ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977.1+517.926

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАВНОМЕРНОЙ ПОЛНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ[1]

Е. К. Макаров, С. Н. Попова

Классические определения равномерной полной управляемости и равномерной полной наблюдаемости сформулированы Р. Калманом для систем с коэффициентами из класса $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Альтернативные им двойственные определения предложены Е. Л. Тонковым для систем с ограниченными измеримыми коэффициентами. Для теории управления асимптотическими инвариантами дифференциальных систем интерес представляют свойства равномерной полной управляемости и наблюдаемости для систем с произвольными коэффициентами. В статье предложено определение равномерной полной наблюдаемости на произвольно заданном семействе отрезков вещественной оси в предположении, что на каждом таком отрезке определены некоторые пространства управлений и измеряемых выходов системы. При этом на систему не накладываются никакие ограничения, кроме требования существования решений, их единственности и продолжимости на всю вещественную ось. Указаны простейшие свойства введенных понятий. Установлено, что в общем случае равномерная полная управляемость и равномерная полная наблюдаемость не являются двойственными свойствами линейных систем. Получены достаточные условия наличия такой двойственности. Аналогичные результаты сформулированы для пары "идентифицируемость — достижимость".

Ключевые слова: линейные системы, равномерная полная наблюдаемость, равномерная полная управляемость.

E. K. Makarov, S. N. Popova. On the definition of uniform complete observability.

The classical definitions of uniform complete controllability and uniform complete observability were formulated by R. Kalman for systems with coefficients from the class $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. E. L. Tonkov proposed alternative dual definitions for systems with bounded measurable coefficients. For the theory of control of asymptotic invariants of differential systems, it is useful to study the properties of uniform complete controllability and observability for systems with arbitrary coefficients. We propose a definition of uniform complete observability on an arbitrarily given family of closed intervals of the real axis under the assumption that some spaces of controls and measured outputs of the system are defined on each of the intervals. Here we do not impose any constraints on the system apart from the requirement of the existence of solutions, their uniqueness, and extendability to the whole real axis. Some basic properties of the introduced notions are given. It is established that, in the general case, uniform complete controllability and uniform complete observability are not dual properties for linear systems. Sufficient conditions for the presence of such a duality are obtained. Similar results are formulated for the pair "identifiability — reachability."

Keywords: linear systems, uniform complete observability, uniform complete controllability.

MSC: 93B05, 93C05

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-129-140

1. Классические определения полной наблюдаемости по выходу

Рассмотрим нестационарную линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

с наблюдателем

$$y = C(t)x, \quad y \in \mathbb{R}^m. \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что система (1.1) имеет матрицу Коши $X(t,s)$, определенную при всех $t, s \in \mathbb{R}$. Другие требования к системе (1.1) и наблюдателю (1.2) будем формулировать по мере необходимости.

[1]Исследования второго автора выполнены при финансовой поддержке РФФИ (грант 18–51–41005).

Пусть задан некоторый отрезок $I = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$. Каждому элементу $x_0 \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие решение $x(t; t_0, x_0) = X(t, t_0)x_0$ системы (1.1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0; t_0, x_0) = x_0$, и, затем, функцию выхода $y_I(t, x_0) = C(t)x(t; t_0, x_0)$, которую будем считать заданной лишь на отрезке I. Множество всех таких функций обозначим через Y_I.

Согласно общепринятому определению (см. [1, с. 68; 2, с. 188] и др.) система (1.1) является *полностью наблюдаемой по выходу* (1.2) *на отрезке* I, если определенное выше соответствие "состояние – выход" между $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и функциями из Y_I является биекцией.

Иными словами, для вполне наблюдаемой на отрезке I системы возможно восстановление каждого начального состояния по порождаемому им выходу, если он измерен без ошибок.

Если матрица наблюдателя C интегрируема с квадратом на отрезке I, т. е. принадлежит соответствующему пространству L_2, то условие полной наблюдаемости может быть выражено с помощью матрицы наблюдаемости Калмана

$$\widehat{M}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} X^T(s, t_0)C^T(s)C(s)X(s, t_0)\, ds \tag{1.3}$$

следующим образом [2, с. 188]: *система* (1.1) *является полностью наблюдаемой по выходу* (1.2) *на отрезке* I *тогда и только тогда, когда матрица* $\widehat{M}(t_0, t_1)$ *невырождена.* Условие (1.3) позволяет также выписать в явном виде операцию восстановления начального состояния x_0 по измеренному выходу y:

$$\widehat{\mathfrak{R}}(t_0, t_1)y := \widehat{M}^{-1}(t_0, t_1) \int_{t_0}^{t_1} X^T(s, t_0)C^T(s)y(s)\, ds. \tag{1.4}$$

Нетрудно проверить, что для измеренного без ошибок выхода $y(t) = y_I(t, x_0)$, порожденного начальным состоянием x_0, результат действия операции (1.4) совпадает с истинным значением начального состояния: $x_0 = \widehat{\mathfrak{R}}(t_0, t_1)y$.

