

УДК 517.977

**СТРУКТУРА МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ МАШИНЫ
ДУБИНСА СО СТРОГО ОДНОСТОРОННИМ ПОВОРОТОМ****В. С. Пацко, А. А. Федотов**

Исследуется структура трехмерного множества достижимости *в момент* для нелинейной управляемой системы, которую часто называют *машина Дубинса*. Управляемый объект движется на плоскости с постоянной по величине линейной скоростью и ограниченным радиусом поворота. Изучается случай, когда поворот возможен только в одну сторону, причем движение по прямой исключено в силу заданных ограничений на управление. С использованием принципа максимума Понтрягина получены варианты управлений, ведущих на границу множества достижимости. Рассматриваются сечения трехмерного множества достижимости по угловой координате. Дано аналитическое описание границ таких сечений в виде набора гладких дуг. Перечисляются все возможные варианты структуры сечений. Каждая дуга определяется некоторым типом кусочно-постоянного управления, удовлетворяющего принципу максимума. Доказывается строгая выпуклость сечений по угловой координате. Проведен анализ гладкости границы таких сечений.

Ключевые слова: машина Дубинса, строго односторонний поворот, структура трехмерного множества достижимости, принцип максимума Понтрягина, кусочно-постоянные управления, строгая выпуклость сечений множества достижимости по угловой координате.

V. S. Patsko, A. A. Fedotov. The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn.

We study the structure of a three-dimensional reachable set “at instant” of the nonlinear control system often called the “Dubins car.” A controlled vehicle moves in the plane with constant speed and bounded turning radius. We consider the case where the object can turn to one side only and the rectilinear motion is forbidden by given control constraints. Based on the Pontryagin maximum principle, we obtain variants of controls leading to the boundary of the reachable set. Sections of the three-dimensional reachable set along the angular coordinate are considered. The boundaries of such sections are described analytically in the form of sets of smooth arcs. The paper lists all possible options for the structure of the sections. Each arc is defined by a certain type of piecewise constant control satisfying the maximum principle. The strict convexity of the sections along the angular coordinate is proved, and the smoothness of the boundary of the sections is analyzed.

Keywords: Dubins car, strictly one-sided turn, structure of a three-dimensional reachable set, Pontryagin maximum principle, piecewise constant control, strict convexity of sections of a reachable set along the angular coordinate.

MSC: 93C15, 93B03, 49J15

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-171-187

1. Введение и постановка задачи

Статья посвящена исследованию множества достижимости *в момент* для модели управляемого движения, называемой *машина Дубинса* [1; 2]. Движение на плоскости осуществляется с постоянной по величине линейной скоростью. Скалярное управление определяет текущую угловую скорость вращения вектора линейной скорости или, что эквивалентно, мгновенный радиус поворота. Допустимые значения управляющего воздействия принадлежат замкнутому отрезку.

Для машины Дубинса *множеством достижимости* $G(t_f)$ *в момент* t_f назовем совокупность всех точек *трехмерного* фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в момент t_f из заданного начального фазового состояния при помощи допустимого управления.

Некоторые факты, связанные с построением множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f для случая, когда возможны как левый, так и правый повороты, изложены в статьях [3; 4].

Структура множеств достижимости $G(t_f)$ для случая, когда поворот возможен только в одну сторону, но при этом допускается движение по прямой, описана в [5].

В данной статье мы изучаем множества $G(t_f)$ для случая, когда поворот возможен только в одну сторону *с запретом движения по прямой*. А именно предполагаем, что скалярное управление u принадлежит отрезку $[u_1, u_2]$, где $0 < u_1 < u_2$. Содержательные задачи с динамикой машины Дубинса для случая строго одностороннего поворота исследованы в работе [6].

Главная цель статьи — показать, что в рассматриваемом случае сечения множества достижимости по угловой координате являются *строго выпуклыми*. Дается детальное описание структуры границы таких сечений. Используется принцип максимума Понтрягина [7].

Статья представляет собой существенное расширение работы [9]. Уточнено описание границы сечений множеств достижимости по угловой координате, улучшено формальное обоснование строгой выпуклости невырожденных сечений.

Динамика управляемого объекта (машина Дубинса) на плоскости x, y описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [u_1, u_2], \quad 0 < u_1 < u_2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x, y — координаты геометрического положения на плоскости; φ — угол направления вектора скорости, отсчитываемый от оси x против часовой стрелки; u — скалярное управление. Величина линейной скорости постоянна и равна единице. Далее предполагаем, что $u_2 = 1$. Значение u_1 является параметром задачи.

К представлению (1.1) с $u_2 = 1$ может быть приведена произвольная управляемая система третьего порядка, описывающая движение с постоянной по величине линейной скоростью и заданным диапазоном угловой скорости поворота. Для этого требуется масштабирование по геометрическим координатам и по времени. Без ограничения общности в начальный момент времени $t_0 = 0$ полагаем начальное фазовое состояние нулевым: $x_0 = 0, y_0 = 0, \varphi_0 = 0$.

В качестве допустимых управлений $u(\cdot)$ рассматриваются измеримые функции времени со значениями $u(t)$ из отрезка $[u_1, u_2]$. Предполагаем, что угловая координата φ принимает значения в полуинтервале $[0, \infty)$.

2. Принцип максимума Понтрягина и типы экстремальных управлений

Известно [8], что управления, которые приводят систему на границу множества достижимости $G(t_f)$ в момент t_f , удовлетворяют принципу максимума Понтрягина (ПМП). Обозначим переменные сопряженной системы через ψ_1, ψ_2, ψ_3 . Учитывая динамику системы (1.1), получаем [3], что вдоль движения в силу управления $u^*(\cdot)$, ведущего на границу, соответствующие функции $\psi_1^*(\cdot)$ и $\psi_2^*(\cdot)$ являются константами, а условие максимума записывается в виде

$$\psi_3^*(t)u^*(t) = \max_{u \in [u_1, u_2]} \psi_3^*(t)u \quad \text{п.в. } t \in [t_0, t_f].$$

Если $\psi_1^* = 0$ и $\psi_2^* = 0$, то $\psi_3^*(t) = \text{const} \neq 0$ на всем промежутке $[t_0, t_f]$. В этом случае управление $u^*(\cdot)$ является постоянным и принимает значение u_1 , либо u_2 .

Пусть по крайней мере одно из чисел ψ_1^*, ψ_2^* не равно нулю. Тогда справедливо следующее выражение для $\psi_3^*(t)$:

$$\psi_3^*(t) = \psi_1^* y^*(t) - \psi_2^* x^*(t) + C, \quad C = \text{const}.$$

Получаем, что соотношение $\psi_1^* y - \psi_2^* x + C = 0$ определяет прямую переключения, на которой происходит смена управления $u^*(t)$ с одного крайнего значения на другое.

Таким образом, в случае строго одностороннего поворота движения, удовлетворяющие ПМП, в проекции на плоскость x, y формируются из движений по дугам окружностей радиусом $1/u_1$ и $1/u_2$ в силу управлений u_1 и u_2 . На каждом таком участке управление можно считать постоянным. Поэтому при анализе управлений, удовлетворяющих ПМП, можем ограничиться кусочно-постоянными управлениями (предполагаем непрерывность справа в точках разрыва).

На рис.1 приведен вариант движения на плоскости x, y в силу управления, удовлетворяющего ПМП, а также показана соответствующая ему прямая переключения. С ростом t движение по дугам окружностей осуществляется против часовой стрелки.

Участки движения, которые *начинаются* и *заканчиваются* на прямой переключения и проходят в полуплоскости $\psi_1^*y - \psi_2^*x + C \leq 0$, имеют одинаковую продолжительность. Обозначим ее через T_{u_1} . Одинаковую продолжительность имеют также промежуточные участки, проходящие в полуплоскости $\psi_1^*y - \psi_2^*x + C \geq 0$. Обозначим такую продолжительность через T_{u_2} . Подчеркнем, что прямая переключения, а стало быть, и промежуточные участки продолжительностью T_{u_1} и T_{u_2} связаны с конкретным движением. Для другого движения, удовлетворяющего ПМП, они будут другими. Промежуточные участки с управлениями u_1 и u_2 чередуются и стыкуются друг с другом на прямой переключения (рис.1). Движение по любым двум таким *соседним* дугам дает приращение угловой координаты φ , равное 2π , т.е. $T_{u_1} \cdot u_1 + T_{u_2} \cdot u_2 = 2\pi$. По постановке задачи $u_2 = 1$. Поэтому

$$T_{u_1} \cdot u_1 + T_{u_2} = 2\pi. \quad (2.1)$$

Поскольку $u_1 < 1$, то время $T_{u_1} + T_{u_2}$, необходимое для выполнения одной “петли”, превышает 2π . Следовательно, на промежутке $[t_0, t_f]$ любое управление, ведущее на границу множества достижимости, либо не имеет переключений, либо число переключений конечно.

