ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ СДВИГ В ЗАДАЧЕ ОТСЛЕЖИВАНИЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В. И. Максимов

В статье рассматривается задача управления операторным дифференциальным уравнением в гильбертовом пространстве. Суть задачи состоит в построении алгоритма формирования управления по принципу обратной связи, который гарантировал бы отслеживание решением заданного уравнения решение другого уравнения, подверженного влиянию неизвестного возмущения. В настоящей работе мы исследуем задачу, в которой предполагается, что оба уравнения задаются на бесконечном промежутке времени. Кроме того мы полагаем, что неизвестное возмущение является элементом пространства функций, суммируемых с квадратом евклидовой нормы, т.е может быть неограниченным. Для решения задачи, мы конструируем два устойчивых к информационным помехам и погрешностям вычислений алгоритма, основанных на сочетании элементов теории некорректных задач с известным в теории позиционных дифференциальных игр методом экстремального сдвига. Первый алгоритм ориентирован на случай непрерывного измерения решений, а второй- дискретного.

Ключевые слова: управление, задача слежения, распределенные уравнения.

V. I. Maksimov. Extremal shift in a problem of tracking a solution of an operator differential equation.

A control problem for an operator differential equation in a Hilbert space is considered. The problem consists in constructing an algorithm generating a feedback control and guaranteeing that the solution of the equation follows a solution of another equation, which is subject to an unknown disturbance. We assume that both equations are given on an infinite time interval and the unknown disturbance is an element of a space of functions integrable with the square of their Euclidean norm; i.e., the perturbation may be unbounded. We construct two algorithms based on elements of the theory of ill-posed problems and the extremal shift method known in the theory of positional differential games. The algorithms are stable with respect to information noise and calculation errors. The first and second algorithms can be used in the cases of continuous and discrete measurement of solutions, respectively.

Keywords: control, tracking problem, distributed equations.

MSC: 93C20, 35K90

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-141-152

1. Введение. Постановка задачи

Метод экстремального сдвига — один из эффективнейших методов исследования задач управления по принципу обратной связи — был предложен Н. Н. Красовским. В дальнейшем он широко применялся при решении как собственно задач управления (в том числе игрового), так и задач идентификации, обращения и т.д. В настоящей работе предлагается модификация этого метода для операторного дифференциального уравнения второго порядка. При этом исследуется задача отслеживания решением одного уравнения решения другого, подверженного влиянию неконтролируемого воздействия. Задача слежения решается на бесконечном промежутке времени. Рассматриваются два случая: случаи непрерывного и дискретного измерения решений.

Пусть V и H — действительные гильбертовы пространства. Пространство V вложено в пространство H плотно и непрерывно: $V \subset H = H^* \subset V^*$. Символы $|\cdot|_V$ и $|\cdot|_H$ означают соответственно нормы в V и H, а символы $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в H и двойственность между V и V^*.

Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Ax(t) = Bu(t) + f(t), \quad t \in T = [0, +\infty), \tag{1.1}$$

$$x(0) = x_{10} \in V, \quad \dot{x}(0) = x_0 \in H.$$

Здесь $A : V \to V^*$ — линейный, непрерывный и симметричный оператор, удовлетворяющий (для некоторого $\omega > 0$) условию коэрцитивности

$$\langle Ay, y \rangle \geq \omega |y|_V^2 \quad \forall y \in V, \tag{1.2}$$

$C : V \to V^*$ — линейный непрерывный оператор со свойством

$$\langle Cx - Cy, x - y \rangle + \omega_2 |x - y|_H^2 \geq \omega_1 |x - y|_V^2 \quad \forall x, y \in V, \tag{1.3}$$

где $\omega_1 > 0$ и ω_2 — некоторые константы; $f(\cdot) \in L_2(T; H)$ — заданная функция; $u(\cdot)$ — управление; производная $\dot{x}(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений; B — линейный непрерывный оператор, действующий из гильбертова пространства U с нормой $|\cdot|_U$ и скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_U$ (пространство возмущений) в пространство V ($B \in L(U; V)$). Символом c_* ниже обозначим норму линейного оператора C, т. е.

$$c_* = |C|_{L(V;V^*)}. \tag{1.4}$$

Всякую функцию $x(\cdot) \in C(T_\vartheta; V)$, такую что $\dot{x}(\cdot) \in W(T_\vartheta; V) = \{y(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; V) : \dot{y}(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; V^*)\}$, и удовлетворяющую соотношению

$$\langle \ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Ax(t), z \rangle = (Bu(t) + f(t), z) \quad \forall z \in V \quad \text{при п.в.} \quad t \in T_\vartheta,$$

будем называть решением уравнения (1.1) на промежутке $T_\vartheta = [0, \vartheta]$, $\vartheta \in (0, +\infty)$, и обозначать символом $x(\cdot) = x(\cdot; x_{10}, x_0, u(\cdot))$. Как известно [1, теорема 1.1, с. 283], при любых $\vartheta \in (0, +\infty)$ и $u(\cdot) \in L_2(T_\vartheta; U)$ уравнение (1.1) имеет единственное решение с указанным выше свойством. В дальнейшем функцию $x(t)$, $t \in T$, назовем решением уравнения (1.1) на промежутке T, если $x(\cdot)$ есть решение (1.1) на всяком промежутке T_ϑ, $\vartheta > 0$.

Рассматриваемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Наряду с уравнением (1.1) имеется еще одно уравнение того же вида

$$\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ay(t) = Bv(t) + f(t), \quad t \in T, \tag{1.5}$$

с начальным состоянием $y(0) = y_{10}$, $\dot{y}(0) = y_0$. Будем предполагать, что элементы $y_{10} \in V$ и $y \in H$ удовлетворяют неравенствам

$$|y_{10} - x_{10}|_V \leq h, \quad |y_0 - x_0|_H \leq h. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.5) (назовем его *эталонным*) подвержено воздействию неизвестного, изменяющегося во времени возмущения (в дальнейшем назовем его *эталонным управлением*) $v = v_*(\cdot) \in P(\cdot)$, где $P(\cdot)$ есть множество измеримых (по Лебегу) функций $v(\cdot) : [0, +\infty) \to U$, называемое *множеством допустимых управлений*. В моменты времени $\tau_i \in T$ ($i = 1, 2 \ldots$) измеряются с ошибкой решение $x(\tau_i)$ уравнения (1.1) и его производная, а также решение уравнения (1.5) и его производная. Результаты измерения — элементы $\{\xi_{1i}^h, \xi_i^h\} \in V^* \times V^*$ и $\{\psi_{1i}^h, \psi_i^h\} \in V^* \times V^*$ таковы, что справедливы неравенства

$$|\xi_{1i}^h - x(\tau_i)|_{V^*} \leq h, \quad |\xi_i^h - \dot{x}(\tau_i)|_{V^*} \leq h, \tag{1.7}$$

$$|\psi_{1i}^h - y(\tau_i)|_{V^*} \leq h, \quad |\psi_i^h - \dot{y}(\tau_i)|_{V^*} \leq h, \tag{1.8}$$

где $h \in (0,1)$ — величина ошибки измерения. При $i = 0$ полагаем $\xi_{10}^h = x_{10}$, $\xi_0^h = x_0$, $\psi_{10}^h = y_{10}$, $\psi_0^h = y_0$. Следовательно, мы полагаем, что на помехи накладываются ограничения "малости" их значений в каждый момент времени. Требуется указать алгоритм формирования управления $u = u^h(\cdot)$ в уравнении (1.1), позволяющий осуществлять отслеживание решением $x^h(\cdot) = x(\cdot; x_{10}, x_0, u^h(\cdot))$ этого уравнения решение $y(\cdot)$ уравнения (1.5). Таким образом, рассматривается задача, состоящая в построении алгоритма, который по текущим измерениям величин $\{y(\tau_i), \dot{y}(\tau_i)\}$ и $\{x(\tau_i), \dot{x}(\tau_i)\}$ формирует по принципу обратной связи управление $u = u^h(\cdot)$ в правой части уравнения (1.1) такое, что "отклонение" $x^h(\cdot) = x(\cdot; x_{10}, x_0, u^h(\cdot))$ от $y(\cdot) = y(\cdot; y_{10}, y_0, v_*(\cdot))$ мало при достаточной малости измерительной погрешности h.

Наряду с измерениями решений уравнений (и их производных) в дискретные моменты времени мы также рассмотрим случай непрерывного измерения, т.е. случай, когда в каждый момент $t \in T$ становятся известными приближения $\xi^h(\cdot) \in L_\infty(T; V)$, $\psi^h(\cdot) \in L_\infty(T; V)$ величин $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, а также приближения $\xi_1^h(\cdot) \in L_\infty(T; H)$, $\psi_1^h(\cdot) \in L_\infty(T; H)$ величин $\dot{x}(\cdot)$ и $\dot{y}(\cdot)$ со свойствами

$$|\xi_1^h(t) - x(t)|_V \le h, \quad |\xi^h(t) - \dot{x}(t)|_H \le h, \tag{1.9}$$

$$|\psi_1^h(t) - y(t)|_V \le h, \quad |\psi^h(t) - \dot{y}(t)|_H \le h. \tag{1.10}$$

При непрерывном измерении решений мы будем полагать $P(\cdot) = L_2(T; U)$; в случае дискретного измерения $P(\cdot) = \{v(\cdot) \in L_2(T; U) : v(t) \in P \quad \text{при п.в.} \quad \text{t} \in T\}$, где $P \subset U$ — выпуклое, ограниченное и замкнутое множество.

Задача слежения — одна из классических задач теории управления. Она исследовалась многими авторами (см., например, [2–4]). Решение соответствующей задачи слежения, основанное на методе экстремального сдвига, лежит в основе хорошо известного в теории позиционных дифференциальных игр метода стабильных дорожек [5–7]. Алгоритмы отслеживания решений уравнений с распределенными параметрами, основанные на идеологии экстремального сдвига, приведены, например, в работах [8–14]. При этом в [8; 9; 11] рассмотрен случай конечного промежутка времени, а в [10; 12–14] — бесконечного. В работах [9; 12; 13] использовалось полугрупповое представление решений, а в работах [8; 10; 11; 14] — функционально-аналитическое.

В работе рассматривается уравнение (1.1) с операторами, удовлетворяющими условиям (1.2) и (1.3). Естественно возникает вопрос в необходимости этих условий. Отвечая на этот вопрос можно выделить три фактора. Во-первых, как отмечено выше, при выполнении этих условий в силу известной теоремы существует единственное решение уравнения с подходящий гладкостью. Во-вторых, только при выполнении этих условий удается доказать лемму 1 (см. неравенства (2.10) и (2.11)), лежащую в основе всех результатов работы. И в-третьих, опять же эти условия являются принципиальными при доказательстве теоремы 1 (оценка (2.20)) и леммы 2 (оценка (3.5)).

2. Алгоритм решения. Случай непрерывного измерения решений

В дальнейшем полагаем выполненным следующее условие.

У с л о в и е 1. $\omega_1 > c_0^2 \omega_2$.