Изначально восстанавливающее отображение $y \mapsto x_0$ определено лишь на конечномерном пространстве функций Y_I. Однако измеряемый выход из-за наличия ошибок измерения не обязательно принадлежит этому пространству. Поэтому восстанавливающее отображение должно быть продолжено на некоторое более широкое пространство достаточно общего вида, которое, как предполагается, должно содержать все возможные измеряемые выходы. В конструкции Калмана таким объемлющим пространством является пространство $L_2(I, \mathbb{R}^n)$. Действительно, легко видеть, что правая часть равенства (1.4) задает непрерывный линейный оператор, определенный на всем пространстве интегрируемых с квадратом на отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функций размерности m и принимающий значения в $\mathbb{R}^n$. Его норма не превосходит величины $\|\widehat{M}^{-1}(t_0, t_1)\|^{1/2}$ и достигается на подпространстве выходов Y_I, т. е. является наименьшей среди всех возможных продолжений отображения $y \mapsto x_0$ на все $L_2(I, \mathbb{R}^n)$. Это свойство означает, что восстанавливающая операция $\widehat{\mathfrak{R}}(t_0, t_1)$ минимизирует ошибку восстановления начального состояния при заданной среднеквадратичной ошибке измерения выхода.

З а м е ч а н и е 1. Пусть выходу системы поставлено в соответствие не начальное, а конечное состояние $x_1 = x(t_1; t_0, x_0) = X(t_1, t_0)x_0$. Если это соответствие биективно, то система (1.1) называется *полностью идентифицируемой по выходу* (1.2) *на отрезке* I. Условие полной идентифицируемости эквивалентно невырожденности матрицы идентифицируемости Калмана

$$M(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} X^T(s, t_1)C^T(s)C(s)X(s, t_1)\, ds, \tag{1.5}$$

с помощью которой операция восстановления финального состояния записывается в виде

$$\mathfrak{R}(t_0,t_1)y := M^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} X^T(s,t_1)C^T(s)y(s)\,ds, \tag{1.6}$$

так что $x_1 = \mathfrak{R}(t_0,t_1)y$ при $y(t) = y_I(t,x_0)$. Нетрудно заметить, что справедливо равенство $\widehat{M}(t_0,t_1) = X^T(t_1,t_0)M(t_0,t_1)X(t_1,t_0)$, и поэтому матрицы $M(t_0,t_1)$ и $\widehat{M}(t_0,t_1)$ являются вырожденными или невырожденными одновременно, т. е. для линейных систем полная наблюдаемость и полная идентифицируемость на отрезке эквивалентны [1, с. 67]. Отсюда также следует, что операции $\mathfrak{R}(t_0,t_1)$ и $\widehat{\mathfrak{R}}(t_0,t_1)$ связаны необходимым равенством $\mathfrak{R}(t_0,t_1) = X(t_1,t_0)\widehat{\mathfrak{R}}(t_0,t_1)$.

Свойства нестационарной системы с течением времени могут изменяться, поэтому, даже если система (1.1) вполне наблюдаема по выходу (1.2) на любом отрезке вещественной оси, характеристики ее наблюдаемости на разных отрезках могут сильно отличаться. Это обстоятельство приводит к необходимости рассматривать различные виды наблюдаемости, к числу которых относится определенная Калманом в [3] равномерная полная наблюдаемость. Согласно [3] система (1.1) с выходом (1.2) называется *равномерно вполне наблюдаемой*, если сопряженная система

$$\dot{x} = -A^T(t)x + C^T(t)u, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad u\in\mathbb{R}^m, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{1.7}$$

равномерно вполне управляема.

Определение равномерной полной управляемости для систем с коэффициентами из пространства L_2 также дано в [3]. Вопрос об определении понятия равномерной полной управляемости в общем случае рассмотрен в [4]. Мотивировкой для подходов, развитых там, послужили потребности теории управления асимптотическими инвариантами нестационарных линейных систем [5, с. 346].

