ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

ОЦЕНИВАНИЕ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ СВЕРХУ ПО ВКЛЮЧЕНИЮ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

М. С. Никольский

В теории оптимального управления важным объектом исследования является множество достижимости управляемого объекта $D(T)$. Это множество в грубой форме отражает динамические возможности управляемого объекта, что важно для теории и приложений. Многие оптимизационные задачи для управляемых объектов в своей постановке используют множество $D(T)$. Одним из ключевых аспектов изучения свойств управляемых объектов является получение конструктивных оценок сверху по включению для $D(T)$. В частности, такие оценки полезны при приближенных вычислениях $D(T)$ пиксельным методом. Основным объектом изучения в настоящей статье являются две нелинейные модели прямого регулирования, известные в литературе по теории абсолютной устойчивости, с добавкой управляющего члена в правую часть соответствующей системы дифференциальных уравнений. Для получения искомых оценок сверху по включению в статье используются известные в теории абсолютной устойчивости функции Ляпунова. Отметим, что оценки сверху для $D(T)$ получены в виде некоторых шаров в фазовом пространстве с центром в 0.

Ключевые слова: множество достижимости, функция Ляпунова, абсолютная устойчивость, прямое регулирование.

M. S. Nikolskii. Estimation of reachable sets from above with respect to inclusion for some nonlinear control systems.

The study of reachable sets of controlled objects is an important research area in optimal control theory. Such sets describe in a rough form the dynamical possibilities of the objects, which is important for theory and applications. Many optimization problems for controlled objects use the reachable set $D(T)$ in their statements. In the study of properties of controlled objects, it is useful to have some constructive estimates of $D(T)$ from above with respect to inclusion. In particular, such estimates are helpful for the approximate calculation of $D(T)$ by the pixel method. In this paper we consider two nonlinear models of direct regulation known in the theory of absolute stability with a control term added to the right-hand side of the corresponding system of differential equations. To obtain the required upper estimates with respect to inclusion, we use Lyapunov functions from the theory of absolute stability. Note that the upper estimates for $D(T)$ are obtained in the form of balls in the phase space centered at the origin.

Keywords: reachable set, Lyapunov function, absolute stability, direct regulation.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-163-170

Введение

Проблема оценивания множеств достижимости $D(T)$ управляемых объектов сверху по включению представляет определенный интерес для математической теории управления и ее приложений. Такого рода оценки полезны при изучении динамических возможностей управляемых объектов и при приближенных вычислениях $D(T)$ пиксельным методом.

В настоящей работе мы рассмотрим две нелинейные управляемые системы общего вида, которые связаны с классическими моделями теории абсолютной устойчивости прямого регулирования (см. [1; 2]).

В первой системе (см. п. **1**) присутствует одна нелинейность, а во второй системе (см. п. **2**) имеется m нелинейностей, где $m \geqslant 2$. Для оценивания сверху по включению множества достижимости $D(T)$ (см., например, [3; 4]) мы используем аппарат функций Ляпунова, появившихся первоначально в теории устойчивости движения (см., например, [2; 5; 6] и многие другие работы). Отметим, что и в более ранних работах (см., например, [6]) аппарат теории функций Ляпунова использовался не только для традиционных задач теории устойчивости движения, но и для других качественных задач теории дифференциальных уравнений.

1. Рассмотрим нелинейную управляемую систему

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma(x)) + Mu, \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, вектор $b \in \mathbb{R}^n$; A, M — матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$ $(r \geqslant 1)$ соответственно, $\varphi(\sigma)$ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция переменной $\sigma \in \mathbb{R}^1$,

$$\sigma(x) = \langle c, x \rangle. \tag{2}$$

Здесь вектор $c \in \mathbb{R}^n$; управляющий вектор $u \in U$, где U — компакт из $\mathbb{R}^r$. Условимся символом $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 1)$ обозначать арифметическое евклидово пространство, элементами которого являются упорядоченные столбцы из k чисел и стандартным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ векторов. Для $y \in \mathbb{R}^k$ символом $|y|$ будем обозначать стандартную длину вектора y.

Отметим, что, положив в (1) $u = 0$, мы получим известную модель прямого регулирования, которая давно изучается в теории абсолютной устойчивости движения (см. [1; 2]). Таким образом, управляемый объект (1) можно рассматривать как управляемый вариант известной неуправляемой системы прямого регулирования.