Рассмотрим движение системы (1.1) на участке времени $[t_0, t_f]$ ($t_0 = 0, t_f > 0$) с нулевым начальным фазовым состоянием. Возможные значения $\varphi(t_f)$ координаты φ в момент t_f находятся в промежутке $[t_f \cdot u_1, t_f]$. Наименьшее и наибольшее значения φ реализуются на управлениях $u(t) \equiv u_1$ и $u(t) \equiv u_2 = 1$, не имеющих переключений. Соответствующие φ -сечения множества $G(t_f)$ представляют собой точки на плоскости x, y :

$$\left(\frac{\sin(t_f \cdot u_i)}{u_i}, \frac{-\cos(t_f \cdot u_i)}{u_i} \right)^T, \quad i = 1, 2.$$

В дальнейшем считаем, что $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$. Движения, приходящие на границу такого φ -сечения, удовлетворяют ПМП и должны иметь не менее одного переключения (не менее двух участков с постоянным управлением). Используем это для классификации управлений и соответствующих точек на границе сечения. В итоге установим структуру φ -сечений.

Введем обозначения. Символом t_1 (соответственно, t_2) обозначим продолжительность первого (последнего) примыкающего к моменту t_0 (t_f) участка с постоянным управлением (рис.1).

Движения с управлениями, удовлетворяющими ПМП, со значением u_1 на первом участке (движение на плоскости x, y по дуге большой окружности) и со значением u_2 на последнем участке (движение по дуге малой окружности) отнесем к семейству “BS”. Аналогично определим типы управлений SB, BB, SS с парами управлений $(u_2, u_1), (u_1, u_1), (u_2, u_2)$ на первом и

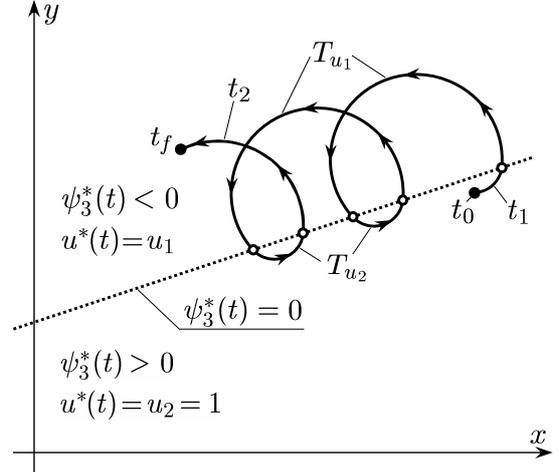


Рис. 1. Траектория, удовлетворяющая ПМП, и соответствующая ей прямая переключения

последнем участках постоянства управления. Любое управление, удовлетворяющее ПМП, принадлежит одному и только одному из четырех оговоренных типов. Траектория, приведенная в качестве примера на рис. 1, порождена управлением типа SB.

3. Граница φ -сечений в случае $\varphi < 2\pi$

Данный случай охватывает вариант из статьи авторов “Множество достижимости в момент для машины Дубинса в случае одностороннего поворота” (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2018, Т. 24, № 1, С. 143–155), где были исследованы φ -сечения для случая $t_f < 2\pi$. Диапазон возможных значений параметра u_1 в постановке задачи данной статьи задан в виде $0 < u_1 < u_2 = 1$. Из условия $t_f < 2\pi$ следует выполнение неравенства $\varphi < 2\pi$. Обратное, очевидно, не всегда выполнено. Покажем, что полученные в указанной статье результаты справедливы и для случая $\varphi < 2\pi$. Кратко об этом говорилось в [9].

В первую очередь отметим, что при $\varphi < 2\pi$ управления, удовлетворяющие ПМП, имеют не более двух переключений. Иначе в силу соотношения (2.1) получили бы $\varphi > 2\pi$.

1) Рассмотрим движение с одним переключением управления u . Пусть на первом участке управление равно $u_2 = 1$, а на втором совпадает с u_1 (тип SB). Справедливы соотношения

$$\varphi = t_1 + t_2 \cdot u_1, \quad t_f = t_1 + t_2.$$

Отсюда получаем, что при фиксированных значениях u_1, t_f, φ величины t_1, t_2 , а стало быть и момент переключения, определяются однозначно. Таким образом, в любом φ -сечении множества $G(t_f)$ рассматриваемому порядку управлений u_2, u_1 соответствует одна точка.

Аналогично для последовательности управлений u_1, u_2 (тип BS) получаем координаты точки в исследуемом φ -сечении множества $G(t_f)$.

2) Рассмотрим вариант с двумя переключениями и последовательностью управлений u_2, u_1, u_2 (тип SS). Продолжительности соответствующих участков постоянства управления есть t_1, T_{u_1}, t_2 . Имеем

$$\varphi = t_1 + T_{u_1} \cdot u_1 + t_2, \quad t_f = t_1 + T_{u_1} + t_2.$$

Отсюда вытекает $T_{u_1} = \frac{t_f - \varphi}{1 - u_1}$, $t_1 + t_2 = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{1 - u_1}$. Следовательно, длительность среднего участка и суммарная длительность первого и последнего участков в рассматриваемом случае — постоянные величины. Полученное семейство допустимых управлений является однопараметрическим. В качестве параметра возьмем величину t_1 с интервалом возможных значений $t_1 \in (0, \mathcal{T}_S)$, где $\mathcal{T}_S = (\varphi - t_f \cdot u_1) / (1 - u_1)$.

Соответствующие точки $(x_{SS}[t_1], y_{SS}[t_1])^\top$ φ -сечения множества $G(t_f)$ в результате интегрирования уравнений (1.1) (при оговоренных промежутках постоянства управления) и тригонометрических преобразований имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{SS}[t_1] \\ y_{SS}[t_1] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin t_1 \\ 1 - \cos t_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin(t_1 + T_{u_1} \cdot u_1) - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos(t_1 + T_{u_1} \cdot u_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \varphi - \sin(t_1 + T_{u_1} \cdot u_1) \\ \cos(t_1 + T_{u_1} \cdot u_1) - \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \sin \left(\frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(t_1 + \frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right) \\ \sin \left(t_1 + \frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad t_1 \in (0, \mathcal{T}_S). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Такие точки образуют дугу окружности на плоскости x, y с центром в точке

$$\begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

и радиусом

$$2\left(\frac{1}{u_1} - 1\right)\left(\frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2}\right). \quad (3.3)$$

Угол раствора дуги (3.1) определяется диапазоном изменения величины t_1 и равен \mathcal{T}_s .

3) Рассмотрим второй вариант с двумя переключениями и последовательностью управлений u_1, u_2, u_1 (тип ВВ). Продолжительность соответствующих участков постоянства управления есть t_1, T_{u_2}, t_2 . По аналогии с предыдущим вариантом имеем

$$\varphi = t_1 \cdot u_1 + T_{u_2} + t_2 \cdot u_1, \quad t_f = t_1 + T_{u_2} + t_2.$$

Отсюда вытекает $T_{u_2} = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{1 - u_1}$, $t_1 + t_2 = \frac{t_f - \varphi}{1 - u_1}$.