Обратимся к случаю, когда измерения решений уравнений (1.1), (1.5) происходят непрерывно, т.е. выполняются неравенства (1.9), (1.10). Фиксируем функцию $\alpha = \alpha(h) : R^+ \to R^+ = \{r \in R : r > 0\}$, а также число $\varepsilon \in (0,1)$. Положим

$$u^h(t) = u^h(\xi^h(t), \xi_1^h(t), \psi^h(t), \psi_1^h(t)) = -\alpha^{-1}(h) B^* \{\xi^h(t) - \psi^h(t) + \varepsilon(\xi_1^h(t) - \psi_1^h(t))\}. \tag{2.1}$$

Здесь символ B^* означает оператор, сопряженный к оператору B. Таким образом, уравнение (1.1) примет вид

$$\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Ax(t) = -\alpha^{-1}(h) B B^* \{\xi^h(t) - \psi^h(t) + \varepsilon(\xi_1^h(t) - \psi_1^h(t))\} + f(t). \tag{2.2}$$

Обозначим решение этого уравнения символом $x^h(\cdot)$. Заметим, что в силу непрерывности вложения пространства V в пространство H справедливы неравенства

$$|x|_H \le c_0|x|_V \quad \forall x \in V, \tag{2.3}$$

$$|x|_{V^*} \le c_1|x|_H \ \forall x \in H, \tag{2.4}$$

где $c_0 \in (0,+\infty)$ и $c_1 \in (0,+\infty)$ — некоторые константы. Пусть

$$\kappa_1 = \min\Big\{1, \{\omega_1 - c_0^2\omega_2\}\Big\{\frac{|C_1|^2_{L(V;V^*)}}{\omega} + c_0^2\Big(\frac{3}{2} + \frac{c_0^2}{\omega}\Big)\Big\}^{-1}, \frac{\omega\omega_1}{|C_1|^2_{L(V;V^*)}}\Big\}.$$

Здесь $|C_1|_{L(V;V^*)}$ — норма линейного непрерывного оператора $C_1 : V \to V^*$, $C_1x = Cx - x$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon \in (0, \min\{\kappa_1, (0,5\omega)^{1/2}c_0^{-1}\})$, $v(\cdot) \in L_4(T;U)$. *Тогда можно указать числа* $h_0 \in (0,1)$ *и* $d_0 > 0$ *такие, что при* $h \in (0,h_0)$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in T}\{|y(t) - x^h(t)|_V^2 + |\dot y(t) - \dot x^h(t)|_H^2\} \le d_0\{\alpha(h) + h + h^2\alpha^{-2}(h) + h^2\alpha^{-1}(h)\}.$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем одно вспомогательное утверждение. Введем функционал

$$\lambda(t) = \lambda(z(t),\dot z(t)) = \frac{1}{2}\{\langle Az(t), z(t)\rangle + |\dot z(t)|_H^2\} + \varepsilon(z(t),\dot z(t)). \tag{2.5}$$

Здесь и всюду ниже $z(t) = x^h(t) - y(t)$. Учитывая (1.5) и (2.2), заключаем, что $z(\cdot)$ является решением уравнения

$$\ddot z(t) + C\dot z(t) + Az(t) = B(u^h(t) - v(t)) \text{ при п.в. } t \in T, \tag{2.6}$$

где $z(0) = x_{10} - y_{10}$, $\dot z(0) = x_0 - y_0$.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда при п.в.* $t \in T$ *справедливо неравенство*

$$\dot\lambda(t) \le -\varepsilon\lambda(t) + \varepsilon(z(t), B(u^h(t) - v(t))) + (\dot z(t), B(u^h(t) - v(t))). \tag{2.7}$$

Доказательство. Легко видеть, что соотношение (2.6) переписывается в виде

$$\ddot z(t) + C_1\dot z(t) + \dot z(t) + Az(t) = B(u^h(t) - v(t)). \tag{2.8}$$

Далее имеем (см. (1.4), (2.3), (2.4)) $|C_1|_{L(V;V^*)} \le c_* + c_0c_1$. Кроме того, верно неравенство

$$-\varepsilon\langle C_1\dot z(t), z(t)\rangle \le \frac{\omega}{4}\varepsilon|z(t)|_V^2 + \frac{\varepsilon|C_1|^2_{L(V;V^*)}|\dot z(t)|_V^2}{\omega}. \tag{2.9}$$

Ввиду свойства коэрцитивности оператора C (см. (1.3)), получаем $\langle C_1\dot z(t), \dot z(t)\rangle \ge \omega_1|\dot z(t)|_V^2 - \tilde\omega|\dot z(t)|_H^2$, где $\tilde\omega = 1 + \omega_2$. Таким образом

$$-\langle C_1\dot z(t), \dot z(t)\rangle \le -\omega_1|\dot z(t)|_V^2 + \tilde\omega|\dot z(t)|_H^2. \tag{2.10}$$

В силу (1.2) верно неравенство

$$-\frac{\varepsilon}{2}\langle Az(t), z(t)\rangle \le -\frac{\varepsilon}{2}\omega|\dot z(t)|_V^2. \tag{2.11}$$

Воспользовавшись (2.3), имеем при любых $\varepsilon \in (0,1)$

$$-(\varepsilon-\varepsilon^2)(z(t),\dot z(t)) \le \varepsilon(1-\varepsilon)|z(t)|_H|\dot z(t)|_H \le \varepsilon|z(t)|_H|\dot z(t)|_H$$

$$\le \frac{\varepsilon}{4}\omega c_0^{-2}|z(t)|_H^2 + \varepsilon\frac{c_0^2}{\omega}|\dot z(t)|_H^2 \le \frac{\varepsilon}{4}\omega|z(t)|_V^2 + \varepsilon\frac{c_0^2}{\omega}|\dot z(t)|_H^2. \tag{2.12}$$