Фиксируем для управляемой системы (1) начальный вектор

$$x(0) = x_0. \tag{3}$$

При $t \geqslant 0$ рассмотрим множество $\mathcal{U}$ всевозможных измеримых по Лебегу функций $u(t)$, удовлетворяющих условию

$$u(t) \in U, \quad t \geqslant 0. \tag{4}$$

Фиксируем управление $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$, подставим его в систему дифференциальных уравнений (1) и решим ее при начальном условии (3) при $t \geqslant 0$ в классе локально абсолютно непрерывных функций. Согласно [7, с. 66, 67] соответствующее единственное локально абсолютно непрерывное решение $\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{u}(\cdot))$ будет определено на некотором максимальном по включению полуинтервале $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, где $\tau(\tilde{u}(\cdot))$ — конечное положительное число либо $\tau(\tilde{u}(\cdot)) = +\infty$. Фиксируем $T > 0$. Если $\tau(\tilde{u}(\cdot)) > T$, то вектор $x(T, \tilde{u}(\cdot))$ определен. Если $\tau(\tilde{u}(\cdot)) \leqslant T$, то вектор $x(T, \tilde{u}(\cdot))$ не определен, поскольку в этом случае существует (доказывается от противного) последовательность чисел $t_i \in (0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, $i = 1, 2, \ldots$, такая, что $t_i \to \tau(\tilde{u}(\cdot))$, $|x(t_i, \tilde{u}(\cdot))| \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Множество достижимости $D(T)$ для управляемого объекта (1)–(4) при $T > 0$ мы определим формулой

$$D(T) = \{x(T, \tilde{u}(\cdot))\}, \tag{5}$$

где объединение берется только по тем $\tilde{u}(\cdot)$, для которых $\tau(\tilde{u}(\cdot)) > T$. Отметим, что в общем случае множество $D(T)$ может оказаться пустым при данном $T > 0$.

Нашей задачей является получение оценок сверху по включению множества $D(T)$ для управляемого объекта (1)–(4). Среди такого рода прежних результатов мы отметим результаты работ [3; 4]. Заметим, что в этой тематике оказались полезными функции типа Ляпунова $v(x)$. Основным требованием к скалярным функциям $v(x)$ у нас является их непрерывная дифференцируемость на $\mathbb{R}^n$. Их приходится дифференцировать в силу управляемой системы. Поэтому мы называем эти функции функциями Ляпунова безотносительно к выполнению других свойств функций Ляпунова из теории устойчивости движения (см., например, [2; 5; 6] и др.)

Рассмотрим полезную для дальнейшего функцию (см. (1), (2))

$$v(x) = \frac{|x|^2}{2} + \int\limits_0^{\sigma(x)} \varphi(r)\, dr. \tag{6}$$

Подобного рода функции используются в теории абсолютной устойчивости (см., например, [1; 2]). В дальнейшем мы будем требовать выполнения следующего неравенства:

$$\varphi(r)r \geqslant 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^1. \tag{7}$$

Из этого неравенства вытекает, что интегральный член в (6) является неотрицательной функцией при $x \in \mathbb{R}^n$ и, следовательно, (см. (6)) функция $v(x) > 0$ при $x \neq 0$, причем $v(0) = 0$.

Фиксируем управления $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$. На $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ рассмотрим функции (см. (6))

$$\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{u}(\cdot)), \quad \tilde{v}(t) = v(\tilde{x}(t)). \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что функция $\tilde{x}(t)$ локально липшицева на $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ и поэтому функция $\tilde{v}(t)$ там почти всюду дифференцируема. Для производной $\dot{\tilde{v}}(t)$ почти всюду при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ справедлива формула (см. (1), (2), (6))

$$\dot{\tilde{v}}(t) = \langle \operatorname{grad} v(\tilde{x}(t)), A\tilde{x}(t) + b\varphi(\sigma(\tilde{x}(t))) + M\tilde{u}(t)\rangle, \tag{9}$$

где $\operatorname{grad} v(x)$ означает градиент функции $v(x)$, причем

$$\operatorname{grad} v(x) = x + c\varphi(\sigma(x)). \tag{10}$$

В связи с формулами (9), (10) полезно рассмотреть функцию

$$f(x, \sigma, u) = \langle x + c\varphi(\sigma), Ax + b\varphi(\sigma) + Mu\rangle, \tag{11}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^r$. Эту формулу можно переписать в виде

$$f(x, \sigma, u) = g_1(x, u) + \langle c, b\rangle \varphi^2(\sigma) + g_2(x, u)\varphi(\sigma), \tag{12}$$