Соответствующие точки $(x_{\text{ВВ}}[t_1], y_{\text{ВВ}}[t_1])^T$ φ -сечения множества $G(t_f)$ в результате интегрирования уравнений (1.1) (при оговоренных промежутках постоянства управления) и тригонометрических преобразований имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{\text{ВВ}}[t_1] \\ y_{\text{ВВ}}[t_1] \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin(t_1 \cdot u_1) \\ 1 - \cos(t_1 \cdot u_1) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \sin(t_1 \cdot u_1 + T_{u_2}) - \sin(t_1 \cdot u_1) \\ \cos(t_1 \cdot u_1) - \cos(t_1 \cdot u_1 + T_{u_2}) \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi - \sin(t_1 \cdot u_1 + T_{u_2}) \\ \cos(t_1 \cdot u_1 + T_{u_2}) - \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} - 2\left(\frac{1}{u_1} - 1\right) \sin\left(\frac{T_{u_2}}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(t_1 \cdot u_1 + \frac{T_{u_2}}{2}\right) \\ \sin\left(t_1 \cdot u_1 + \frac{T_{u_2}}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad t_1 \in (0, \mathcal{T}_B), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\mathcal{T}_B = (t_f - \varphi)/(1 - u_1)$. Это тоже дуга окружности с центром в точке

$$\frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

и радиусом

$$2\left(\frac{1}{u_1} - 1\right) \sin\left(\frac{T_{u_2}}{2}\right). \quad (3.6)$$

Угол раствора дуги (3.4) равен $\mathcal{T}_B \cdot u_1$.

Теорема 1. Пусть $\varphi < 2\pi$. Тогда φ -сечение множества достижимости $G(t_f)$ представляет собой строго выпуклое множество на плоскости x, y . Его граница составлена из двух дуг окружностей с центрами в точках (3.2), (3.5) и радиусами (3.3), (3.6) соответственно.

Доказательство. Нетрудно установить, что дуги (3.1) и (3.4) совпадают в предельных точках. А именно

$$\begin{pmatrix} x_{\text{SS}}[0] \\ y_{\text{SS}}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{ВВ}}[\mathcal{T}_B] \\ y_{\text{ВВ}}[\mathcal{T}_B] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{\text{SS}}[\mathcal{T}_s] \\ y_{\text{SS}}[\mathcal{T}_s] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\text{ВВ}}[0] \\ y_{\text{ВВ}}[0] \end{pmatrix}.$$

Предельные точки соответствуют рассмотренному в п. 1) этого раздела управлению с одним переключением.

Анализируя возможные варианты движения системы (1.1), удовлетворяющие ПМП, получаем совокупность положений на плоскости x, y в виде замкнутой кривой, образуемой двумя дугами окружностей, состыкованными в предельных точках.

Рассмотрим перемещение по дуге (3.1), определяемое параметром t_1 . При увеличении параметра от 0 до \mathcal{T}_s перемещение сопровождается поворотом касательного вектора против часовой

стрелки. Перемещение по дуге (3.4) при увеличении параметра t_1 от 0 до \mathcal{T}_B также дает поворот против часовой стрелки. Сумма углов раствора дуг (3.1) и (3.4) определяется следующим образом:

$$\frac{u_1(t_f - \varphi)}{1 - u_1} + \frac{(\varphi - t_f \cdot u_1)}{1 - u_1} = \varphi.$$

Множество, ограниченное дугами (3.1) и (3.4), представляет собой пересечение двух кругов. Поскольку по предположению $\varphi < 2\pi$, оно является строго выпуклым. \square

4. Экстремальные управления в случае $\varphi \geq 2\pi$

4.1. Свойства управлений типа SB и BS

Управления типа SB и BS имеют схожее (в прямом времени t для SB и обратном времени $t_f - t$ для BS) представление с четным числом (одинаковым для SB и BS) промежуточных участков постоянного управления.

А. Рассмотрим управления типа SB (рис. 1).

1) В этом случае продолжительности участков постоянного управления удовлетворяют соотношениям

$$0 < t_1 \leq T_{u_2} < 2\pi, \quad 0 < t_2 \leq T_{u_1} < \frac{2\pi}{u_1}. \quad (4.1)$$

При зафиксированных значениях u_1, t_f, φ имеем

$$\varphi = t_1 + n(T_{u_1} \cdot u_1 + T_{u_2}) + t_2 \cdot u_1, \quad (4.2)$$

$$t_f = t_1 + n(T_{u_1} + T_{u_2}) + t_2. \quad (4.3)$$

Здесь $n = \text{const} \geq 0$ — количество петель для управления типа SB на промежутке $[0, t_f]$ при оговоренном значении φ в момент t_f . Число n определяется *однозначно* по формуле

$$n = \begin{cases} \frac{\varphi}{2\pi} - 1, & \text{если } \varphi \text{ кратно } 2\pi, \\ \left[\frac{\varphi}{2\pi} \right], & \text{если } \varphi \text{ не кратно } 2\pi. \end{cases} \quad (4.4)$$

Квадратные скобки означают целую часть.

Из соотношений (2.1), (4.2) получаем линейную зависимость между параметрами t_1 и t_2 для управлений типа SB:

$$t_1 + t_2 \cdot u_1 = \varphi - 2\pi n. \quad (4.5)$$

В силу (4.1) имеем

$$0 < t_1 \leq \frac{t_1 + nT_{u_2}}{n+1} \leq T_{u_2}, \quad 0 < t_2 \leq \frac{t_2 + nT_{u_1}}{n+1} \leq T_{u_1}. \quad (4.6)$$

Из (4.2), (4.3) находим

$$\frac{t_1 + nT_{u_2}}{n+1} = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{(n+1)(1-u_1)}, \quad \frac{t_2 + nT_{u_1}}{n+1} = \frac{t_f - \varphi}{(n+1)(1-u_1)}. \quad (4.7)$$

Обозначим

$$t_1^* = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{(n+1)(1-u_1)}, \quad t_2^* = \frac{t_f - \varphi}{(n+1)(1-u_1)}. \quad (4.8)$$

Неравенства (4.6) с учетом (4.7), (4.8) влекут

$$0 < t_1 \leq t_1^* \leq T_{u_2}, \quad 0 < t_2 \leq t_2^* \leq T_{u_1}. \quad (4.9)$$

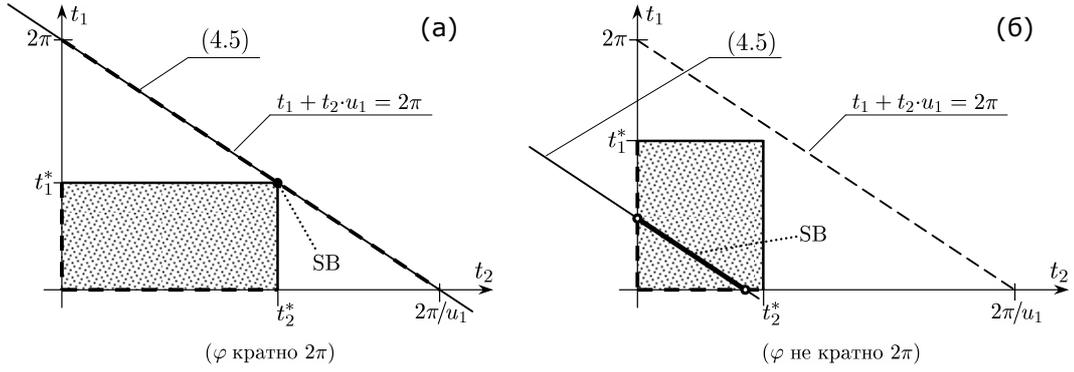


Рис. 2. Допустимые параметры управлений типа SB

Данные неравенства определяют семейство управлений типа SB в виде отрезка прямой (4.5), пересекающей прямоугольник $(0, t_1^*] \times (0, t_2^*]$ на плоскости t_1, t_2 (рис. 2).

2) Рассмотрим случай, когда φ кратно 2π , т.е. $\varphi = 2\pi k$, где k — такое натуральное число, что $t_f \cdot u_1 < 2\pi k < t_f$. Имеем $n = k - 1$. Из (4.5) тогда следует $t_1 + t_2 \cdot u_1 = 2\pi$. Кроме того, из (4.8) вытекает $t_1^* + t_2^* \cdot u_1 = 2\pi$. С учетом (4.9) получаем $t_1 = t_1^*, t_2 = t_2^*$, что означает единственность управления типа SB. В этом случае прямая (4.5) на плоскости t_1, t_2 проходит через точку (t_1^*, t_2^*) и совпадает с прямой $t_1 + t_2 \cdot u_1 = 2\pi$, как показано на рис. 2а (вырожденное пересечение с прямоугольником $(0, t_1^*] \times (0, t_2^*]$).

Управление типа BS также задается единственным образом при $t_1 = t_2^*, t_2 = t_1^*$.