Далее, в силу (2.10), (2.11) справедливо соотношение

$$\frac{3}{2}\varepsilon|\dot z(t)|_H^2 - |\dot z(t)|_H^2 - \frac{\varepsilon}{2}\langle Az(t),z(t)\rangle - \langle C_1\dot z(t),\dot z(t)\rangle$$

$$\le \Big(\frac{3}{2}\varepsilon-1\Big)|\dot z(t)|_H^2 - \frac{\varepsilon}{2}\omega|z(t)|_V^2 - \omega_1|\dot z(t)|_V^2 + \tilde\omega|\dot z(t)|_H^2. \tag{2.13}$$

Учитывая (2.9), (2.12), (2.13), получаем при $\varepsilon|C_1|^2_{L(V;V^*)} \le \omega\omega_1$

$$\Big(\frac{3}{2}\varepsilon-1\Big)|\dot z(t)|_H^2 - \frac{\varepsilon}{2}\langle Az(t),z(t)\rangle - \langle C_1\dot z(t),\dot z(t)\rangle - \varepsilon(1-\varepsilon)(z(t),\dot z(t)) - \varepsilon\langle C_1\dot z(t),z(t)\rangle$$

$$\le \Big\{\tilde\omega + \frac{3}{2}\varepsilon - 1 - (\omega_1 - \frac{\varepsilon|C_1|^2_{L(V;V^*)}}{\omega})c_0^{-2} + \varepsilon\frac{c_0^2}{\omega}\Big\}|\dot z(t)|_H^2. \tag{2.14}$$

Правая часть неравенства (2.14) будет неположительна, если

$$c_0^2\Big\{\omega_2 + \varepsilon\Big(\frac{3}{2}+\frac{c_0^2}{\omega}\Big)\Big\} \le \omega_1 - \frac{\varepsilon|C_1|^2_{L(V;V^*)}}{\omega}. \tag{2.15}$$

В свою очередь, неравенство (2.15) можно переписать в виде

$$c_0^2\omega_2 + \varepsilon\Big\{\frac{|C_1|^2_{L(V;V^*)}}{\omega} + c_0^2(\frac{3}{2}+\frac{c_0^2}{\omega})\Big\} \le \omega_1. \tag{2.16}$$

В силу неравенства $0<\varepsilon<\kappa_1$ выполняется (2.16). Поэтому

$$\varepsilon|\dot z(t)|_H^2 - \langle C_1\dot z(t),\dot z(t)\rangle - |\dot z(t)|_H^2 - \varepsilon\langle C_1\dot z(t),z(t)\rangle - \varepsilon(z(t),\dot z(t)) - \varepsilon\langle Az(t),z(t)\rangle$$

$$\le -\frac{\varepsilon}{2}\{|\dot z(t)|_H^2 + \langle Az(t),z(t)\rangle + 2\varepsilon(z(t),\dot z(t))\}. \tag{2.17}$$

Продифференцировав $\lambda(t)$ по t и воспользовавшись (2.8), получим

$$\dot\lambda(t) = \varepsilon|\dot z(t)|_H^2 - \langle C_1\dot z(t),\dot z(t)\rangle - \varepsilon(z(t),\dot z(t)) - |\dot z(t)|_H^2 \tag{2.18}$$

$$-\varepsilon\langle C_1\dot z(t),z(t)\rangle - \varepsilon\langle Az(t),z(t)\rangle + \varepsilon(z(t),B(u^h(t)-v(t))) + (\dot z(t),B(u^h(t)-v(t))).$$

Из (2.17) и (2.18) следует неравенство (2.7). Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Воспользовавшись неравенствами $\omega>0$ и (2.3), устанавливаем соотношение

$$|\varepsilon(z(t),\dot z(t))| \le \varepsilon|\dot z(t)|_H c_0|z(t)|_V \le \frac{\omega}{4}|z(t)|_V^2 + \frac{\varepsilon^2c_0^2}{\omega}|\dot z(t)|_H^2. \tag{2.19}$$

В свою очередь, учитывая (1.2), (2.5) и (2.19), получим

$$\frac{\omega}{4}|z(t)|_V^2 + \Big(\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon^2c_0^2}{\omega}\Big)|\dot z(t)|_H^2 \le \lambda(t). \tag{2.20}$$

Пусть

$$\varepsilon_h(t) = \lambda(t) + 0.5\alpha\int\limits_0^t\{|u^h(\tau)|_U^2 - |v(\tau)|_U^2\}\,d\tau, \quad \alpha=\alpha(h). \tag{2.21}$$

Тогда ввиду (1.9), (1.10), учитывая структуру $\varepsilon_h(t)$ (см. (2.21)), будем иметь

$$\dot{\varepsilon}_h(t) \le -\varepsilon\lambda(t) + (\xi^h(t) - \psi^h(t) + \varepsilon(\xi_1^h(t) - \psi_1^h(t)), B(u^h(t) - v(t))) + 0.5\alpha\{|u^h(t)|_U^2 - |v(t)|_U^2\} + b_0 h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}. \quad (2.22)$$

Здесь и всюду ниже $b_j, d_j, j = 0, 1, \ldots$, означают постоянные, которые не зависят от h, α, δ и могут быть выписаны в явном виде. Заметим, что ввиду (2.20) при $\varepsilon \in (0, (0.5\omega)^{1/2} c_0^{-1})$

$$\lambda(t) \ge b_1\{|z(t)|_V^2 + |\dot{z}(t)|_H^2\}, \quad t \in T,$$

где $b_1 = \min\{\omega/4, 1/2 - (\varepsilon c_0)^2\omega^{-1}\}$. Далее, из (2.1) (см. (1.9), (1.10)) получаем справедливую при п.в. $t \in T$ оценку

$$|u^h(t)|_U \le b_2(\varepsilon|z(t)|_V + |\dot{z}(t)|_H + h)\alpha^{-1}.$$

Следовательно, при п.в. $t \in T$ верно неравенство

$$h|u^h(t)|_U \le b_3(h\lambda(t)^{1/2} + h^2)\alpha^{-1} \le 0.5\varepsilon\lambda(t) + b_3 h^2\alpha^{-1} + b_4\varepsilon^{-1}h^2\alpha^{-2}. \quad (2.23)$$

