha, v), \ g(z_1, \ldots, z_n, v) = \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} g_\Lambda(z_1, \ldots, z_n, v),$$
$$f(z_1, \ldots, z_n) = \min_{v \in V} g(z_1, \ldots, z_n, v).$$

Из непрерывности функции f следует справедливость утверждения леммы. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $\{z_l^{p-1} \colon l \in I\}$ таковы, что

$$\delta_0 = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda\bigl(z_l^{p-1}/\Gamma(p), v\bigr) > 0. \tag{2.1}$$

Тогда существует $T_0 > 0$ *такой, что для всех* $t > T_0$ *справедливо неравенство*

$$\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda\bigl(\xi_l^1(t), v\bigr) \geqslant 0.5\delta_0. \tag{2.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данного неравенства следует из леммы 1 и условия $\lim\limits_{t \to +\infty} \xi_i^1(t) = z_i^{p-1}/\Gamma(p)$.

Лемма 2. *Пусть* $a = 0$, $\delta_0 > 0$, *где* δ_0 *введено в* (2.1). *Тогда существует* $T_1 > 0$ *такой, что для любой измеримой функции* $v(\cdot)$, $v(t) \in V$, *найдется множество* $\Lambda \in \Omega_I(r)$ *такое, что для всех* $l \in \Lambda$ *справедливо неравенство*

$$T_1^{1-p} \int\limits_0^{T_1} \frac{(T_1 - s)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda(\xi_l^1(T_1), v(s)) ds \geqslant 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из следствия вытекает, что существует $T_0 > 0$ такой, что для всех $t > T_0$ справедливо неравенство (2.2). Пусть $T > T_0$. Рассмотрим функции ($t \in [0, T]$)

$$h_l(t, T, v(\cdot)) = t^{1-p} \int\limits_0^t \frac{(t - s)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda(\xi_l^1(T), v(s)) \, ds.$$

Тогда

$$\max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} h_l(t, T, v(\cdot)) \geqslant \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} t^{1-p} \int\limits_0^t \frac{(t - s)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(\xi_l^1(T), v(s)) ds. \tag{2.3}$$

Так как для любых неотрицательных чисел $\{a_\Lambda\}_{\Lambda \in \Omega_I(r)}$ справедливо неравенство

$$\max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} a_\Lambda \geqslant \frac{1}{C_n^r} \sum_{\Lambda \in \Omega_I(r)} a_\Lambda,$$

то из (2.3) следует неравенство $\bigl(t \in [0, T]\bigr)$

$$\max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} h_l(t, T, v(\cdot)) \geqslant \frac{t^{1-p}}{C_n^r} \int\limits_0^t \frac{(t - s)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \sum_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(\xi_l^1(T), v(s)) \, ds$$

$$\geqslant \frac{t^{1-p}}{C_n^r} \int\limits_0^t \frac{(t - s)^{\alpha - 1}}{\Gamma(\alpha)} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(\xi_l^1(T), v(s)) \, ds \geqslant \frac{t^{1-p}\delta_0}{2C_n^r\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t (t - s)^{\alpha - 1} \, ds = \frac{t^{\alpha - p + 1}\delta_0}{2\alpha C_n^r \Gamma(\alpha)}.$$

Следовательно,

$$\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda} h_l(T,T,v(\cdot)) \geqslant \frac{T^{\alpha-p+1}\delta_0}{2\alpha C_n^r\Gamma(\alpha)}.$$

Так как $\alpha-p+1>0$, то получаем справедливость утверждения леммы. Лемма доказана.

Определим число

$$\hat{T}=\inf\Big\{t \;\Big|\; \inf_{v(\cdot)}\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda} t^{1-p}\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_l^1(t),v(s))\,ds\geqslant 1\Big\}.$$

В силу леммы 2 число $\hat{T}<\infty$.