Цель настоящей работы — рассмотрение вопроса об определении понятия равномерной полной наблюдаемости в наиболее общем виде, необходимом для решения задач управления асимптотическими инвариантами систем с наблюдением.

2. Взаимосвязь равномерной полной наблюдаемости и равномерной полной управляемости по Калману

Вектор-столбцы, элементы пространства $\mathbb{R}^n$, и вектор-строки, элементы сопряженного пространства $\mathbb{R}^{n\prime}$, будем интерпретировать как матрицы размеров $n\times 1$ и $1\times n$ соответственно, записывая скалярное произведение векторов $x,y\in\mathbb{R}^n$ в виде x^Ty. Векторы канонического ортонормированного базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$ обозначаются через e_k, $k=1,\ldots,n$, единичная матрица — через $E := [e_1,\ldots,e_n]\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

Норма в $\mathbb{R}^n$ всюду далее предполагается евклидовой, а в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных $n\times n$-матриц используется спектральная норма, т. е. матричная норма, подчиненная евклидовой векторной норме. Пространство, топологически сопряженное к какому-либо заданному нормированному пространству F, будем обозначать через F^*.

Согласно [3] нестационарная линейная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad u\in\mathbb{R}^m, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{2.8}$$

называется *равномерно вполне управляемой*, если существуют такие положительные числа ϑ и α_i, $i=1,\ldots,4$, что при всех $\tau\in\mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$\alpha_1E \leqslant W(\tau,\tau+\vartheta) \leqslant \alpha_2E, \tag{2.9}$$

$$\alpha_3E \leqslant \widehat{W}(\tau,\tau+\vartheta) \leqslant \alpha_4E, \tag{2.10}$$

где матрица управляемости (матрица Калмана) W определяется равенством

$$W(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_0,s)B(s)B^T(s)X^T(t_0,s)\,ds \tag{2.11}$$

и $\widehat{W}(\tau,\tau+\vartheta)=X(\tau+\vartheta,\tau)W(\tau,\tau+\vartheta)X^T(\tau+\vartheta,\tau)$.

Если условия определения равномерной полной управляемости выполнены для некоторого заранее выбранного значения $\vartheta>0$, то система (2.8) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой* [6].

З а м е ч а н и е 2. Неравенства между матрицами в (2.9) и (2.10) представляют собой условную запись неравенств между соответствующими квадратичными формами и означают выполнение при всех $h\in\mathbb{R}^n$ обычных неравенств

$$\begin{aligned}\alpha_1\|h\|^2\leqslant h^TW(\tau,\tau+\vartheta)h=\int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta}\|h^TX(\tau,s)B(s)\|^2ds\leqslant\alpha_2\|h\|^2,\\ \alpha_3\|h\|^2\leqslant h^T\widehat{W}(\tau,\tau+\vartheta)h=\int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta}\|h^TX(\tau+\vartheta,s)B(s)\|^2ds\leqslant\alpha_4\|h\|^2.\end{aligned} \tag{2.12}$$

З а м е ч а н и е 3. Если система (2.8) ϑ-равномерно вполне управляема по Калману, то для любых $x_0,x_1\in\mathbb{R}^n$ на каждом отрезке $[\tau,\tau+\vartheta]$ определены *калмановские управления*

$$u_1(t)=-B^T(t)X^T(\tau,t)W^{-1}(\tau,\tau+\vartheta)x_0,\quad u_2(t)=B^T(t)X^T(\tau+\vartheta,t)\widehat{W}^{-1}(\tau,\tau+\vartheta)x_1, \tag{2.13}$$

первое из которых переводит систему (2.8) из состояния $x(\tau)=x_0$ в состояние $x(\tau+\vartheta)=0$, а второе — из состояния $x(\tau)=0$ в состояние $x(\tau+\vartheta)=x_1$. Это означает, что управление u_1 решает задачу управляемости, а управление u_2 — задачу достижимости [1, с. 42–43]. Таким образом, определение равномерной полной управляемости, данное в [3], является одновременно и определением равномерной полной достижимости, что приводит к доказанному в [3] и, в более сильной форме, в [7] и [4], ограничению на рост матрицы Коши свободной системы (системы с нулевым управлением). Для систем с ограниченными коэффициентами такая ситуация вполне естественна. Если же рассматриваются системы с неограниченными коэффициентами, то представляется целесообразным условия равномерной полной управляемости и равномерной полной достижимости разделить.