Пусть $h \in (0, 0.5\varepsilon)$. Тогда в силу (2.1), (2.23) из (2.22) выводим соотношение

$$\dot{\lambda}(t) + 0.5\alpha\{|u^h(t)|_U^2 - |v(t)|_U^2\} \le -0.5\varepsilon\lambda(t) + b_5\varepsilon^{-1}h^2\alpha^{-2} + b_0 h|v(t)|_U + b_6 h^2\alpha^{-1},$$

справедливое при п.в. $t \in T$. Таким образом,

$$\dot{\lambda}(t) = -0.5\varepsilon\lambda(t) + 0.5\alpha|v(t)|_U^2 + b_5\varepsilon^{-1}h^2\alpha^{-2} + b_0 h|v(t)|_U + b_6 h^2\alpha^{-1} + \phi(t) \quad \text{пр п.в.} \quad \text{t} \in T,$$

где $\phi(t) \le 0$ при п.в. $t \in T$. Следовательно,

$$\lambda(t) \le \lambda(0)\exp^{-0.5\varepsilon t} + (b_5\varepsilon^{-1}h^2\alpha^{-2} + b_6 h^2\alpha^{-1})\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)} ds$$

$$+ 0.5\alpha\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)} |v(s)|_U^2 ds + b_0 h\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)} |v(s)|_U ds. \quad (2.24)$$

Нетрудно видеть, что

$$\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)} ds \le 2\varepsilon^{-1}, \quad t \in [0, +\infty). \quad (2.25)$$

Учитывая (2.25), а также включение $v(\cdot) \in L_4(T; U)$, заключаем, что верны неравенства

$$\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)} |v(s)|_U^2 ds \le \Big(\int_0^t \exp^{-\varepsilon(t-s)} ds\Big)^{1/2}\Big(\int_0^t |v(s)|_U^4\, ds\Big)^{1/2} \le b_7\varepsilon^{-1/2},$$

$$\int_0^t \exp^{-0.5\varepsilon(t-s)} |v(s)|_U^2 ds \le b_8\varepsilon^{-1/2}.$$

Воспользовавшись двумя последними неравенствами, из (2.24) получаем

$$\lambda(t) \le b_9(\lambda(0) + h^2\alpha^{-2}\varepsilon^{-2} + h\varepsilon^{-1/2} + h^2\alpha^{-1}\varepsilon^{-1} + \alpha\varepsilon^{-1/2}).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Пусть также* $\alpha(h) \to 0$, $h\alpha^{-1}(h) \to 0$ *при* $h \to 0$. *Тогда для любого* $\beta > 0$ *можно указать такое* $h_* = h_*(\beta) \in (0, 1)$, *что при всех* $h \in (0, h_*)$ *верно неравенство*

$$\sup_{t \in T}\{|y(t) - x^h(t)|_V^2 + |\dot{y}(t) - \dot{x}^h(t)|_H^2\} \le \beta.$$

3. Алгоритм решения. Случай дискретного измерения решений

Опишем алгоритм решения задачи в случае дискретных измерений. Возьмем семейство разбиений $\Delta_h = \{\tau_{h,i}\}_{i=0}^{\infty}, \tau_{h.0} = 0$ промежутка T такое, что

$$\delta(h) = \tau_{h,i+1} - \tau_{h,i} \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

До начала работы алгоритма фиксируем величины $h \in (0,1)$ и $\varepsilon \in (0,\kappa)$, где

$$\kappa = \min\{\kappa_1, \kappa_2\}, \quad \kappa_2 = \min\{0.5, 0.5\omega c_0^{-2}, (0.5\omega)^{1/2} c_0^{-1}\},$$

а также разбиение Δ_h. Работу алгоритма разобьем на однотипные шаги. В течение i-го шага, осуществляемого на промежутке времени $\delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $\tau_i = \tau_{h,i}$, выполняются следующие операции. В момент τ_i, вычисляется элемент

$$u_i^h = u_i^h(\Xi_i^h, \Psi_i^h) = \arg\min\{2(B^*[(\xi_i^h - \psi_i^h) + \varepsilon(\xi_{1i}^h - \psi_{1i}^h)], v)_U : v \in P\}, \tag{3.1}$$

где $\Xi_i^h = \{\xi_{1i}^h, \xi_i^h\}$, $\Psi_i^h = \{\psi_{1i}^h, \psi_i^h\}$. После этого на вход уравнения (1.1) при всех $t \in \delta_i$ подается управление $u^h(t) = u_i^h$. Таким образом, уравнение (1.1) принимает вид

$$\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Ax(t) = Bu_i^h + f(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \in \delta_i.$$

Обозначим его решение символом $x^h(\cdot)$. Под действием этого управления в момент τ_{i+1} вместо состояния $\{x^h(\tau_i), \dot{x}^h(\tau_i)\}$ реализуется состояние $\{x^h(\tau_{i+1}), \dot{x}^h(\tau_{i+1})\}$. При этом в результате воздействия на уравнение (1.5) некоторого неизвестного возмущения $v(t)$, $t \in \delta_i$ в момент τ_{i+1} вместо состояния $\{y(\tau_i), \dot{y}(\tau_i)\}$ реализуется состояние $\{y(\tau_{i+1}), \dot{y}(\tau_{i+1})\}$. На следующем, $(i+1)$-м, шаге аналогичные действия повторяются.

Имеет место

Теорема 2. *Справедливо неравенство*

$$\sup_{t \in T}\{|y^h(t) - x(t)|_V^2 + |\dot{y}^h(t) - \dot{x}(t)|_H^2\} \le d_0 h^2 e^{-\varepsilon t} + \frac{d_1}{\varepsilon}(h + \delta^{1/2}(h)). \tag{3.2}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем два вспомогательных утверждения.