Теорема 1. *Пусть $a=0$, $\delta_0>0$, где δ_0 определено в* (2.1)*. Тогда в игре $G(n,1)$ происходит r-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(s), s\in[0,\hat{T}]$, — произвольное управление убегающего. Рассмотрим функцию

$$H(t)=1-\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^t\frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_l^1(\hat{T}),v(s))\,ds.$$

Обозначим через $T_0>0$ первый корень данной функции. Отметим, что T_0 существует в силу леммы 2 и определения $\hat{T}$. Кроме того, существует множество $\Lambda_0\in\Omega_I(r)$ такое, что для всех $j\in\Lambda_0$

$$1-\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{T_0}\frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_j^1(\hat{T}),v(s))\,ds\leqslant 0.$$

Поэтому существуют моменты $\tau_j\leqslant T_0, j\in\Lambda_0$, для которых

$$1-\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{\tau_j}\frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_j^1(\hat{T}),v(s))\,ds=0. \tag{2.4}$$

Для $j\notin\Lambda_0$ обозначим через τ_j — моменты времени, для которых выполнено условие (2.4), если такие моменты существуют. Задаем управления преследователей P_i, $i\in I$, полагая

$$u_i(s)=\begin{cases} v(s)-\lambda(\xi_i^1(\hat{T}),v(s))\xi_i^1(\hat{T}),\;\; s\in[0,\min\{\tau_i,\hat{T}\}],\\ v(s),\;\; s\in[\min\{\tau_i,\hat{T}\},\hat{T}].\end{cases}$$

Тогда решение задачи Коши (1.3), (1.4) представимо в виде [20, формула (19)]

$$z_i(t)=\xi_i(t)+\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(u_i(s)-v(s))\,ds.$$

Отсюда

$$\hat{T}^{1-p}z_i(\hat{T})=\xi_i^1(\hat{T})+\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{\hat{T}}\frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(u_i(s)-v(s))\,ds$$

$$=\xi_i^1(\hat{T})-\hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{\hat{T}}\frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_i^1(\hat{T}),v(s))\xi_i^1(\hat{T})\,ds$$

$$= \xi_i^1(\hat{T})\Big(1 - \hat{T}^{1-p}\int\limits_0^{\tau_i} \frac{(\hat{T}-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(\xi_i^1(\hat{T}), v(s))\,ds\Big) = 0$$

для всех $i \in \Lambda_0$. Следовательно, $z_i(\hat{T}) = 0$ для всех $i \in \Lambda_0$. Теорема доказана.

Пусть далее $\mathrm{Int}A$, $\mathrm{co}A$ — внутренность и выпуклая оболочка множества A соответственно.

Лемма 3 [3, утверждение 1.3]. *Пусть V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_I(n-r+1)} \mathrm{Intco}\{z_j^{p-1}, j \in \Lambda\}. \tag{2.5}$$

Тогда $\delta_0 > 0$ (см. (2.1)).

Теорема 2. *Пусть $a = 0$, V — строго выпуклый компакт с гладкой границей и выполнено условие* (2.5). *Тогда в игре $G(n, 1)$ происходит r-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данной теоремы следует из леммы 3 и теоремы 1.

3. Многократная поимка убегающих при $a < 0$

Обозначим $E_\rho(z,\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{\Gamma(l\rho^{-1}+\mu)}$ — это обобщенная функция Миттаг — Лефлера [21, с. 117],

$$\delta_1 = \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(z_l^0, v). \tag{3.1}$$

Лемма 4. *Пусть $a < 0$, $\alpha \in (0,1)$, $\delta_1 > 0$, где δ_1 введено в* (3.1). *Тогда существует $T_1 > 0$ такой, что для любой функции $v(\cdot)$, $v(t) \in V$ найдется множество $\Lambda \in \Omega_I(r)$ такое, что для всех $l \in \Lambda$ справедливо неравенство*

$$E_{1/\alpha}(aT_1^\alpha, 1) - \int\limits_0^{T_1} (T_1 - s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(T_1-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds \leqslant 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функции

$$h_l(t, v(\cdot)) = E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds.$$

Тогда

$$H(t, v(\cdot)) = \min_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \max_{l \in \Lambda} h_l(t, v(\cdot))$$

$$= E_{1/\alpha}(at^\alpha, 1) - \max_{\Lambda \in \Omega_I(r)} \min_{l \in \Lambda} \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds.$$