где

$$g_1(x, u) = \langle x, Ax + Mu\rangle, \tag{13}$$
$$g_2(x, u) = \langle c, Ax + Mu\rangle + \langle x, b\rangle. \tag{14}$$

В дальнейшем будем считать выполненным неравенство

$$\langle c, b\rangle < 0. \tag{15}$$

Выделяя в формуле (12) полный квадрат по величине $\varphi(\sigma)$, с помощью условия (15) получаем неравенство

$$f(x, \sigma, u) \leqslant g_1(x, u) + \frac{1}{|\langle c, b\rangle|}\Big(\frac{g_2(x, u)}{2}\Big)^2 \tag{16}$$

при $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$. Обратим внимание на то, что функция $\varphi(\sigma)$ не входит в правую часть неравенства (16). Используя неравенство Коши — Буняковского и ограниченность множества U, с помощью формул (12)–(14), (16) нетрудно при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $u \in U$ получить неравенство

$$f(x, \sigma, u) \leqslant d_1|x|^2 + d_2|x| + d_3, \tag{17}$$

где d_1, d_2, d_3 — некоторые конструктивно вычислимые неотрицательные константы. Используя неравенство $|x| \leqslant (|x|^2 + 1)/2$, с помощью неравенства (17) приходим при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^1$, $u \in U$ к неравенству (см. (6), (7))

$$f(x, \sigma, u) \leqslant \alpha v(x) + \beta, \tag{18}$$

где α, β — неотрицательные конструктивно вычислимые константы. Суммируя сказанное, на основании формул (8)–(13), (16)–(18) получим, что почти всюду при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$

$$\dot{\tilde{v}}(t) \leqslant \alpha\tilde{v}(t) + \beta, \tag{19}$$

где $\tilde{v}(t) = v(\tilde{x}(t))$. Используя известные теоремы о дифференциальных неравенствах (см., например, [8]), можно обосновать при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ неравенство

$$\tilde{v}(t) \leqslant y(t), \tag{20}$$

где $y(t)$ — решение уравнения сравнения

$$\dot{y} = \alpha y + \beta \tag{21}$$

с начальным условием

$$y(0) = v(x_0). \tag{22}$$

Отметим, что в силу формул (6), (7), (20)–(22) при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$

$$|\tilde{x}(t)|^2 \leqslant 2y(t), \tag{23}$$

где

$$y(t) = e^{\alpha t} v(x_0) + \int\limits_0^t e^{\alpha r}\, dr \cdot \beta. \tag{24}$$

Допустим, что величина $\tau(\tilde{u}(\cdot))$ является конечным числом. В этой ситуации конечное число $\tau(\tilde{u}(\cdot))$ больше нуля. Тогда, как уже говорилось выше, существует такая последовательность чисел $t_i \in (0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, $i = 1, 2, \ldots$, что $t_i \to \tau(\tilde{u}(\cdot))$, $|\tilde{x}(t_i)| \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Однако это невозможно в силу соотношений (23), (24). Таким образом, при сделанных предположениях (см. (7), (15)) величина $\tau(\tilde{u}(\cdot)) = +\infty$. Отметим, что управление $\tilde{u}(\cdot)$ было произвольным допустимым управлением из $\mathcal{U}$ и, следовательно, при произвольном $T > 0$ и произвольных $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ справедливо неравенство

$$|x(T, u(\cdot))| \leqslant \sqrt{2y(T)}, \tag{25}$$

где функция $y(t)$ определяется формулой (24). Получаем теорему.

Теорема 1. *Для управляемого объекта* (1)–(4) *при условиях* (7), (15) *при произвольном* $T > 0$ *и произвольных* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *справедливо неравенство вида* (25), *где функция* $y(t)$ *определяется формулой* (24) *при соответствующим образом подобранных неотрицательных константах* α, β, *а величина* $v(x_0)$ *вычисляется по формуле* (6).

З а м е ч а н и е. Если в уравнении (1) заменить линейную векторную функцию Ax на нелинейную непрерывно дифференцируемую на $\mathbb{R}^n$ функцию $g(x)$ со значениями в $\mathbb{R}^n$ и с выполнением на $\mathbb{R}^n$ неравенства

$$|g(x)| \leqslant \mu |x| + \nu,$$

где μ, ν — неотрицательные константы, то можно, используя функцию Ляпунова (6), провести аналогичные вышеприведенным рассуждения и получить и для этого, более общего, случая оценку сверху вида (25) для векторов $x(T, u(\cdot))$ при произвольных $T > 0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$.