Лемма 2. *При п.в.* $t \in T$ *справедливы неравенства*

$$|z(t)|_V^2 \le 4d_*(\omega)^{-1}, \tag{3.3}$$

$$|\dot{z}(t)|_H^2 \le d_*(0.5 - \varepsilon^2 c_0^2 \omega^{-1})^{-1}, \tag{3.4}$$

где $a_0 = 0.5\{1 + |A|_{L(V;V^*)} + \kappa_2 c_0\}$, $d(P) = \sup\{|u|_U : u \in P\}$, $a_1 = 2d(P)|B|_{L(U;V^*)}$, $a_2 = 2d(P)|B|_{L(U;H)}$, $d_* = a_0 + 4\Big(\dfrac{2a_1^2}{\omega} + \dfrac{a_2^2}{\varepsilon^2}\Big)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $|B(u^h(t) - v(t))|_{V^*} \le a_1$. Кроме того, в силу (1.2)

$$\frac{\varepsilon}{4}\langle Az, z\rangle \ge \frac{\varepsilon\omega|z|_V^2}{4} \quad \forall z \in V.$$

Значит,

$$-\frac{\varepsilon}{4}\langle Az, z\rangle \le -\frac{\varepsilon\omega|z|_V^2}{4} \quad \forall z \in V. \tag{3.5}$$

Далее имеем

$$\varepsilon(z(t), B(u^h(t) - v(t))) \le d_1\varepsilon|z(t)|_V \le \frac{\varepsilon\omega|z(t)|_V^2}{8} + \frac{2\varepsilon a_1^2}{\omega}, \tag{3.6}$$

$$(\dot z(t), B(u^h(t) - v(t))) \le \frac{\varepsilon|\dot z(t)|_H^2}{8} + \frac{2a_2^2}{\varepsilon}. \tag{3.7}$$

Заметим, что если $\varepsilon < 0.5$, $\varepsilon < 0.5\omega c_0^{-2}$, то верна цепочка неравенств

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}(z(t), \dot z(t)) \le \frac{\varepsilon^2|z(t)|_H^2}{4} + \frac{\varepsilon^2|\dot z(t)|_H^2}{4} \le \frac{\varepsilon^2 c_0^2|z(t)|_V^2}{4} + \frac{\varepsilon^2|\dot z(t)|_H^2}{4} \le \frac{\varepsilon\omega|z(t)|_V^2}{8} + \frac{\varepsilon|\dot z(t)|_H^2}{8}.$$

В таком случае, учитывая последние неравенства, а также (3.5), получаем

$$-\frac{\varepsilon}{2}\lambda(t) = -\frac{\varepsilon}{4}\{\langle Az(t), z(t)\rangle + |\dot z(t)|_H^2\} - \frac{\varepsilon^2}{2}(z(t), \dot z(t)) \le -\frac{\varepsilon\omega|z(t)|_V^2}{8} - \frac{\varepsilon|\dot z(t)|_H^2}{8}.$$

Отсюда и из (2.7), (3.6), (3.7) выводим

$$\dot\lambda(t) \le -\frac{\varepsilon}{2}\lambda(t) + \varrho_\varepsilon. \tag{3.8}$$

Здесь

$$\varrho_\varepsilon = 2\Big(\frac{\varepsilon a_1^2}{\omega} + \frac{a_2^2}{\varepsilon}\Big).$$

Из (3.8) следует равенство

$$\dot\lambda(t) = -\frac{\varepsilon}{2}\lambda(t) + \varrho_\varepsilon + \psi(t),$$

где $\psi(t) \le 0$ при $t \in T$. Заметим, что в силу (1.6), (2.3)

$$\lambda(0) \le 0.5\big\{h^2|A|_{L(V;V^*)} + h^2\big\} + \varepsilon c_0 h^2 \le a_0 h^2. \tag{3.9}$$

Следовательно,

$$\lambda(t) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\lambda(0) + \int\limits_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-\tau)}\{\varrho_\varepsilon + \psi(t)\}d\tau \le e^{-\frac{\varepsilon}{2}}\lambda(0) + \varrho_\varepsilon\int\limits_0^t e^{-\frac{\varepsilon}{2}(t-\tau)}\,d\tau \le \lambda(0) + \frac{2\varrho_\varepsilon}{\varepsilon} \le d_*.$$

Ввиду неравенства $0 < \varepsilon < \kappa_2$ имеем

$$\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2 c_0^2}{\omega} > 0.$$

Кроме того, справедливо неравенство (2.20), из которого следуют неравенства (3.3), (3.4). Лемма доказана.

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$|\dot z(t + \Delta t) - \dot z(t)|_{V^*} \le d_2(\Delta t)^{1/2}, \tag{3.10}$$

$$|z(t + \Delta t) - z(t)|_H \le d_3\Delta t, \quad t, t + \Delta t \in T, \quad \Delta t > 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Умножив на $\dot z(t)$ правую и левую части равенства (2.6), будем иметь

$$\langle \ddot z(t) + C\dot z(t) + Az(t), \dot z(t)\rangle = (B(u^h(t) - v(t)), \dot z(t)). \tag{3.12}$$

Воспользовавшись (3.3), устанавливаем оценку

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} \langle Az(\tau), \dot z(\tau)\rangle\, d\tau \le d_4 \int\limits_t^{t+\Delta t} |\dot z(\tau)|_V\, d\tau \le \frac{\omega_1}{2}\int\limits_t^{t+\Delta t} |\dot z(\tau)|_V^2\, d\tau + \frac{d_4^2}{2\omega_1}\Delta t.$$