3) Пусть теперь $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π . В силу (4.4) имеем $n > 0$ (n однозначно определяется по φ). Взяв соотношения (4.8), получим $0 < t_1^* + t_2^* \cdot u_1 < 2\pi$. Это означает, что прямоугольник $(0, t_1^*] \times (0, t_2^*]$ на плоскости t_1, t_2 находится в открытой полосе $0 < t_1 + t_2 \cdot u_1 < 2\pi$ (рис. 2б).

Предположим, что возможен случай, когда $t_1 + t_2 \cdot u_1 = t_1^* + t_2^* \cdot u_1$. Из (4.2) получаем, что φ кратно 2π . Это противоречит сделанному предположению о выборе φ . С учетом (4.9) имеем $0 < t_1 + t_2 \cdot u_1 < t_1^* + t_2^* \cdot u_1$.

Таким образом, при заданных условиях ($\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π) существует семейство управлений типа SB, каждое из которых задается при помощи параметра t_1 , принимающего значения в невырожденном (с ненулевой длиной) отрезке.

На основе равенств (4.7) и обозначений (4.8) запишем соотношения, определяющие значения величин T_{u_2} и T_{u_1} для управлений типа SB через t_1 и t_2 соответственно:

$$T_{u_2} = \frac{t_1^*(n+1) - t_1}{n}, \quad T_{u_1} = \frac{t_2^*(n+1) - t_2}{n}.$$

Интегрируя систему (1.1), найдем геометрическое положение на плоскости x, y в момент t_f :

$$\begin{pmatrix} x_{SB}[t_1] \\ y_{SB}[t_1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t_1 \\ 1 - \cos t_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + n \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \begin{pmatrix} \sin(t_1 - T_{u_2}) - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos(t_1 - T_{u_2}) \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Возможные значения параметра t_1 определяются пересечением прямой (4.5) с прямоугольником $(0, t_1^*] \times (0, t_2^*]$. Соответствующую кривую на плоскости x, y назовем дугой SB. На рис. 2б показан один из вариантов пересечения. Для него обе предельные точки не входят в дугу SB.

Рассмотрим касательный вектор к дуге SB в виде производной по t_1 :

$$(n+1) \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) \begin{pmatrix} \cos(t_1 - T_{u_2}) - \cos t_1 \\ \sin(t_1 - T_{u_2}) - \sin t_1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Последний сомножитель можно представить в виде

$$2 \sin\left(\frac{T_{u_2}}{2}\right) \begin{pmatrix} \sin\left(t_1 \frac{2n+1}{2n} - t_1^* \frac{n+1}{2n}\right) \\ \cos\left(t_1 \frac{2n+1}{2n} - t_1^* \frac{n+1}{2n}\right) \end{pmatrix}.$$

Получаем, что перемещение по дуге SB с ростом параметра t_1 осуществляется с постоянной угловой скоростью $(2n+1)/(2n)$ против часовой стрелки.

Б. Для дуг BS справедливы аналогичные формулы. В частности, перемещение на плоскости x, y по дуге BS при увеличении параметра t_1 осуществляется с постоянной угловой скоростью $u_1(2n+1)/(2n)$ против часовой стрелки. При этом диапазон возможных значений t_1 больше в $1/u_1$ раз. Таким образом, угол поворота касательного вектора на дугах SB и BS является одинаковым.

4.2. Свойства управлений типа SS и BB

Для управлений типа SS (BB) между первым и последним участками имеется нечетное число промежуточных участков с постоянным управлением. Описываем их как целый набор петель и один примыкающий промежуточный участок с управлением u_1 (u_2) продолжительностью T_{u_1} (T_{u_2}).

А. Рассмотрим управления типа SS.

1) В этом случае продолжительности участков постоянного управления удовлетворяют соотношениям

$$0 < t_1 \leq T_{u_2} < 2\pi, \quad 0 < t_2 \leq T_{u_2} < 2\pi, \quad 0 < T_{u_1} < \frac{2\pi}{u_1}. \quad (4.12)$$

При зафиксированных значениях u_1, t_f, φ, n имеем

$$\varphi = t_1 + n(T_{u_1} \cdot u_1 + T_{u_2}) + T_{u_1} \cdot u_1 + t_2, \quad t_f = t_1 + n(T_{u_1} + T_{u_2}) + T_{u_1} + t_2.$$

Отсюда с учетом (2.1) делаем вывод, что величины T_{u_1}, T_{u_2} и $t_1 + t_2$ являются константами для управлений типа SS, а именно

$$T_{u_1} = \frac{t_f - \varphi}{(n+1)(1-u_1)}, \quad T_{u_2} = 2\pi - \frac{(t_f - \varphi) \cdot u_1}{(n+1)(1-u_1)}, \quad (4.13)$$

$$t_1 + t_2 = \varphi + T_{u_2} - 2\pi(n+1). \quad (4.14)$$

Соотношения (4.13), (4.14) и неравенства (4.12) определяют совокупность всех управлений типа SS с оговоренным числом петель, равным n .

Предположим, что такая совокупность существует. Определяемые управлениями типа SS точки $(x_{SS}[n, t_1], y_{SS}[n, t_1])^T$ в φ -сечении множества $G(t_f)$ находим, интегрируя систему (1.1):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{SS}[n, t_1] \\ y_{SS}[n, t_1] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \begin{pmatrix} \sin(t_1 + T_{u_1} \cdot u_1) - \sin t_1 \\ \cos t_1 - \cos(t_1 + T_{u_1} \cdot u_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + 2 \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \sin\left(\frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(t_1 + \frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2}\right) \\ \sin\left(t_1 + \frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для получаемой на плоскости x, y однопараметрической кривой возможные значения параметра t_1 определяются пересечением прямой (4.14) с квадратом $(0, T_{u_2}] \times (0, T_{u_2}]$ на плоскости t_1, t_2 (рис. 3).

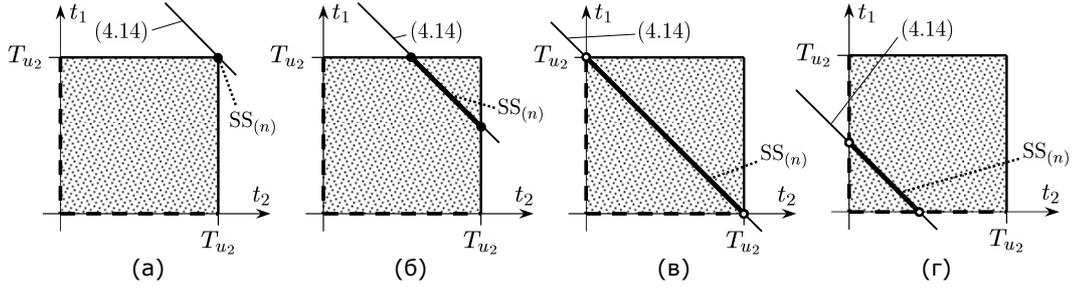


Рис. 3. Допустимые параметры управлений типа SS

2) В вырожденном случае, когда $t_1 = t_2 = T_{u_2}$ (рис. 3а), кривая (4.15) на плоскости x, y состоит из одной точки.

3) В невырожденном случае (рис. 3б,в,г) кривая (4.15) на плоскости x, y есть дуга окружности, обозначим ее через $SS_{(n)}$. Центр окружности расположен в точке $\begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}$, а радиус равен

$$2 \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \sin \left(\frac{T_{u_1} \cdot u_1}{2} \right).$$

Перемещение по дуге $SS_{(n)}$ идет равномерно по t_1 с поворотом касательного вектора против часовой стрелки на угол, равный приращению параметра t_1 . Если $0 < \varphi - 2\pi(n+1) < T_{u_2}$ (рис. 3б), то дуга $SS_{(n)}$ включает в себя обе крайние точки. Если же $\varphi = 2\pi(n+1)$ (рис. 3в) или $-T_{u_2} < \varphi - 2\pi(n+1) < 0$ (рис. 3г), то предельные точки дуги $SS_{(n)}$, соответствующие значениям $t_1 = 0$ и $t_2 = 0$, не принадлежат дуге.

Таким образом, любая невырожденная дуга $SS_{(n)}$ либо имеет две предельные точки, ей принадлежащие, либо обе предельные точки не принадлежат данной дуге. В первом случае дуга $SS_{(n)}$ задается отрезком $[\varphi - 2\pi(n+1), T_{u_2}]$ по параметру t_1 . Во втором случае дуга $SS_{(n)}$ задается интервалом $(0, \varphi + T_{u_2} - 2\pi n)$ по параметру t_1 .