Так как $\alpha \in (0,1)$, то из теоремы 4.1.1 [22, с. 101] следует, что $E_{1/\alpha}(z,\mu)$ не имеет отрицательных корней при $\mu \in [\alpha, +\infty)$. Кроме того, $E_{1/\alpha}(z,\mu) \geqslant 0$ для всех $z \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$. Значит

$E_{1/\alpha}(z,\mu)\geqslant 0$ для всех $z\in\mathbb{R}^1$, $\mu\in[\alpha,+\infty)$. Поэтому справедливы неравенства

$$\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha)\lambda(z_l^0,v(s))\,ds$$

$$\geqslant \max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha)\min_{l\in\Lambda}\lambda(z_l^0,v(s))\,ds$$

$$\geqslant \frac{1}{C_n^r}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha)\sum_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}\lambda(z_l^0,v(s))\,ds$$

$$\geqslant \frac{1}{C_n^r}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha)\max_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\min_{l\in\Lambda}\lambda(z_l^0,v(s))\,ds$$

$$\geqslant \frac{\delta_1}{C_n^r}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha)\,ds.$$

В силу [21, гл. 3, формула (1.15)]

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1},\alpha)\,ds = t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1).$$

Поэтому

$$\min_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\max_{l\in\Lambda}h_l(t,v(\cdot))\leqslant E_{1/\alpha}(at^\alpha,1)-\frac{\delta_1}{C_n^r}t^\alpha E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1)=H_0(t).$$

Так как $a<0$, то при $t\to+\infty$ справедливы следующие асимптотические оценки [22, формула (1.2.4)]:

$$E_{1/\alpha}(at^\alpha,1)=-\frac{1}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)}+O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big),\qquad E_{1/\alpha}(at^\alpha,\alpha+1)=-\frac{1}{at^\alpha}+O\Big(\frac{1}{t^{2\alpha}}\Big),$$

где под $O(g)$ при $t\to+\infty$ понимается конкретная функция G такая, что функция G/g является ограниченной на $(A,+\infty)$ при некотором $A>0$. Следовательно,

$$H_0(t)=-\frac{1}{at^\alpha\Gamma(1-\alpha)}+\frac{\delta_1}{aC_n^r}+O\Big(\frac{1}{t^\alpha}\Big).$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to+\infty}H_0(t)=\delta_1/aC_n^r<0$, то существует момент $T_1>0$ такой, что $H_0(T_1)<0$. Поэтому $H(T_1,v(\cdot))<0$. Имеем $h_l(0,v(\cdot))=1$ для всех l, $\min\limits_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\max\limits_{l\in\Lambda}h_l(T_1,v(\cdot))<0$ для любой функции $v(\cdot)$. Лемма доказана.

Определим число

$$\hat{T}=\inf\big\{t>0 \mid \inf_{v(\cdot)}\min_{\Lambda\in\Omega_I(r)}\max_{l\in\Lambda}h_l(t,v(\cdot))\leqslant 0\big\}.$$

В силу леммы 4 имеем $\hat{T}<+\infty$.

Теорема 3. *Пусть $a<0$, $\alpha\in(0,1)$, $\delta_1>0$, где δ_1 определено в (3.1). Тогда в игре $G(n,1)$ происходит r-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего E. Рассмотрим функцию

$$H(t) = E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1) - \max_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \min_{l\in\Lambda} \int\limits_0^t (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds.$$

Обозначим через T_0 первый корень данной функции. Отметим, что T_0 существует в силу леммы 4 и определения $\hat{T}$. Кроме того, существует множество $\Lambda_0 \in \Omega_I(r)$ такое, что для всех $l \in \Lambda_0$

$$E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1) - \int\limits_0^{T_0} (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds \leqslant 0.$$

Поэтому существуют моменты $\tau_l \leqslant T_0$, $l \in \Lambda_0$, для которых

$$E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1) - \int\limits_0^{\tau_l} (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_l^0, v(s))\,ds = 0. \tag{3.2}$$

Для $l \notin \Lambda_0$ обозначим через τ_j моменты времени, для которых выполнено условие (3.2), если такие моменты существуют. Задаем управления преследователей P_i, $i \in I$, полагая

$$u_i(s) = \begin{cases} v(s) - \lambda(z_i^0, v(s))z_i^0, & s \in [0, \min\{\tau_i, \hat{T}\}], \\ v(s), & s \in (\min\{\tau_i, \hat{T}\}, \hat{T}]. \end{cases}$$