После интегрирования из (3.12) получим, учитывая (1.3),

$$|\dot z(t+\Delta t)|_H^2+1.5\omega_1\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_V^2\,d\tau\le 4\int\limits_t^{t+\Delta t}a_1|\dot z(\tau)|_V\,d\tau+|\dot z(t)|_H^2+2|\omega_2|\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_H^2\,d\tau+d_4^2\Delta\omega_1^{-1}.$$

Далее имеем

$$a_1\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(s)|_V ds\le a_1(\Delta t)^{1/2}\Big(\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(s)|_V^2 ds\Big)^{1/2}\le 0.5\omega_1\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(s)|_V^2 ds+d_5\Delta t.$$

Таким образом,

$$|\dot z(t+\Delta t)|_H^2+\omega_1\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_V^2\,d\tau\le|\dot z(t)|_H^2+d_6\Delta t+2|\omega_2|\int\limits_t^{t+\Delta}|\dot z(s)|_H^2 ds. \tag{3.13}$$

Из (3.13) в силу леммы 2 (см. (3.4)) следует оценка

$$\int\limits_t^{t+\Delta t}|\dot z(\tau)|_V^2\,d\tau\le d_7+d_8\Delta t\quad\forall t\in T,\ t+\Delta t\in T,\quad \Delta t>0. \tag{3.14}$$

Возьмем произвольный элемент $v\in V$. Тогда из (2.6) получим

$$\langle\ddot z(t)+C\dot z(t)+Az(t),v\rangle=(B(u^h(t)-v(t)),v)\quad\text{при п.в. } t\in T.$$

Значит, $\forall v\in V$, t, $t+\Delta t\in T$, $\Delta t\in(0,1)$

$$\langle\dot z(t+\Delta t)-\dot z(t),v\rangle\le\int\limits_t^{t+\Delta t}\big\{c_*|\dot z(\tau)|_V+|A|_{L(V;V^*)}|z(\tau)|_V+2|B|_{L(U;V^*)}d(P)\big\}d\tau\,|v|_V. \tag{3.15}$$

Из (3.15) в силу (3.3), (3.14) следует (3.10). В свою очередь (3.11) является следствием (3.4). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим изменение величины $\lambda(t)$ на промежутке T. Здесь $\lambda(t)$ определено в (2.5). После дифференцирования, учитывая лемму 1, будем иметь

$$\dot\lambda(t)\le-\varepsilon\lambda(t)+(\dot z(t)-\dot z(\tau_i)+\varepsilon(z(t)-z(\tau_i)),B(u^h(t)-v(t)))+\chi_i^t(u^h,v)+\mu_i^t(u^h,v)$$
$$+(\dot x(\tau_i)-\xi_i^h,B(u^h(t)-v(t)))-(\dot y^h(\tau_i)-\psi_i^h,B(u^h(t)-v(t)))$$
$$+\varepsilon(x(\tau_i)-\xi_{1i}^h,B(u^h(t)-v(t)))-\varepsilon(y^h(\tau_i)-\psi_{1i}^h,B(u^h(t)-v(t)))\quad\text{при п.в. } t\in\delta_i, \tag{3.16}$$

где

$$\chi_i^t(u^h,v)=(u^h(t),B^*(\xi_i^h-\psi_i^h))_U-(v(t),B^*(\xi_i^h-\psi_i^h))_U,$$
$$\mu_i^t(u^h,v)=\varepsilon(u^h(t),B^*(\xi_{1i}^h-\psi_{1i}^h))_U-\varepsilon(v(t),B^*(\xi_{1i}^h-\psi_{1i}^h))_U.$$

Из (3.1) вытекает неравенство $\chi_i^t(u^h,v)+\mu_i^t(u^h,v)\le 0$. В таком случае, в силу (3.16) при п.в. $t\in\delta_i$ получаем

$$\dot{\lambda}(t) \le -\varepsilon\lambda(t) + (\dot{z}(t) - \dot{z}(\tau_i) + \varepsilon(z(t) - z(\tau_i)), B(u^h(t) - v(t)))$$
$$+ \ (\dot{x}(\tau_i) - \xi_i^h, B(u^h(t) - v(t))) - (\dot{y}^h(\tau_i) - \psi_i^h, B(u^h(t) - v(t)))$$
$$+ \ \varepsilon(x(\tau_i) - \xi_{1i}^h, B(u^h(t) - v(t))) - \varepsilon(y^h(\tau_i) - \psi_{1i}^h, B(u^h(t) - v(t))). \tag{3.17}$$

Учитывая (3.10), имеем

$$(\dot{z}(t) - \dot{z}(\tau_i), B(u^h(t) - v(t))) \le d_9\delta^{1/2}(h)\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}. \tag{3.18}$$

Кроме того, в силу (1.7), (1.8) получаем

$$\begin{gathered}(\dot{x}(\tau_i) - \xi_i^h, B(u^h(t) - v(t))) \le d_8h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\},\\ (\psi_i^h - \dot{y}^h(\tau_i), B(u^h(t) - v(t))) \le d_8h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\},\\ (x(\tau_i) - \xi_{1i}^h, B(u^h(t) - v(t))) \le d_8h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\},\\ (\psi_{1i}^h - y^h(\tau_i)), B(u^h(t) - v(t))) \le d_8h\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}.\end{gathered} \tag{3.19}$$

В свою очередь, воспользовавшись (3.11), устанавливаем оценку

$$(z(t) - z(\tau_i), B(u^h(t) - v(t))) \le d_9\delta(h)\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\}. \tag{3.20}$$

Объединив (3.17)–(3.20), выводим справедливое при п.в. $t \in \delta_i$ неравенство

$$\dot{\lambda}(t) \le d_{10}(h + \delta^{1/2}(h))\{|u^h(t)|_U + |v(t)|_U\} - \varepsilon\lambda(t). \tag{3.21}$$