Применяя определение матриц Калмана $W(t_0,t_1)$ и $\widehat{W}(t_0,t_1)$ к системе (1.7), получим равенства

$$\begin{aligned}W(t_0,t_1)&=\int\limits_{t_0}^{t_1}X^T(s,t_0)C^T(s)C(s)X(s,t_0)\,ds=\widehat{M}(t_0,t_1),\\ \widehat{W}(t_0,t_1)&=\int\limits_{t_0}^{t_1}X^T(s,t_1)C^T(s)C(s)X(s,t_1)\,ds=M(t_0,t_1),\end{aligned}$$

где матрицы $M(t_0,t_1)$ и $\widehat{M}(t_0,t_1)$ отвечают системе (1.1), (1.2). Соответственно условия (2.9) и (2.10) приобретают вид неравенств

$$\alpha_1E\leqslant\widehat{M}(\tau,\tau+\vartheta)\leqslant\alpha_2E, \tag{2.14}$$

$$\alpha_3E\leqslant M(\tau,\tau+\vartheta)\leqslant\alpha_4E, \tag{2.15}$$

первое из которых гарантирует наблюдаемость системы (1.1), (1.2) на каждом отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$, а второе — ее идентифицируемость там. С учетом замечаний 1 и 3 в дальнейшем будем рассматривать эти условия по отдельности.

Используя представление (2.12) и определение выхода системы (1.1) на отрезке $I = [t_0, t_1]$, условия (2.14) и (2.15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \alpha_1\|x_0\|^2 \leqslant \|y_I(t,x_0)\|^2 = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|C(s)X(s,t_0)x_0\|^2 ds \leqslant \alpha_2\|x_0\|^2, \\ \alpha_3\|x_1\|^2 \leqslant \|y_I(t,x_0)\|^2 = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|C(s)X(s,t_1)x_1\|^2 ds \leqslant \alpha_4\|x_1\|^2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

наиболее удобном для переноса на общий случай. Заметим, что в каждом из этих условий первое неравенство гарантирует возможность отыскания начального (или, соответственно, конечного) состояния по выходу y_I, а правое ограничивает величину возможной ошибки под влиянием ошибки измерений выхода.

3. Взаимосвязь равномерной полной наблюдаемости и равномерной полной управляемости в общем случае

Для исследования вопроса о взаимосвязи равномерной полной наблюдаемости системы (1.1), (1.2) и равномерной полной управляемости системы (1.7) нам понадобится альтернативное — двойственное — определение равномерной полной управляемости. Как известно, альтернативу определению равномерной полной управляемости по Калману дает определение равномерной полной управляемости по Тонкову [8] (см. также [5, с. 95] и [4]). Согласно этому определению (в формулировке, соответствующей рассматриваемой ситуации) система (2.8) называется *ϑ-равномерно вполне управляемой*, если существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что для любого состояния x_0 и любого $\tau \in \mathbb{R}$ найдется управление u, обеспечивающее перевод системы (2.8) из состояния x_0 в состояние 0 на отрезке $[\tau, \tau + \vartheta]$ и удовлетворяющее оценке $\|u\| \leqslant L\|x_0\|$, где норма $\|u\|$ управления u берется в пространстве $L_2([\tau, \tau+\vartheta], \mathbb{R}^n)$, и при этом любое управление, обеспечивающее такой переход, удовлетворяет оценке $\|u\| \geqslant l\|x_0\|$.

Применяя определение равномерной полной управляемости по Тонкову к сопряженной системе (1.7) и учитывая двойственность равномерной полной управляемости и равномерной полной наблюдаемости, а также то, что управления, обеспечивающие перевод системы (2.8) из состояния x_0 в состояние 0 на отрезке $[t_0, t_1]$, и только они, удовлетворяют равенству

$$x_0 = -\int\limits_{t_0}^{t_1} X(t_0, s)B(s)u(s)ds,$$

будем иметь следующее утверждение: система (1.1), (1.2) является *ϑ-равномерно вполне наблюдаемой*, если существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что для любого вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и любого $\tau \in \mathbb{R}$ найдется функция $v_0 \in L_2([\tau, \tau + \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая равенству

$$x_0 = -\int\limits_{\tau}^{\tau+\vartheta} X^T(s,\tau)C^T(s)v_0(s)ds \tag{3.1}$$

и оценке $\|v_0\| \leqslant L\|x_0\|$, и при этом для любой функции $v \in L_2([\tau, \tau+\vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющей равенству $x_0 = -\int_{\tau}^{\tau+\vartheta} X^T(s,\tau)C^T(s)v(s)ds$, выполнено неравенство $\|v\| \geqslant l\|x_0\|$.