Решение задачи Коши (1.3), (1.4) представимо в виде [20, формула (19)]

$$z_i(t) = E_{1/\alpha}(at^{\alpha}, 1)z_i^0 - \int\limits_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(t-s)^{\alpha-1}, \alpha)(u_i(s) - v(s))\,ds.$$

Отсюда, используя (3.2), получаем

$$\begin{aligned} z_i(\hat{T}) &= E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1)z_i^0 - \int\limits_0^{\hat{T}} (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)(u_i(s) - v(s))\,ds \\ &= z_i^0\Big(E_{1/\alpha}(a\hat{T}^{\alpha}, 1) - \int\limits_0^{\tau_i} (\hat{T}-s)^{\alpha-1} E_{1/\alpha}(a(\hat{T}-s)^{\alpha-1}, \alpha)\lambda(z_i^0, v(s))\Big)\,ds = 0 \end{aligned}$$

для всех $i \in \Lambda_0$. Теорема доказана.

Теорема 4 [15, теорема 1]. *Пусть $a < 0$, $\alpha \in (1, 2)$,*

$$\min\{\min_{v\in V} \max_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \min_{l\in\Lambda} \lambda(z_l^1, v),\ \min_{v\in V} \max_{\Lambda\in\Omega_I(r)} \min_{l\in\Lambda} \lambda(-z_l^1, v)\} > 0.$$

Тогда в игре $G(n, 1)$ происходит r-кратная поимка.

4. Многократная поимка заданного числа убегающих

Предположение 1. *Для каждого $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ выполнено следующее условие: для любого множества $N \subset I$, $|N| = n - sr$ найдется множество $M \subset J$, $|M| = q - s$, такое что*

$$\delta_N(\beta) = \min_{v\in V} \max_{\Lambda\in\Omega_N(r)} \min_{l\in\Lambda} \lambda\Big(\frac{z_{l\beta}^{p-1}}{\Gamma(p)}, v\Big) > 0$$

для всех $\beta \in M$.

Теорема 5. *Пусть $a = 0$ и выполнено предположение* 1. *Тогда в игре $G(n, m)$ происходит r-кратная поимка не менее q убегающих.*

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Докажем, что любые $n - sr$ преследователей осуществляют r-кратную поимку не менее чем $q - s$ убегающих, где $s \in \{0, \ldots, q-1\}$. При $s = 0$ получим утверждение теоремы. Доказывать будем методом математической индукции. Пусть $s = q - 1$, $N \subset I$, $|N| = n - (q-1)r$. В силу условия теоремы существует $\beta \in J$ такое, что $\delta_N(\beta) > 0$. Из теоремы 1 следует, что преследователи $P_l, l \in N$, осуществляют r-кратную поимку убегающего E_β.

Предположим, что утверждение доказано для всех $s \geqslant p + 1$. Докажем утверждение для $s = p$. Пусть $N \subset I$, $|N| = n - pr$. Тогда существует множество $M \subset J$, $|M| = q - p$, такое что $\delta_N(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M$.

Пусть $v_j(t)$, $t \in [0, \infty)$, $j \in J$, — совокупность управлений убегающих E_j, $j \in J$. Для каждого $\beta \in M$ определим множества

$$J_\beta = \bigl\{l \in N \bigm| \text{преследователь } P_l \text{ ловит убегающего } E_\beta\bigr\}.$$

В силу теоремы 1 и условия данной теоремы для всех $\beta \in M$ справедливо неравенство $|J_\beta| \geqslant r$. Можно считать, что $M = \{1, \ldots, q-p\}$. Возможны два случая.