4) Возможно, что при некоторых u_1, t_f и $\varphi \in (t_f \cdot u_1, t_f)$ не существует чисел $n = 0, 1, 2, \dots$, для которых выполнены равенства (4.13), (4.14). Установим, что если для фиксированной тройки u_1, t_f, φ хотя бы одно n существует (будем называть его *допустимым*), то количество таких значений n не превышает двух. При этом если есть два значения, n_1 и n_2 , то они отличаются не более чем на единицу.

Для доказательства перепишем выражение (4.14):

$$\varphi = (t_1 + t_2 - T_{u_2}) + 2\pi(n+1). \quad (4.16)$$

Видно, что диапазон, где могут лежать допустимые значения n , задается интервалом значений первого слагаемого. Учитывая соотношения (4.12), получим

$$-2\pi < -T_{u_2} < t_1 + t_2 - T_{u_2} = \varphi - 2\pi(n+1) \leq T_{u_2} < 2\pi. \quad (4.17)$$

Поскольку величина $t_1 + t_2 - T_{u_2} = \varphi - 2\pi(n+1)$ изменяется по n с шагом 2π , а диапазон ее значений принадлежит интервалу $(-2\pi, 2\pi)$, то из (4.17) следует сформулированное выше свойство допустимых значений n для управлений типа SS.

Из (4.12) имеем $\varphi - 2\pi(n+1) \in (-T_{u_2}, T_{u_2}]$, $T_{u_2} > 0$. График функции $n \rightarrow T_{u_2}$ при непрерывной зависимости от n показан на рис. 4а. Частично графики функций

$$n \rightarrow \varphi - 2\pi(n+1), \quad n \rightarrow T_{u_2}, \quad n \rightarrow -T_{u_2}$$

совместно изображены на остальных фрагментах рис. 4. Видно, что либо искомого числа n не существует, т. е. нет допустимых управлений типа SS (рис. 4г), либо есть одно допустимое

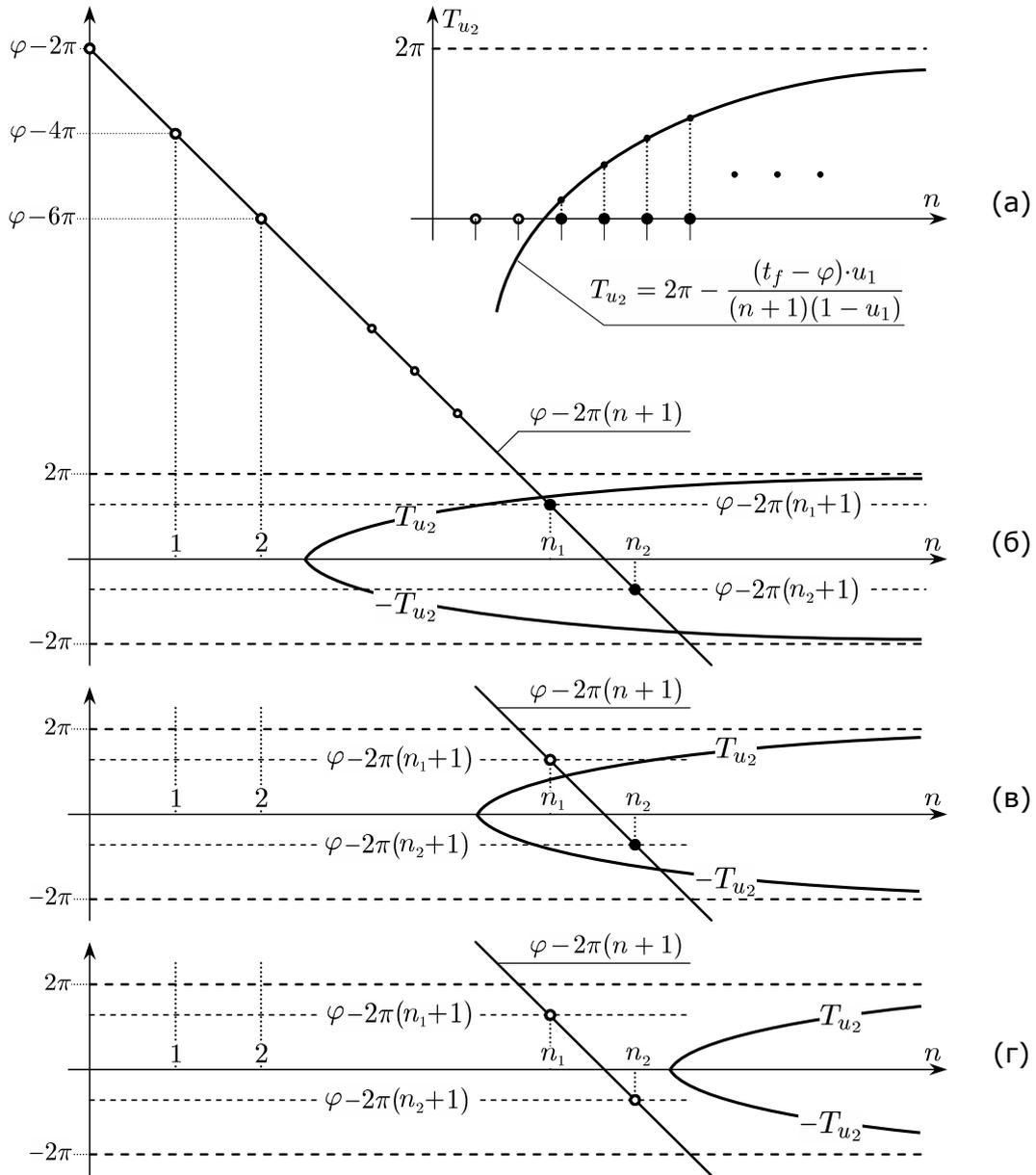


Рис. 4. Допустимые значения n для управлений типа SS

значение n (рис. 4в), либо существуют два допустимых значения n_1 и n_2 (рис. 4б). В последнем случае $|n_1 - n_2| = 1$.

Каждому допустимому значению n соответствует в силу (4.15) на плоскости x, y дуга $SS_{(n)}$ (возможно, вырождающаяся в точку). Из условия $\varphi - 2\pi(n + 1) = T_{u_2}$ вырожденного случая (рис. 3а) следует, что только одна из двух дуг типа SS может вырождаться в точку. Если φ не кратно 2π , то число n может принимать лишь следующие два значения (рис. 4):

$$n_1 = \left[\frac{\varphi}{2\pi} \right] - 1, \quad n_2 = \left[\frac{\varphi}{2\pi} \right].$$

Б. Аналогичные свойства справедливы и для управлений типа ВВ. Величины $T_{u_1}, T_{u_2}, t_1 + t_2$ определяются формулами

$$T_{u_1} = \frac{1}{u_1} \left(2\pi - \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{(n + 1)(1 - u_1)} \right), \quad T_{u_2} = \frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{(n + 1)(1 - u_1)}, \quad (4.18)$$

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{u_1} (\varphi - 2\pi(n + 1)) + T_{u_1}. \quad (4.19)$$

Данные соотношения с учетом неравенств

$$0 < t_1 \leq T_{u_1} < \frac{2\pi}{u_1}, \quad 0 < t_2 \leq T_{u_1} < \frac{2\pi}{u_1}, \quad 0 < T_{u_2} < 2\pi$$

задают совокупность управлений, формирующих дугу $ВВ_{(n)}$ на плоскости x, y . В невырожденном случае точки $(x_{ВВ}[n, t_1], y_{ВВ}[n, t_1])^T$ этой дуги рассчитываются по формуле

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{ВВ}[n, t_1] \\ y_{ВВ}[n, t_1] \end{pmatrix} &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \begin{pmatrix} \sin(t_1 \cdot u_1) - \sin(t_1 \cdot u_1 + T_{u_2}) \\ \cos(t_1 \cdot u_1 + T_{u_2}) - \cos(t_1 \cdot u_1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} - 2 \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \sin\left(\frac{T_{u_2}}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos\left(t_1 \cdot u_1 + \frac{T_{u_2}}{2}\right) \\ \sin\left(t_1 \cdot u_1 + \frac{T_{u_2}}{2}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Возможные значения параметра t_1 определяются пересечением прямой (4.19) с квадратом $(0, T_{u_1}] \times (0, T_{u_1}]$ на плоскости t_1, t_2 . Получаемая кривая также представляет собой дугу окружности. Центр окружности расположен в точке $\frac{1}{u_1} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}$, а радиус равен

$$2 \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \sin\left(\frac{T_{u_2}}{2}\right).$$

5. Граница φ -сечений в случае, когда φ кратно 2π

В случае $\varphi < 2\pi$ (см. разд. 3) каждое φ -сечение является выпуклым и его граница складывается из двух дуг окружностей. При стремящемся снизу к 2π значению φ центры окружностей переходят в начало координат, а их радиусы стремятся к одному и тому же числу

$$2 \left(\frac{1-u_1}{u_1} \right) \sin\left(\frac{2\pi - t_f \cdot u_1}{2(1-u_1)}\right).$$

Таким образом, если $\varphi = 2\pi$, то φ -сечение есть круг указанного радиуса. Данное свойство обобщается на случай, когда φ кратно 2π .