2. В этом пункте мы рассмотрим управляемую систему (см. [7; 9]) вида

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=1}^{m} b_i \varphi_i(\sigma_i(x)) + Mu, \tag{26}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$, векторы b_i $(i = 1, \ldots, m,\ m \geqslant 2)$ принадлежат $\mathbb{R}^n$; A, M — матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$ $(r \geqslant 1)$ соответственно, $\varphi_i(\sigma_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ — непрерывно дифференцируемая скалярная функция переменной $\sigma_i \in \mathbb{R}^1$,

$$\sigma_i(x) = \langle c_i, x \rangle. \tag{27}$$

Здесь c_i $(i = 1, \ldots, m)$ — вектор из $\mathbb{R}^n$. Такого рода системы при $u = 0$ рассматривают в теории абсолютной устойчивости (см., например, [2; 10]). На вектор $u \in \mathbb{R}^r$ наложим геометрическое ограничение

$$u \in U, \tag{28}$$

где U — компакт из $\mathbb{R}^r$. Фиксируем начальное условие

$$x(0) = x_0. \tag{29}$$

Подставим измеримое управление $\tilde{u}(t) \in U$, $t \geqslant 0$, в (26) и будем решать для него при $t \geqslant 0$ задачу Коши при начальном условии (29) в классе локально абсолютно непрерывных функций. Согласно результатам из [7, с. 66, 67] соответствующее единственное решение $x(t, \tilde{u}(\cdot))$ будет определено на максимальном по включению полуинтервале $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, где $\tau(\tilde{u}(\cdot))$ — конечное положительное число либо $\tau(\tilde{u}(\cdot)) = +\infty$. Как и в п. **1**, определим множество достижимости $D(T)$ формулой (5). Отметим, что в общем случае множество $D(T)$ может оказаться пустым при данном $T > 0$. Для получения оценки сверху по включению множества $D(T)$ мы будем использовать аналог функции (6) (см. [10]) вида (см. (27))

$$v(x) = \frac{|x|^2}{2} + \sum_{i=1}^{m} \int\limits_0^{\sigma_i(x)} \varphi_i(r)\, dr. \tag{30}$$

В дальнейшем для каждой функции $\varphi_i(r)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, мы будем считать выполненными неравенства

$$\varphi_i(r)r \geqslant 0 \quad \forall r \in \mathbb{R}^1. \tag{31}$$

Эти неравенства обеспечивают неотрицательность каждого интегрального члена при $x \in \mathbb{R}^n$ в формуле (30). Обозначим $\tilde{x}(t) = x(t, \tilde{u}(\cdot))$, $\tilde{v}(t) = v(\tilde{x}(t))$ при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$. Нетрудно видеть, что функция $\tilde{v}(t)$ локально липшицева и, следовательно, дифференцируема почти всюду при $t \in [0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$, причем для производной $\dot{\tilde{v}}(t)$ почти всюду на $[0, \tau(\tilde{u}(\cdot)))$ справедлива формула

$$\dot{\tilde{v}}(t) = \Big\langle \operatorname{grad} v(\tilde{x}(t)), A\tilde{x}(t) + \sum_{i=1}^{m} b_i \varphi_i(\sigma_i(\tilde{x}(t))) + M\tilde{u}(t) \Big\rangle, \tag{32}$$

где

$$\operatorname{grad} v(x) = x + \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(\sigma_i(x)). \tag{33}$$

По аналогии с п. **1** рассмотрим функцию (ср. с (11))

$$f(x, \sigma, u) = \Big\langle x + \sum_{i=1}^{m} c_i \varphi_i(\sigma_i), Ax + \sum_{i=1}^{m} b_i \varphi_i(\sigma_i) + Mu \Big\rangle, \tag{34}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; вектор $\sigma \in \mathbb{R}^m$, причем его компонентами являются величины $\sigma_i \in \mathbb{R}^1$, $u \in \mathbb{R}^r$. Эту формулу можно переписать в виде

$$f(x, \sigma, u) = g_1(x, u) + \sum_{i,j=1}^{m} \langle c_i, b_j \rangle \varphi_i(\sigma_i)\varphi_j(\sigma_j) + \sum_{i=1}^{m} h_i(x, u)\varphi_i(\sigma_i), \tag{35}$$

где

$$g_1(x, u) = \langle x, Ax + Mu \rangle, \tag{36}$$

$$h_i(x, u) = \langle c_i, Ax + Mu \rangle + \langle x, b_i \rangle \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{37}$$

В связи с формулой (35) рассмотрим квадратичную форму

$$W(\xi) = \langle C\xi, \xi\rangle,$$

где $\xi \in \mathbb{R}^m$, симметричная матрица C порядка m строится по матрице F порядка m с элементами $F_{ij} = \langle c_i, b_j\rangle$ по формуле

$$C = \frac{1}{2}\,(F + F^*). \tag{38}$$

Здесь $*$ означает транспонирование матрицы.