Заметим, что при $0 < \varepsilon < 0.5$, $0 < \varepsilon < 0.5\omega c_0^{-2}$ в силу (2.20) $\lambda(t) \ge 0 \quad$ при$t \ge 0$. Кроме того, в силу ограниченности множества P из (3.21) следует равенство $\dot{\lambda}(t) = -\varepsilon\lambda(t) + d_{11}(h + \delta^{1/2}(h)) + \psi_0(t)$, где $\psi_0(t) \le 0$, $t \in T$. В таком случае

$$\lambda(t) \le \lambda(0)e^{-\varepsilon t} + d_{11}\int\limits_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}(h + \delta^{1/2}(h))\,d\tau. \tag{3.22}$$

Из (3.22), учитывая (3.9), получаем

$$\lambda(t) \le a_0h^2e^{-\varepsilon t} + \frac{d_{11}}{\varepsilon}(h + \delta^{1/2}(h)). \tag{3.23}$$

Из (3.23), (2.20) следует (3.2). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.** Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1978. 336 с.
2. **Айзерман М.А.** Лекции по теории автоматического регулирования. М.: Физматгиз, 1958. 286 с.
3. **Егоров А.И.** Основы теории управления. М. : Физматлит, 2004. 502 с.
4. **Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.** Методы управление нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 326 с.
5. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры М.: Наука, 1974. 458 с.
6. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления М.: Наука, 1981. 288 с.
7. **Ушаков В.Н.** К построению стабильных мостов в дифференциальной игре сближения–уклонения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1980. № 4. С. 29–36.
8. **Осипов Ю.С.** Позиционное управление в параболических системах // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41, №. 2. С. 195–201.

9. **Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.** Метод экстремального сдвига Н.Н. Красовского и задачи граничного управления // Автоматика и телемеханика. 2009. №. 4. С. 18–30.
10. **Максимов В.И.** Об одном алгоритме отслеживания решения параболического уравнения на бесконечном промежутке времени // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 366–375.
11. **Максимов В.И.** Об отслеживании решения параболического уравнения // Изв. вузов. Математика. 2012. № 1. С. 40–48.
12. **Blizorukova M.S., Maksimov V.I.** On an algorithm for the problem of tracking a trajectory of a parabolic equation // Int. Journal of Applied Mathematics and Computer Science. 2017. Vol. 27, № 3. P. 457–466.
13. **Максимов В.И., Осипов Ю.С.** О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2016. Т. 56, № 1. С. 14–26.
14. **Осипов Ю.С., Максимов В.И.** Отслеживание решения нелинейного распределенного дифференциального уравнения законами обратной связи // Сиб. журн. вычисл. математики. 2018. Т. 21, № 2. С. 201–214.

Поступила 2.04.2019
После доработки 28.06.2019
Принята к публикации 8.07.2019

Максимов Вячеслав Иванович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: maksimov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Gajewski H., Gröger K., Zacharias K. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator differentialgleichungen.* Berlin: Akademie-Verlag, 1974, 281 p. Translated to Russian under the title *Nelineinye operatornye uravneniya i operatornye differentsial'nye uravneniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 336 p.
2. Aizerman M.A. *Theory of automatic control.* Oxford; London; N Y; Paris: Pergamon Press, 1963, 519 p. ISBN: 9781483155753. Original Russian text published in Aizerman M.A. *Lektsii po teorii avtomaticheskogo regulirovaniya.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1958, 286 p.
3. Egorov A.I. *Osnovy teorii upravleniya* [Foundations of control theory]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 502 p. ISBN: 978-5-9221-0543-9/hbk.
4. Chernous'ko F.L., Anan'evskii I.M., Reshmin S.A. *Metody upravleniya nelineinymi mekhanicheskimi sistemami* [Control methods for nonlinear mechanical systems]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 326 p.
5. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* New York: Springer. 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
6. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
7. Ushakov V.N. On the problem of constructing stable bridges in a differential game of approach and avoidance. *Eng. Cybern.*, 1980, vol. 18, no. 4, pp. 16–23.
8. Osipov Yu.S. Position control in parabolic systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1977, vol. 41, no. 2, pp. 187–193. doi: 10.1016/0021-8928(77)90001-6.
9. Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V., Maksimov V.I. N. N. Krasovskii's extremal shift method and problems of boundary control. *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 4, pp. 577–588. doi: 10.1134/S0005117909040043.
10. Maksimov V.I. Algorithm for shadowing the solution of a parabolic equation on an infinite time interval. *Differ. Equ.*, 2014, vol. 50, no. 3,pp. 362–371. doi: 10.1134/S0012266114030100.
11. Maksimov V.I. On tracking solutions of parabolic equations. *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2012, vol. 56, no. 1, pp. 35–42. doi: 10.3103/S1066369X12010057.

12. Blizorukova M.S., Maksimov V.I. On an algorithm for the problem of tracking a trajectory of a parabolic equation. *Int. J. Appl. Math. Comp. Sci.*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 457–466. doi: 10.1515/amcs-2017-0031 .
13. Maksimov V.I., Osipov Yu.S. Infinite-horizon boundary control of distributed systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, vol. 56, no. 1, pp. 14–25. doi: 10.1134/S0965542516010139 .
14. Osipov Yu.S., Maksimov V.I. Tracking the solution to a nonlinear distributed differential equation by feedback laws. *Num. Anal. Appl.*, 2018, vol. 11, no. 2, pp. 158–169. doi: 10.1134/S1995423918020064 .

Received April 2, 2019
Revised June 28, 2019
Accepted July 8, 2019

Vyacheslav Ivanovich Maksimov Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: maksimov@imm.uran.ru .

Cite this article as: V. I. Maksimov. Extremal shift in a problem of tracking a solution of an operator differential equation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 141–152 .