Если φ кратно 2π (т.е. $\varphi = 2\pi k$ при некотором натуральном k), число петель n для управлений типа SS определяется однозначно в силу соотношений (4.16), (4.17) и равно $k - 1$. Аналогично для управлений типа $ВВ$ получаем $n = k - 1$. Граница φ -сечения определяется дугами $SS_{(n)}$ и $ВВ_{(n)}$. Предельные точки соответствуют управлениям типа SB и BS . Дуги $SS_{(n)}$ и $ВВ_{(n)}$ лежат на одной и той же окружности с центром в начале координат и радиусом

$$2 \left(\frac{k(1-u_1)}{u_1} \right) \sin\left(\frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{2k(1-u_1)}\right). \quad (5.1)$$

Дуги стыкуются на краях и имеют суммарный угол раствора, равный 2π .

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть φ кратно 2π . Тогда φ -сечение множества достижимости $G(t_f)$ представляет собой круг на плоскости x, y с центром в начале координат и радиусом (5.1).

6. Граница φ -сечений в случае, когда $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π

Теорема 3. Пусть $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π . Тогда φ -сечение множества достижимости $G(t_f)$ является строго выпуклым множеством с гладкой границей на плоскости x, y . Возможные варианты дуг, составляющих границу, указаны на рис. 5 под номерами 1–9.

Доказательство. А. Опишем возможные варианты структуры φ -сечений. Воспользуемся установленными свойствами движений, удовлетворяющих ПМП. В подразд. 4.1 для случая $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π было показано, что при любых фиксированных t_f и φ управления типа SB порождают невырожденную гладкую однопараметрическую дугу (4.10). Аналогичное свойство справедливо и для управлений типа BS.

Возьмем за основу дугу SB. Задаем ее при помощи однопараметрического набора точек $\{(t_1, t_2)\}$, определяемых пересечением прямой (4.5) с прямоугольником (4.9). Невырожденность пересечения (а, стало быть, и невырожденность дуги SB) определяется условием $0 < \varphi - 2\pi n < t_1^* + t_2^* \cdot u_1$. Будем различать девять возможных вариантов невырожденного пересечения:

1. $\varphi - 2\pi n < t_1^*$, $\varphi - 2\pi n < t_2^* \cdot u_1$;
2. $\varphi - 2\pi n > t_1^*$, $\varphi - 2\pi n > t_2^* \cdot u_1$;
3. $\varphi - 2\pi n < t_1^*$, $\varphi - 2\pi n > t_2^* \cdot u_1$;
4. $\varphi - 2\pi n > t_1^*$, $\varphi - 2\pi n < t_2^* \cdot u_1$;
5. $\varphi - 2\pi n = t_1^*$, $\varphi - 2\pi n > t_2^* \cdot u_1$;
6. $\varphi - 2\pi n = t_1^*$, $\varphi - 2\pi n < t_2^* \cdot u_1$;
7. $\varphi - 2\pi n < t_1^*$, $\varphi - 2\pi n = t_2^* \cdot u_1$;
8. $\varphi - 2\pi n > t_1^*$, $\varphi - 2\pi n = t_2^* \cdot u_1$;
9. $\varphi - 2\pi n = t_1^*$, $\varphi - 2\pi n = t_2^* \cdot u_1$.

Число n в записи вариантов рассчитывается по формуле (4.4) (выписанной для дуг SB).

1) Рассмотрим вариант 1. Предположим, что существуют значения t_f и φ ($\varphi > 2\pi$, φ не кратно 2π), соответствующие этому варианту. Дуга SB задается диапазоном значений параметра t_1 от 0 до $\varphi - 2\pi n$ (рис. 2б). Предельными точками дуги при $t_1 \rightarrow 0$ и $t_1 \rightarrow \varphi - 2\pi n$ являются точки, порожденные управлениями типа BB и SS соответственно. Данные точки являются крайними для невырожденных дуг $BB_{(n)}$ и $SS_{(n)}$ (вариант 1 на рис. 5):

$$\begin{pmatrix} x_{SB}[0] \\ y_{SB}[0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{BB}[n, T_{u_1}] \\ y_{BB}[n, T_{u_1}] \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{SB}[\varphi - 2\pi n] \\ y_{SB}[\varphi - 2\pi n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{SS}[n, \varphi - 2\pi n] \\ y_{SS}[n, \varphi - 2\pi n] \end{pmatrix}.$$

Здесь значение T_{u_1} для дуги $BB_{(n)}$ рассчитывается по формуле (4.18).

Дуга BS также существует и обладает аналогичными свойствами.

Заключаем, что полученная совокупность дуг SB, $SS_{(n)}$, BS, $BB_{(n)}$ образует замкнутую кривую. При обходе ее против часовой стрелки параметр t_1 возрастает на каждом из рассмотренных участков. Стыковка дуг в сопридельных точках является гладкой. Возьмем для примера пару дуг SB и $SS_{(n)}$. В сопридельной для них точке на плоскости x, y имеем

$$\begin{pmatrix} x_{SS}[n, 0] \\ y_{SS}[n, 0] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} + \frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \begin{pmatrix} -\sin T_{u_2} \\ 1 - \cos T_{u_2} \end{pmatrix}.$$

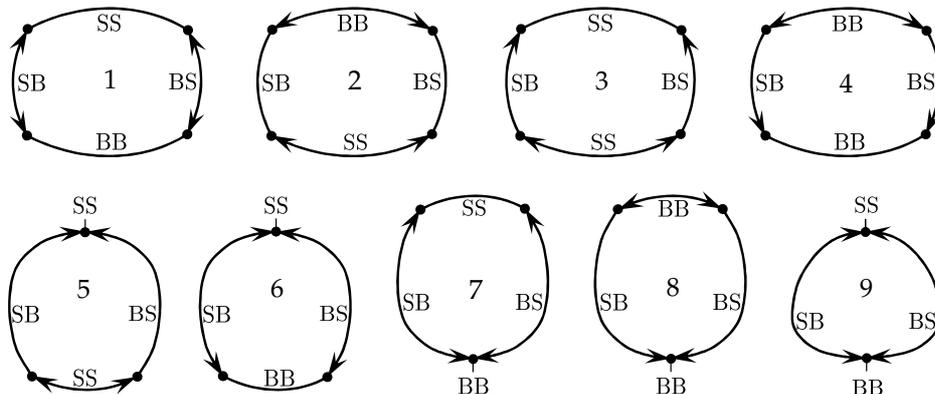


Рис. 5. Варианты φ -сечений множества достижимости в случае, когда $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π

Здесь значение T_{u_2} для дуги $SS_{(n)}$ рассчитывается по формуле (4.18). С использованием (4.15), (4.10) получаем одинаковое значение касательного вектора в такой точке, равное

$$\frac{(n+1)(1-u_1)}{u_1} \begin{pmatrix} \cos T_{u_2} - 1 \\ -\sin T_{u_2} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что построенная кривая на плоскости x, y является границей φ -сечения множества $G(t_f)$. Для этого убедимся, что кроме рассмотренных, нет других движений, удовлетворяющих ПМП. Как нами установлено в подразд. 4.1, все управления типа SB (BS) были использованы при построении дуг SB (BS). Остается рассмотреть лишь дуги $SS_{(n)}$ и $BB_{(n)}$, для которых имеет место неоднозначность с выбором числа n (для исключения наличия двух дуг одного типа с разными n). В подразд. 4.2 было показано, что для любой невырожденной дуги SS или BB предельные точки совпадают с предельными точками дуг SB и BS. Поэтому заключаем, что общее количество дуг типа SS и BB не может быть больше двух. Стало быть, граница φ -сечения множества $G(t_f)$ содержится в построенной кривой.