Заметим, что здесь вектор x_0 не является состоянием системы (1.1), а функция v — ее выходом. В действительности x_0 является состоянием сопряженной системы (1.7), а v — управлением в ней, и поэтому они принадлежат сопряженным пространствам: $\mathbb{R}^{n*}$ — к пространству состояний и $L_2([\tau,\tau+\vartheta],\mathbb{R}^n)^*$ — к пространству выходов соответственно, а возможность их представления в виде элементов исходных пространств обусловлена наличием естественного отождествления $\mathbb{R}^{n*}=\mathbb{R}^n$ и $L_2([\tau,\tau+\vartheta],\mathbb{R}^n)^*=L_2([\tau,\tau+\vartheta],\mathbb{R}^n)$, имеющего место как для конечномерных евклидовых, так и для общих гильбертовых пространств.

Используя элементарные свойства скалярного произведения в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $L_2([\tau,\tau+\vartheta],\mathbb{R}^n)$, можно показать, что сформулированный вариант определения равномерной полной наблюдаемости эквивалентен калмановскому определению. Но мы не будем это делать здесь, отложив доказательство до рассмотрения более общей ситуации.

Поскольку согласно [3] (см. также [7]) необходимым условием равномерной полной управляемости по Калману системы (2.8) (а значит и системы (1.7)) является принадлежность элементов матрицы B (для системы (1.7) — матрицы C^T) пространству $L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ матричных функций, интегрируемых с квадратом на любом отрезке вещественной оси, для рассмотрения общего случая произвольных коэффициентов следует обратиться к аналогам конструкций, предложенных в [4], модифицировав их надлежащим образом.

Пусть задано некоторое семейство Δ отрезков вещественной прямой $\mathbb{R}$. На каждом отрезке $I\in\Delta$ зададим некоторое нормированное пространство Z_I — пространство измеряемых выходов, состоящее из определенных на I вещественных вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$. Предполагается, что $Z_I\supset Y_I$ для любого $I\in\Delta$. Норму элемента $z\in Z_I$ будем обозначать через $\|z\|_Z$. В этом обозначении мы не будем указывать принадлежность отрезку I, поскольку нам не потребуется непосредственно сравнивать между собой нормы элементов, заданных на разных отрезках.

Определение 1. Систему (1.1) с наблюдателем (1.2) будем называть Δ-*равномерно вполне наблюдаемой*, если существуют числа $\beta_1,\beta_2>0$ такие, что на каждом отрезке $I\in\Delta$ для любого начального состояния x_0 выход $y_I(t,x_0)=C(t)X(t,t_0)x_0$ удовлетворяет неравенству

$$\beta_1\|x_0\|\leqslant\|y_I\|_Z\leqslant\beta_2\|x_0\|.$$

Определение 2. Систему (1.1) с наблюдателем (1.2) будем называть Δ-*равномерно вполне идентифицируемой*, если существуют числа $\beta_3,\beta_4>0$ такие, что на каждом отрезке $I\in\Delta$ для любого финального состояния x_1 выход $y_I(t,x_0)=C(t)X(t,t_1)x_1$ удовлетворяет неравенству

$$\beta_1\|x_1\|\leqslant\|y_I\|_Z\leqslant\beta_2\|x_1\|.$$

Утверждение 1. *Если система* (1.1) *с выходом* (1.2) *является Δ-равномерно вполне наблюдаемой (идентифицируемой), то она вполне наблюдаема (идентифицируема) на любом отрезке $I\in\Delta$.*

Доказательство. Из неравенства $\|y_I\|_Z\geqslant\beta_1\|x_0\|$ вытекает, что нулевой выход может отвечать лишь нулевому начальному состоянию. В силу конечномерности области определения отображения “состояние — выход” отсюда следует его биективность. Для идентифицируемости доказательство аналогично. □

Укажем другие очевидные свойства введенных понятий.