1. $\Bigl|\bigcup\limits_{\beta=1}^{l} J_\beta\Bigr| \geqslant lr$ для всех $l = 1, \ldots, q-p$. Тогда по теореме Холла [23, с. 65, теорема 5.1.1] для множеств $\{J_\beta, \beta \in M\}$ существует система различных представителей. Это означает, что существуют множества J'_β, $\beta \in M$, для которых

$$J'_\beta \subset J_\beta, \quad |J'_\beta| = r \text{ для всех } \beta \in M, \quad J'_{\beta_1} \cap J'_{\beta_2} = \varnothing \text{ для всех } \beta_1 \neq \beta_2.$$

Следовательно, каждая группа преследователей $P_l, l \in J'_\beta$, осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β для всех $\beta \in M$. Поэтому группа преследователей P_l, $l \in N$, осуществляет r-кратную поимку не менее $q - p$ убегающих.

2. Существует $l \in \{1, \ldots, q-p\}$, при котором $\Bigl|\bigcup\limits_{\beta=1}^{l}\Bigr| < lr$. Пусть l_0 — наименьшее из натуральных чисел, удовлетворяющих данному неравенству. Отметим, что $l_0 > 1$ и $\Bigl|\bigcup\limits_{\beta=1}^{n_1}\Bigr| \geqslant n_1 r$ для всех $n_1 \in \{1, \ldots, l_0 - 1\}$. Поэтому для множеств J_β, $\beta = 1, \ldots, l_0 - 1$, существует система J'_β различных представителей, такая что

$$J'_\beta \subset J_\beta, \quad |J'_\beta| = r \text{ для всех } \beta = 1, \ldots, l-1, \quad J'_{\beta_1} \cap J'_{\beta_2} = \varnothing \text{ для всех } \beta_1 \neq \beta_2.$$

Следовательно, каждая группа преследователей J'_β осуществляет r-кратную поимку убегающего E_β. Поэтому преследователи $\bigcup\limits_{\beta=1}^{l_0-1} J'_\beta$ осуществляют r-кратную поимку $l_0 - 1$ убегающих. В дальнейшем можно считать, что $J'_\beta = J_\beta$ для всех $\beta = 1, \ldots, l_0 - 1$.

Пусть $s_0 = p + l_0 - 1$. Тогда $s_0 > p$ и $s_0 \leqslant p + q - p - 1 = q - 1$. Рассмотрим множество $N_1 = N \setminus \bigcup\limits_{\beta=1}^{l_0-1} J'_\beta$. Имеем $|N_1| = n - pr - (l_0 - 1)r = n - s_0 r$. В силу условия теоремы по N_1 существует множество M_1, $M_1 \subset J$, $|M_1| = q - s_0$ и такое, что $\delta_{N_1}(\beta) > 0$ для всех $\beta \in M_1$. Отметим, что $\{1, \ldots, l_0 - 1\} \cap M_1 = \varnothing$, ибо если β принадлежит данному пересечению, то существует номер $l \in N_1$, для которого P_l ловит убегающего E_β, где $\beta \in \{1, \ldots, l_0 - 1\}$, что противоречит построению множества N_1. В силу индукционного предположения группа преследователей P_l, $l \in N_1$, осуществляет r-кратную поимку не менее чем $q - s_0$ убегающих. Следовательно, преследователи $P_l, l \in N$, осуществляют r-кратную поимку не менее $q - s_0 + l_0 - 1 = q - p$ убегающих. Что и требовалось доказать.

Теорема 6. *Пусть* $a = 0$, V — *строго выпуклый компакт с гладкой границей и для каждого* $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ *выполнено следующее условие*: *для любого множества* $N \subset I, |N| = n - sr$, *найдется множество* $M \subset J$, $|M| = q - s$, *такое что*

$$0 \in \bigcap_{\Lambda \in \Omega_N(n-r+1)} \mathrm{Intco}\{z_{l\beta}^{p-1}, l \in \Lambda\} \ \text{для} \ \ \text{всех} \ \beta \in M.$$

Тогда в игре $G(n, m)$ *происходит* r*-кратная поимка не менее* q *убегающих.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость данной теоремы следует из леммы 3 и теоремы 5.

Теорема 7. *Пусть* $a < 0$, $\alpha \in (0, 1)$ *и выполнено предположение* 1. *Тогда в игре* $G(n, m)$ *происходит* r*-кратная поимка не менее* q *убегающих.*

Д о к а з а т е л ь с т в о данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 5 с использованием теоремы 3.