Обход участков построенной кривой с ростом параметра t_1 сопровождается (как было отмечено ранее) монотонным увеличением угла направления касательного вектора с поворотом против часовой стрелки. Гладкость стыковки дуг позволяет рассчитать суммарный угол поворота через сумму интегралов от угловой скорости поворота касательного вектора на составляющих дугах SB, $SS_{(n)}$, BS, $BB_{(n)}$.

Для касательного вектора дуги SB (приведен в подразд. 4.1) угол поворота равен

$$(\varphi - 2\pi n) \left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

Такой же угол поворота реализуется для дуги BS. С использованием материала подразд. 4.2 могут быть получены углы поворота касательного вектора на дугах $SS_{(n)}$ и $BB_{(n)}$. Расчет осуществляется по формуле $\frac{1}{n} \left(\frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{1 - u_1} - (\varphi - 2\pi n) \right) - (\varphi - 2\pi n)$ для дуги $SS_{(n)}$ и по формуле $\left(2\pi - \frac{1}{n} \left(\frac{\varphi - t_f \cdot u_1}{1 - u_1} \right) \right) - (\varphi - 2\pi n)$ для дуги $BB_{(n)}$. Складывая указанные углы, убеждаемся, что суммарный угол поворота касательного вектора при обходе границы сечения равен 2π .

Отсюда делаем вывод, что построенная кривая не имеет самопересечений и однозначно задает границу φ -сечения, которое является строго выпуклым множеством.

Таким образом, установлена гладкость границы и строгая выпуклость φ -сечений для варианта 1.

2) Другие варианты 2–9 в предположении о существовании t_f и φ , их реализующих, рассматриваются аналогично. Сохраняются свойства строгой выпуклости и однозначности управления, ведущего в точку на границе φ -сечения. Исходя из непрерывности касательной к дуге SB (BS) при изменении параметра t_1 (см. (4.11)), получаем гладкость стыковки дуг SB и BS при вырождении дуг SS и/или BB (рис. 5). В целом имеем гладкость границы получаемых φ -сечений. Дуга $SS_{(n)}$ вырождается в точку при условии $t_1^* = \varphi - 2\pi n$, а дуга $BB_{(n)}$ вырождается в точку при условии $t_2^* \cdot u_1 = \varphi - 2\pi n$.

Варианты 2–4 имеют границу φ -сечения, складывающуюся из четырех невырожденных дуг, отличающихся от варианта 1 составом и последовательностью дуг. Для вариантов 5–8 одна из дуг (типа SS или BB) вырождается в точку. Для варианта 9 вырождаются две дуги типа SS и BB.

Формально варианты 1–9 списка (6.1) логически полностью охватывают случай, когда $\varphi > 2\pi$ и φ не кратно 2π . Однако в силу сложности записи вариантов (6.1) неочевидным является вопрос их реализуемости при каких-либо значениях t_f и φ . Число вариантов в списке (6.1) и на рис. 5 совпадает. Каждому варианту списка (6.1) (при условии его реализуемости) поставлен в соответствие вариант на рис. 5, при этом задействованы все варианты рис. 5.

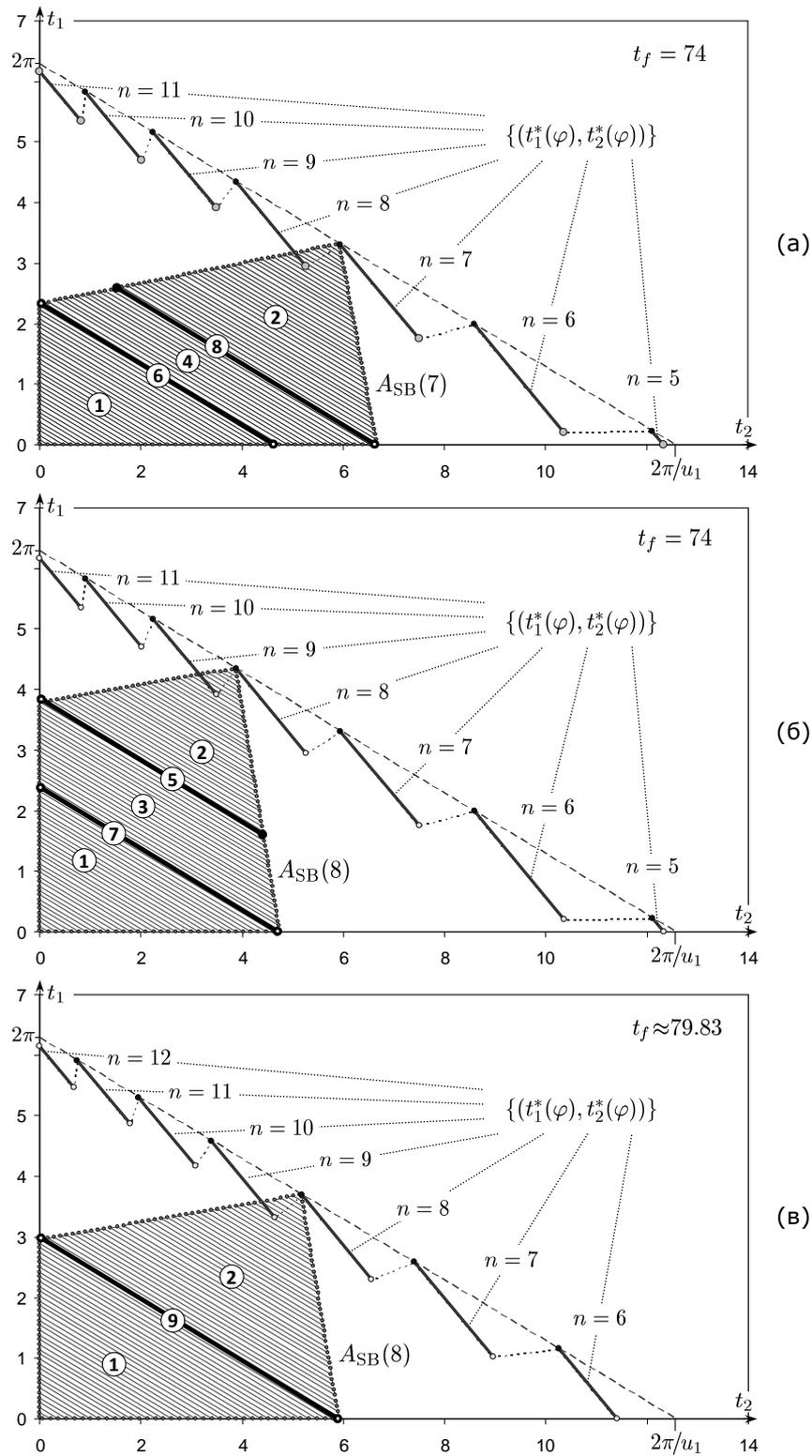


Рис. 6. Четырехугольник $A_{SB}(n)$ — совокупность параметров t_1, t_2 для управлений, ведущих на дугу SB в момент t_f

Очевидно, что если для некоторых t_f и φ реализуется какой-то вариант на рис. 5, то он является единственным. В итоге заключаем, что из реализуемости вариантов 1–9 на рис. 5 вытекает реализуемость соответствующих вариантов списка (6.1).

Б. Покажем, что для любого из вариантов 1–9 на рис. 5 можно указать значения $t_f > 2\pi$,

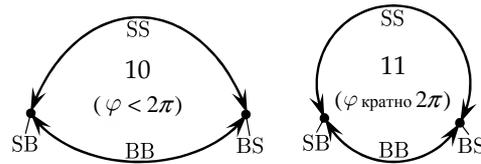


Рис. 7. Варианты φ -сечений множества достижимости в случаях, когда $\varphi < 2\pi$ и φ кратно 2π

$\varphi > 2\pi$ (не кратное 2π) и n (рассчитываемое по формуле (4.4)), для которых реализуется такой вариант φ -сечения.