Утверждение 2. *Если система* (1.1) *с выходом* (1.2) *одновременно является Δ-равномерно вполне наблюдаемой и Δ-равномерно вполне идентифицируемой, то ее матрица Коши вполне ограничена на семействе Δ, т. е. существует такое число $M>0$, что на любом отрезке $I=[t_0,t_1]\in\Delta$ выполнены неравенства $\|X(t_1,t_0)\|\leqslant M$ и $\|X(t_0,t_1)\|\leqslant M$.*

Если матрица Коши системы (1.1) *вполне ограничена на семействе Δ, то система* (1.1) *с выходом* (1.2) *может быть Δ-равномерно вполне наблюдаемой и Δ-равномерно вполне идентифицируемой только одновременно.*

Доказательство. Возьмем любое $I = [t_0, t_1] \in \Delta$ и произвольное начальное состояние $x_0 \in \mathbb{R}^n$. По ним построим финальное состояние $x_1 \in \mathbb{R}^n$ и выход $y_I(t, x_0) = C(t)X(t, t_0)x_0$. По определению имеем неравенства $\beta_1\|x_0\| \leqslant \|y_I\|_Z \leqslant \beta_4\|x_1\| = \beta_4\|X(t_1, t_0)x_0\|$ и $\beta_2\|x_0\| \geqslant \|y_I\|_Z \geqslant \beta_3\|x_1\| = \beta_3\|X(t_1, t_0)x_0\|$, из которых в силу произвольности x_0 выводим оценки $\beta_4/\beta_1 \leqslant \|X(t_1, t_0)\| \leqslant \beta_2/\beta_3$ и, следовательно, $\beta_3/\beta_2 \leqslant \|X(t_0, t_1)\| \leqslant \beta_1/\beta_4$. Полагая $M = \max\{\beta_2/\beta_3, \beta_1/\beta_4\}$, имеем требуемую полную ограниченность. □

Справедливость второй части утверждения вытекает непосредственно из определений.

Замечание 4. Определение равномерной полной наблюдаемости в форме, близкой к определению 1, впервые было дано в [9] (см. также [10, с. 76]) для систем с ограниченными коэффициентами. В этом случае при использовании чебышевской нормы в пространстве Z оценка $\|y_I\|_Z \leqslant \beta_2\|x_0\|$ выполняется автоматически, поэтому определение, приведенное в [9], содержало лишь оценку снизу для нормы выхода системы.

Снова рассмотрим сопряженную систему (1.7), но уже применительно к общей ситуации. Здесь сама система по-прежнему определяется однозначно, но выбор пространства допустимых управлений может быть сделан различным образом. При строго формальном подходе множество допустимых управлений должно совпадать с пространством Z_I^*, топологически сопряженным к пространству измеряемых выходов Z_I. Однако пространство Z_I^* в его канонической реализации может состоять из элементов, отличных от функций, определенных на отрезке I и принимающих значения в $\mathbb{R}^m$. В связи с этим могут возникнуть проблемы с их подстановкой в систему (1.7) (см. пример 2 ниже). Точно такая же проблема может возникнуть и при попытке формального построения сопряженной пары систем в обратном направлении, т. е. при выборе в качестве пространства измеримых выходов Z_I пространства, сопряженного к некоторому заранее заданному пространству управлений.

Поэтому мы будем придерживаться более свободного подхода, который одновременно является и более общим, считая, что на каждом отрезке $I \in \Delta$ задано некоторое нормированное пространство V_I, состоящее из определенных на I вещественных вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^m$. Подмножество пространства V_I, состоящее из всех тех $u \in V_I$, для которых существует интеграл

$$\int_I X^T(s, t_0)C^T(s)u(s)ds,$$

понимаемый как интеграл Лебега от вектор-функции, обозначим через U_I и будем считать множеством допустимых управлений. Норму элемента $v \in V_I$ будем обозначать через $\|v\|_V$.

Используя результаты работы [4] и учитывая замечание 3, будем говорить, что система (1.7) *Δ-равномерно вполне управляема*, если существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что для любого начального состояния x_0 и любого отрезка $I \in \Delta$ найдется управление u, обеспечивающее перевод системы (1.7) из состояния x_0 в состояние 0 на отрезке I и удовлетворяющее оценке $\|u\|_V \leqslant L\|x_0\|$, причем любое управление, обеспечивающее такой переход, удовлетворяет оценке $\|u\|_V \geqslant l\|x_0\|$.