В дальнейшем предполагается выполненным

У с л о в и е А. Симметричная матрица C является отрицательно определенной, т. е. матрица $(-1)C$ является положительно определенной.

Известно (см. [11, с. 210, 211]), что для положительно определенной матрицы $(-1)C$ существует такая положительная константа γ, что $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$\langle (-1)C\xi, \xi\rangle \geqslant \gamma|\xi|^2, \tag{39}$$

т. е. $\forall \xi \in \mathbb{R}^m$

$$\langle C\xi, \xi\rangle \leqslant -\gamma|\xi|^2. \tag{40}$$

Отметим, что наибольшая константа $\gamma > 0$ в (39) конструктивно вычислима. На основании сказанного из формул (34)–(38), (40) получаем при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^r$ неравенство вида

$$f(x, \sigma, u) \leqslant |g_1(x, u)| - \gamma|\varphi(\sigma)|^2 + \sum_{i=1}^{m} |h_i(x, u)| \cdot |\varphi_i(\sigma_i)|, \tag{41}$$

где вектор $\varphi(\sigma)$ с компонентами $\varphi_i(\sigma_i)$, $i = 1, \ldots, m$, принадлежит R^m.

Обозначим через $l(x, u, \sigma)$ сумму по i от 1 до m в правой части неравенства (41). Из определения функции $l(x, u, \sigma)$, формул (36), (37) и неравенства Коши — Буняковского, нетрудно при $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U$ (U — компакт в $\mathbb{R}^r$), $\sigma \in \mathbb{R}^m$ получить оценку вида

$$|g_1(x, u)| + l(x, u, \sigma) \leqslant d_1|x|^2 + d_2|x| + (d_3|x| + d_4) \cdot |\varphi(\sigma)|, \tag{42}$$

где d_i — неотрицательные конструктивно вычислимые константы. В связи с неравенствами (41), (42) полезно рассмотреть функцию

$$\xi(x, \sigma) = -\gamma|\varphi(\sigma)|^2 + (d_3|x| + d_4) \cdot |\varphi(\sigma)|.$$

Выделяя в этой формуле полный квадрат относительно величины $|\varphi(\sigma)|$, получаем при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$ неравенство вида

$$\xi(x, \sigma) \leqslant \frac{1}{\gamma}\Big(\frac{d_3|x| + d_4}{2}\Big)^2.$$

В силу сказанного для функции $f(x, \sigma, u)$ (см. (35)) при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $u \in U$ получаем неравенство вида

$$f(x, \sigma, u) \leqslant d_5|x|^2 + d_6|x| + d_7, \tag{43}$$

где d_5, d_6, d_7 — конструктивно вычислимые неотрицательные константы. Отметим, что правая часть неравенства (43) не зависит от σ. Используя неравенство $|x| \leqslant (|x|^2 + 1)/2$, с помощью неравенства (43) приходим для функции $f(x, \sigma, u)$ (см. (35)) при $x \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $u \in U$ к неравенству вида (18). Дальнейшие рассуждения проходят по схеме п. **1** (см. формулы (19)–(24)), и при произвольных $T > 0$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ обосновываем неравенство

$$|x(T, u(\cdot))| \leqslant \sqrt{2y(T)}, \tag{44}$$

где функция $y(t)$ определяется формулой вида (24). Получаем теорему.