Теорема 8. *Пусть* $a < 0$, $\alpha \in (1, 2)$ *и для каждого* $s \in \{0, \ldots, q-1\}$ *выполнено следующее условие: для любого множества* $N \subset I$, $|N| = n - sr$ *найдется множество* $M \subset J$, $|M| = q - s$, *такое что*

$$\delta_N(\beta) = \min\{\min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(z_{l\beta}^1, v), \min_{v \in V} \max_{\Lambda \in \Omega_N(r)} \min_{l \in \Lambda} \lambda(-z_{l\beta}^1, v)\} > 0$$

для всех $\beta \in M$. *Тогда в игре* $G(n, m)$ *происходит* r*-кратная поимка не менее* q *убегающих.*

Д о к а з а т е л ь с т в о данной теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 5 с использованием теоремы 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Чикрий А.А.** Конфликтно управлямые процессы. Киев: Наук. думка, 1992. 384 с.
3. **Григоренко Н.Л.** Математические методы управления несколькими динамическими процессами. М.: Изд-во МГУ, 1990. 197 с.
4. **Благодатских А.И., Петров Н.Н.** Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 2009. 266 с.
5. **Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.** Динамические задачи сближения для уравнений дробного порядка// Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 11. С. 1566–1583.
6. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Игровые задачи для линейных систем дробного порядка// Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 3. С. 262–278.
7. **Пшеничный Б.Н.** Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. 1976. № 3. С. 145–146.
8. **Григоренко Н.Л.** Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестн. МГУ. Сер. вычислит. математика и кибернетика. 1983. № 1. С. 41–47.
9. **Петров Н.Н., Прокопенко В.А.** Об одной задаче преследования группы убегающих //Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 724–726.
10. **Сахаров Д.В.** О двух дифференциальных играх простого группового преследования // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. № 1. С. 50–59.
11. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикл. математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 1. С. 54–59.
12. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в примере Л. С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 747–754.
13. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** Многократная поимка в рекуррентном примере Л. С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 128–135.

14. **Благодатских А.И.** Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикл. математика и механика. 2013. Т. 77, вып. 3. С. 433–440.
15. **Петров Н.Н.** Многократная поимка в одной задаче группового преследования с дробными производными // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 156–164.
16. **Петров Н.Н., Соловьева Н.А.** К задаче группового преследования в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2016. Т. 132. С. 81–85.
17. **Петров Н.Н.** Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. 1996. №. 6. С. 48–54.
18. **Петров Н.Н., Нарманов А.Я.** Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования// Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2018. Т. 28, вып. 2. С. 193–198.
19. **Caputo M.** Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II // Geophys. R. Astr. Soc. 1967. No. 13. P. 529–539.
20. **Чикрий А.А., Матичин И.И.** Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка// Доповiдi Нацiональноi академii наук Украiни. 2007. № 1. С. 50–55.
21. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.
22. **Попов А.Ю., Седлецкий А.М.** Распределение корней функции Миттаг — Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3–171.
23. **Холл М.** Комбинаторика. М.: Мир. 1970. 424 с.

Поступила 6.05.2019
После доработки 19.06.2019
Принята к публикации 24.06.2019

Петров Николай Никандрович
д-р физ.-мат. наук, профессор
директор
Институт математики, информационных технологий и физики,
Удмуртский государственный университет, г. Ижевск
e-mail: kma3@list.ru

Нарманов Абдигаппар Якубович
д-р физ.-мат. наук, профессор
профессор кафедры геометрии
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, г. Ташкент
e-mail: narmanov@yandex.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Chikrii A.A. *Conflict-controlled processes.* Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997, 424 p. doi: 10.1007/978-94-017-1135-7 . Original Russian text published in Chikrii A.A. *Konfliktno upravlyamye protsessy.* Kiev: Nauk. dumka, 1992, 384 p.
3. Grigorenko N.L. *Matematicheskie metody upravleniya neskol'kimi dinamicheskimi protsessami* [Mathematical methods for control of several dynamic processes]. Moscow: Mosk. Gos. Univ. Publ., 1990, 197 p.
4. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. *Konfliktnoe vzaimodeistvie grupp upravlyaemykh ob'ektov* [Conflict interaction of groups of controlled objects]. Izhevsk; Udmurt State University Publ., 2009, 266 p. ISBN: 978-5-904524-17-3 .
5. Eidel'man S.D., Chikrii A.A. Dynamic game problems of approach for fractional-order equations. *Ukrainian Math. J.*, 2000, vol. 52, no. 11, pp. 1787–1806. doi: 10.1023/A:1010439422856 .
6. Chikrii A.A., Matichin I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2010, vol. 268, suppl. 1, pp. 54–70. doi: 10.1134/S0081543810050056 .