Будем также говорить, что система (1.7) *Δ-равномерно вполне достижима*, если существуют такие числа $L \geqslant l > 0$, что для любого финального состояния x_1 и любого отрезка $I \in \Delta$ найдется управление u, обеспечивающее перевод системы (1.7) из состояния 0 в состояние x_1 на отрезке I и удовлетворяющее оценке $\|u\|_V \leqslant L\|x_1\|$, причем любое управление, обеспечивающее такой переход, удовлетворяет оценке $\|u\|_V \geqslant l\|x_1\|$.

Нетрудно видеть, что из Δ-равномерной полной управляемости системы (1.7) вытекает ее полная управляемость на любом отрезке $I \in \Delta$.

Введем в рассмотрение билинейную форму F_I, задаваемую на каждой паре пространств Z_I и V_I равенством

$$F_I(y, u) = \int_I u^T(s)y(s)\,ds \in \mathbb{R}, \quad y \in Z_I, \quad u \in V_I. \tag{3.2}$$

Интеграл (3.2) гарантированно существует при $y \in Y_I$, $u \in U_I$. Его существование при $y \notin Y_I$, $u \notin U_I$ возможно, но не обязательно.

З а м е ч а н и е 5. Выбор способа задания формы F_I определяется формулой Коши (формулой вариации произвольных постоянных) для линейных систем дифференциальных уравнений и не может быть изменен, несмотря на отличие используемых пространств измеряемых выходов и допустимых управлений от пространства функций, интегрируемых с квадратом. Именно отличие свойств формы F_I от свойств скалярного произведения приводит к введению дополнительных условий для сохранения двойственности между свойствами управляемости и наблюдаемости исходной и сопряженной систем.

Будем говорить, что форма F_I *равномерно ограничена на семействе* Δ, если при некотором $\alpha > 0$ на каждом $I \in \Delta$ для любых $y \in Y_I, u \in U_I$ выполнено неравенство $|F_I(y,u)| \leqslant \alpha\|y\|_Z\|u\|_V$.

Будем говорить, что форма F_I *равномерно невырождена по* y *на семействе* Δ, если при некотором $\gamma > 0$ на каждом $I \in \Delta$ для любого $y \in Y_I$ найдется $u \in U_I$ такое, что $|F_I(y,u)| \geqslant \gamma\|y\|_Z\|u\|_V$.

Нетрудно видеть, что если выполнено равенство $V_I = Z_I$ и форма F_I является скалярным произведением на этих пространствах, то $\alpha = \gamma = 1$, при этом и свойство равномерной ограниченности, и свойство равномерной невырожденности следуют из определения нормы в евклидовом пространстве, т. е. из равенства $\|y\|^2 = F(y,y)$.

З а м е ч а н и е 6. Аналогичным образом определяемая равномерная невырожденность формы F_I по u не представляет интереса, поскольку даже в классическом случае она не имеет места для равномерно вполне управляемых систем, для которых всегда есть ненулевые управления, переводящие нулевое состояние в нулевое.

Теорема 1. *Пусть форма F_I равномерно ограничена и равномерно невырождена по y на семействе Δ. Тогда Δ-равномерная полная управляемость системы* (1.7) *эквивалентна Δ-равномерной полной наблюдаемости системы* (1.1) *с выходом* (1.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (1.7) Δ-равномерно вполне управляема. Возьмем любой отрезок $I = [t_0, t_1] \in \Delta$ и произвольное состояние x_0 системы (1.7). По ним найдем управление u_0, переводящее это состояние в нуль на отрезке I и удовлетворяющее оценке $\|u_0\|_V \leqslant L\|x_0\|$. Тогда

$$x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} X^T(s,t_0)C^T(s)u_0(s)\,ds,$$

и поэтому имеют место соотношения

$$0 \leqslant \|x_0\|^2 = x_0^T x_0 = -\int_{t_0}^{t_1} x_0^T(s)X^T(s,t_0)C^T(s)u_0(s)\,ds = -\int_{t_0}^{t_1} u_0^T(s)C(s)X(s,t_0)x_0\,ds$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} u_0^T(s)y_I(s,x_0)\,ds = -F_I(y_I,u_0) \leqslant \alpha\|u_0\|_V\|y_I\|_Z \leqslant \alpha L\|x_0\|\|y_I\|_Z,$$

из которых вытекает оценка $\|y_I\|_Z \geqslant (\alpha L)^{-1}\|x_0\|$.