На рис. 6 приведены типичные графики значений $t_1^*(\varphi)$ и $t_2^*(\varphi)$, заданных параметрически по φ посредством соотношений (4.8) для допустимых значений $\varphi \in [t_f \cdot u_1, t_f]$. Получаемая совокупность пар $\{(t_1^*(\varphi), t_2^*(\varphi))\}$ представляет собой набор отрезков на плоскости t_1, t_2 . Каждый отрезок соответствует одному из допустимых значений n , определяемому по формуле (4.4). Отрезки примыкают к прямой $t_1 + t_2 \cdot u_1 = 2\pi$ (отмечена пунктирной линией), за исключением последнего отрезка, отвечающего наибольшему значению n .

Зафиксируем значение n и выделим отрезок точек $\{(t_1^*(\varphi), t_2^*(\varphi))\}$, ему соответствующий. С произвольной точкой на нем связан прямоугольник (4.9), показанный на рис. 2. Пересечение прямоугольника с прямой (4.5) дает отрезок (точку для случая, когда φ кратно 2π , см. рис. 2а). Меняя точку $(t_1^*(\varphi), t_2^*(\varphi))$ при данном значении n , получаем совокупность отрезков, параллельных прямой $t_1 + t_2 \cdot u_1 = 2\pi$. Эта совокупность дает заштрихованный четырехугольник $A_{SB}(n)$ на плоскости t_1, t_2 . Цифрами показаны варианты пересечения прямоугольника (4.9) с прямой (4.5), соответствующие девяти вариантам на рис. 5.

Построения на рис. 6а,б сделаны для одного и того же момента времени $t_f = 74$. Отличие между рисунками состоит в том, что на рис. 6а четырехугольник $A_{SB}(n)$ построен для $n = 7$, а на рис. 6б — для $n = 8$. На рис. 6в построения сделаны для $t_f \approx 79.83$, а четырехугольник $A_{SB}(n)$ отвечает $n = 8$. Видно, что в каждом из трех четырехугольников $A_{SB}(n)$ есть зоны, соответствующие φ -сечениям вариантов 1 и 2. Случай с набором зон для вариантов 1, 9, 2 приведен на рис. 6в. Он определяется условием $t_f = 2\pi \left(\frac{1 + u_1}{u_1} \right) \left(\frac{n^2 + n}{2n + 1} \right)$. При замене знака “=” в этой формуле на “<” получим набор зон для вариантов 1, 6, 4, 8, 2 (см. пример на рис. 6а). Аналогично при замене знака “=” на “>” получим набор зон для вариантов 1, 7, 3, 5, 2, как показано на рис. 6б.

Таким образом, каждый вариант на рис. 5 (стало быть, и каждый вариант списка (6.1)) реализуется при некотором выборе значений t_f и φ . \square

З а м е ч а н и е 1. На рис. 7 показан вид φ -сечений для случая, когда $\varphi < 2\pi$ (вариант 10) и для случая, когда φ кратно 2π (вариант 11). В этих случаях вырожденными являются дуги SB и BS. Реализуемость вариантов 10, 11 была установлена в разд. 3 и 5.

З а м е ч а н и е 2. В задаче со строго односторонним поворотом ПМП является не только необходимым, но и достаточным условием перевода системы (1.1) на границу множества достижимости $G(t_f)$ в классе кусочно-постоянных управлений. Для каждой точки на границе соответствующее управление единственно.

Заключение

Исследовано множество достижимости в момент для машины Дубинса со строго односторонним поворотом и одноточечным начальным фазовым состоянием. Строго односторонний поворот означает, что промежуток допустимых угловых скоростей представляет собой отрезок $[u_1, u_2]$ с $u_1 > 0$. Множество достижимости рассматривается в трехмерном фазовом пространстве x, y, φ , где x, y — координаты геометрического положения, а φ — угол направления вектора скорости, принимающий значения в полуинтервале $[0, \infty)$.

В целом трехмерное множество достижимости выпуклым не является. Доказано, однако, что его двумерные φ -сечения суть строго выпуклые множества на плоскости x, y . Описана структура границы φ -сечений.

В исследуемой задаче принцип максимума Понтрягина является достаточным условием перевода на границу множества достижимости. Более того, в каждую точку на границе ведет единственное кусочно-постоянное управление, удовлетворяющее принципу максимума.

Авторы благодарят Л.В. Камневу и рецензента за внимание к работе и полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Dubins L.E.** On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents // *American J. Math.* 1957. Vol. 79, no. 3. P. 497–516. doi: 10.2307/2372560.
2. **Laumond J.-P. (ed.)** Robot motion planning and control. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 354 p. (Lecture Notes in Control and Information Sciences; vol. 229). ISBN: 978-3-540-76219-5.
3. **Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А.** Трехмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // *Известия РАН. ТИСУ.* 2003. № 3. С. 8–16.
4. **Fedotov A., Patsko V., Turova V.** Reachable sets for simple models of car motion // *Recent Advances in Mobile Robotics* / ed. A. V. Topalov. Rijeka, Croatia: InTech, 2011. P. 147–172. doi: 10.5772/26278.
5. **Patsko V.S., Fedotov A.A.** Investigation of reachable set at instant for the Dubins' car // *Proc. 58th Israel Annual Conf. Aerospace Sci. (Tel-Aviv & Haifa, 2018)*. Haifa, 2018. P. 1655–1669. ISBN: 9781510851399.
6. **Choi H.** Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint: Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy / University of Michigan. Michigan, 2014. 134 p.
7. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкредлидзе Р.В. и др.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
8. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. 576 с.
9. **Patsko V.S., Fedotov A.A.** Attainability set at instant for one-side turning Dubins car // *Proc. 17th IFAC Workshop Control Appl. Optim. Yekaterinburg, 2018*. P. 201–206. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.381.

Поступила 8.05.2019

После доработки 22.07.2019

Принята к публикации 5.08.2019

Пацко Валерий Семенович

канд. физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: patsko@imm.uran.ru

Федотов Андрей Анатольевич

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН

г. Екатеринбург

e-mail: andreyfedotov@mail.ru

REFERENCES

1. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American J. Math.*, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 497–516. doi: 10.2307/2372560.
2. Laumond J.-P. (ed.) *Robot Motion Planning and Control*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 229. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1998, 354 p. ISBN: 978-3-540-76219-5.

3. Patsko V.S., Pyatko S.G., Fedotov A.A. Three-dimensional reachability set for a nonlinear control system. *J. Computer and Systems Sciences International*, 2003, vol. 42, no. 3, pp. 320–328.
4. Fedotov A., Patsko V., Turova V. Reachable sets for simple models of car motion. In: A.V. Topalov (ed.) *Recent Advances in Mobile Robotics*, Rijeka, Croatia: InTech, 2011, pp 147–172. doi: 10.5772/26278.
5. Patsko V.S., Fedotov A.A. Investigation of reachable set at instant for the Dubins' car. *Proc. 58th Israel Annual Conf. Aerospace Sci., Tel-Aviv & Haifa*, Haifa, 2018, pp. 1655–1669. ISBN: 9781510851399.
6. Choi H. *Time-optimal paths for a Dubins car and Dubins airplane with a unidirectional turning constraint*, Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, University of Michigan, Michigan, 2014, 134 p.
7. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes*. N Y; London: John Wiley & Sons, 1962, 360 p. ISBN: 2-88124-077-1. Original Russian text (2nd ed.) published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov*, Moscow: Nauka Publ., 1969, 384 p.
8. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory*. N Y; London; Sydney: John Wiley & Sons, 1967, 576 p. Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*. Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p. ISBN: 0471522635.
9. Patsko V.S., Fedotov A.A. Attainability set at instant for one-side turning Dubins car. *Proc. 17th IFAC Workshop Control Appl. Optim.*, Yekaterinburg, 2018. P. 201–206. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.381.

Received May 8, 2019

Revised July 22, 2019

Accepted August 5, 2019

Valerii Semenovich Patsko, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: patsko@imm.uran.ru.

Andrei Anatol'evich Fedotov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: andreyfedotov@mail.ru.

Cite this article as: V.S.Patsko, A. A.Fedotov. The structure of the reachable set for the Dubins car with a strictly one-sided turn, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 171–187.