7. Pshenichnyi B.N. Simple pursuit by several objects. *Kibernetika*, 1976, no 3, pp. 145–146 (in Russian).
8. Grigorenko N.L. Simple pursuit evasion game with a group of pursuers and one evsder. *Vestnik Moskov. Univ. Ser XV Vychisl. Matematika i Kibernetika,* 1983, no. 1, pp. 41–47 (in Russian).
9. Petrov N.N., Prokopenko V.A. On a problem of the pursuit of a group of evaders. *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 725–726 (in Russian).
10. Sakharov D.V. On two differential games of simple group pursuit. *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki,* 2012, no. 1, pp. 50–59 (in Russian).
11. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem. *J. Appl. Math. Mech.*, 2009, vol. 73, no. 1, pp. 36–40. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2009.03.010 .
12. Petrov N.N. Multiple capture in Pontryagin's example with phase constraints. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 725–732. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00095-6 .
13. Petrov N. N., Solov'eva N.A. Multiple capture in Pontryagin's recurrent example. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 5, pp. 855–861. doi: 10.1134/S0005117916050088 .
14. Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process. *J. Appl. Math. Mech.*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 314–320. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2013.09.007 .
15. Petrov N.N. Multiple capture in a group pursuit problem with fractional derivatives *Proc. Steklov Institute Math.*, 2019, vol. 305, suppl. 1, pp. 150–157. doi: 10.1134/S0081543819040151 .
16. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of group pursuit in linear recurrent differential games. *J. Math. Sci.*, 2018, vol. 230, no. 5, pp. 732–736. doi: 10.1007/s10958-018-3779-z .
17. Petrov N. N. On a Group Pursuit Problem. *Autom. Remote Control,* 1996, vol. 56, no. 6, pp. 808–813.
18. Petrov N.N., Narmanov A.Ya. Multiple capture of a given number of evaders in the problem of a simple pursuit. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2018, vol. 28, no. 2, pp. 193–198 (in Russian). doi: 10.20537/vm180205 .
19. Caputo M. Linear model of dissipation whose q is almost frequency independent-II. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. doi: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x .
20. Chikrii A.A., Matichin I.I. An analog of the Cauchy formula for linear systems of arbitrary fractional order. *Dokl. NAN Ukrainy*, 2007, no. 1, pp. 50–55.
21. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* [Integral transforms and representations of functions in the complex domain]. Moscow: Nauka Publ., 1966, 671 p.
22. Popov A. Yu., Sedletskii A.M. Distribution of roots of Mittag-Leffler functions. *J. Math. Sci.*, 2013, vol. 190, no. 2, pp. 209–409. doi: 10.1007/s10958-013-1255-3 .
23. Hall M. *Combinatorial theory.* N Y: John Wiley & Sons, 1967, 440 p. ISBN: 0-471-31518-4 . Translated to Russian under the title *Kombinatorika.* Moscow: Mir Publ., 1970, 424 p.

Received May 6, 2019
Revised June 19, 2019
Accepted June 24, 2019

Funding Agency: The research of the first and second authors was supported by the Russian Federation for Basic Research (project no. 18-51-41005) and by Grant MRU-10-17 (Uzbekistan), respectively.

Nikolai Nikandrovich Petrov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: kma3@list.ru .

Abdigappar Yakubovich Narmanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., National University of Uzbekistan, Tashkent, 100174 Uzbekistan, e-mail: narmanov@yandex.ru .

Cite this article as: N. N. Petrov, A. Ya. Narmanov. Multiple capture of a given number of evaders in a problem with fractional derivatives and a simple matrix, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 188–199 .