Теорема 2. *Для управляемого объекта* (26)–(29) *при условиях* (31) *и условии отрицательной определенности матрицы* C (*см.* (38)) *при произвольном* $T > 0$ *и произвольных* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *справедливо неравенство вида* (44), *где функция* $y(t)$ *определяется формулой* (24) *при соответствующим образом подобранных неотрицательных константах* α, β, *а величина* $v(x_0)$ *вычисляется по формуле* (30).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.** Абсолютная устойчивость регулируемых систем. Москва: Изд-во АН СССР, 1963. 140 с.
2. **Барбашин Е.А.** Функции Ляпунова. Москва: Наука, 1970. 240 с.
3. **Гусев М.И.** О внешних оценках множеств достижимости нелинейных управляемых объектов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2011. Т. 17, № 1. С. 60–69.
4. **Никольский М.С.** Об оценивании множества достижимости для некоторых управляемых объектов // Междунар. конф., посвящ. 110-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина: сб. тр. Москва, 2018. С. 194–196.
5. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. Москва: ГИФМЛ, 1959. 212 с.
6. **Ла-Салль Ж., Лефшец С.** Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. Москва: Мир, 1964. 168 с.
7. **Ли Э.Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. Москва: Наука, 1972. 576 с.
8. **Хартман Ф.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Мир, 1970. 720 с.
9. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. Москва: Наука, 1969. 384 с.
10. **Рапопорт Л.Б.** О задаче абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // Автоматика и телемеханика. 1987. Вып. 5. С. 66–74.
11. **Понтрягин Л.С.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1965. 332 с.

Поступила 4.04.2019
После доработки 16.04.2019
Принята к публикации 29.04.2019

Никольский Михаил Сергеевич
д-р физ.-мат. наук, ведущий науч. сотрудник
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
г. Москва
e-mail: mni@mi-ras.ru

REFERENCES

1. Aizerman M.A., Gantmakher F.R. *Absolute stability of regulator systems.* San Francisco: Holden-Day, 1964, 182 p. ISBN: 978-0816201433. Original Russian text published in Aizerman M.A., Gantmakher F.R. *Absolyutnaya ustoichivost' reguliruemykh sistem.* Moscow: Publ. House Soviet Acad. Sci., 1963, 140 p.
2. Barbashin E.A. *Funktsii Lyapunova* [Lyapunov functions]. Moscow: Nauka Publ., 1970, 240 p.
3. Gusev M.I. On external estimates for reachable sets of nonlinear control systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 275, suppl. 1, pp. S57–S67. doi 10.1134/S0081543811090057.
4. Nikolskii M.S. On estimating of the attainable set for some control objects. In: Besov K.A. (ed.), *"Optimal control and differential games". Materials of international conference dedicated to 110 anniversary of L.S. Pontrjagin, December 12–14, 2018*, Moscow: MAKS Press, 2018, pp. 194–196 (in Russian). ISBN: 978-5-317-05994-1.
5. Krasovskii N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* [Some problems of the theory of motion stability]. Moscow: Publ. GIFML, 1959, 212 p.
6. La Salle J., Lefshetz S. *Stability by Liapunov's direct method.* Burlington, MA: Elsevier, 1961, 142 p. ISBN: 9780080955124. Translated to Russian under the title *Issledovanie ustoichivosti pryamym metodom Lyapunova.* Moscow: Mir Publ., 1964, 168 p.

7. Lee E.B., Markus L. *Foundations of optimal control theory.* N Y; London; Sydney: John Wiley and Sons, Inc., 1967, 576 p. ISBN: 0471522635 . Translated to Russian under the title *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya*, Moscow: Nauka Publ., 1972, 576 p.
8. Hartman Ph. *Ordinary differential equations.* Ser. Classics Appl. Math. (Book 38), N Y, London, Sydney: SIAM, 1987, 632 p. ISBN: 978-0521682947 . Translated to Russian under the title *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Publ. Mir, 1970, 720 p.
9. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The mathematical theory of optimal processes.* Ed. L.W. Neustadt, N Y, London, Interscience Publ. John Wiley & Sons, Inc., 1962, 360 p. Original Russian text (2nd ed.) published in Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1969, 384 p.
10. Rapoport L.B. *On absolute stability of control systems incorporating several nonlinear stationary elements. Avtomat. i Telemekh.*, 1987, no. 5, pp. 66–74 (in Russian).
11. Pontryagin L.S. *Ordinary differential equations.* Elsevier, 2014, 304 p. ISBN: 9781483156491 . Original Russian text published in Pontryagin L.S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Nauka Publ., 1965, 332 p.

Received April 4, 2019
Revised April 16, 2019
Accepted April 29, 2019

Mikhail Sergeevich Nikolskii, Dr. Phys.-Math. Sci, Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Science, Moscow, 119991 Russia, e-mail: mni@mi-ras.ru .

Cite this article as: M. S. Nikolskii. Estimation of reachable sets from above with respect to inclusion for some nonlinear control systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 163–170 .