Возьмем теперь произвольное $u \in U_I$ и найдем

$$x_u = -\int_{t_0}^{t_1} X^T(s,t_0)C^T(s)u(s)\,ds.$$

Тогда $\|u\|_V \geqslant l\|x_u\|$ и для произвольного $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем соотношения

$$l^{-1}\|\xi\|\|u\|_V \geqslant |\xi^T x_u| = \left|\int_{t_0}^{t_1} \xi^T(s)X^T(s,t_0)C^T(s)u(s)\,ds\right| = \left|\int_{t_0}^{t_1} u^T(s)y_I(s,\xi)\,ds\right|. \tag{3.3}$$

Поскольку форма F_I равномерно невырождена по y на семействе Δ, для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ найдется такое $u_\xi \in U_I$, что выполнено неравенство $|F_I(y_I,u)| \geqslant \gamma\|y_I\|_Z\|u_\xi\|_V$. Отсюда и из (3.3) вытекают оценки $l^{-1}\|\xi\|\|u_\xi\|_V \geqslant |F_I(y_I,u_\xi)| \geqslant \gamma\|y_I\|_Z\|u_\xi\|_V$, означающие, что $\|y_I\|_Z \leqslant (l\gamma)^{-1}\|x_0\|$. Таким образом, для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнены неравенства $(l\gamma)^{-1}\|x_0\| \leqslant \|y_I\|_Z \leqslant (\alpha L)^{-1}\|x_0\|$ и поэтому система (1.1) с выходом (1.2) Δ-равномерно вполне наблюдаема.

Пусть теперь система (1.1) с выходом (1.2) Δ-равномерно вполне наблюдаема. Возьмем любой отрезок $I = [t_0,t_1] \in \Delta$ и произвольное состояние x_0 системы (1.7). Если существует какое-либо управление u, переводящее это состояние в нуль на отрезке I, то для него имеет место соотношение

$$0 \leqslant \|x_0\|^2 = -\int_{t_0}^{t_1} u^T(s)y_I(s,x_0)\,ds \leqslant \alpha\|y_I\|_Z\|u\|_V \leqslant \alpha\beta_2\|x_0\|\|u\|_V,$$

означающее, что выполняется неравенство $\|u\|_V \geqslant (\alpha\beta_2)^{-1}\|x_0\|$.

Покажем, что такие управления существуют и, более того, среди них найдется управление u_0, удовлетворяющее оценке $\|u_0\|_Z \leqslant L\|x_0\|$. Это управление строится точно так же, как аналогичное управление в доказательстве теоремы 2 в [4].

Для всякого $u \in U_I$ обозначим

$$\mathcal{B}_I u = -\int_{t_0}^{t_1} X^T(s,t_0)C^T(s)u(s)\,ds.$$

Из Δ-равномерной полной наблюдаемости системы (1.1) с выходом (1.2) и равномерной невырожденности формы F_I по y на семействе Δ следует, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$, найдется такое $u(\xi) \in U_I$, $\|u(\xi)\| = 1$, что выполнены неравенства $|F_I(y_I,u)| \geqslant \gamma\|y_I\|_Z\|u(\xi)\|_V \geqslant \gamma\beta_1\|\xi\| = \gamma\beta_1$, где $y_I(s) = y_I(s,\xi)$. Поскольку $|F_I(y_I,u)| = \xi^T\mathcal{B}_I u$, имеем $|\xi^T\mathcal{B}_I u(\xi)| \geqslant \gamma\beta_1$.

Проведем следующие пошаговые построения. На первом шаге возьмем любое $\xi_1 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию $\|\xi_1\| = 1$, найдем $u_1 = u(\xi_1)$ и положим $x_1 = \mathcal{B}_I u_1$.

На втором шаге выберем произвольное $\xi_2 \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям $\|\xi_2\| = 1$ и $\xi_2 \perp x_1$, найдем $u_2 = u(\xi_2)$ и положим $x_2 = \mathcal{B}_I u_2$.

На k-м шаге по построенным ранее векторам $x_1,\ldots,x_{k-1}$ образуем пространство W_k как линейную оболочку этих векторов, выберем любое $\xi_k \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условиям $\|\xi_k\| = 1$ и $\xi_k \perp W_{k-1}$, найдем $u_k = u(\xi_k)$ и положим $x_k = \mathcal{B}_I u_k$. Эти построения выполнимы без всяких дополнительных условий и ограничений до тех пор, пока $W_{k-1} \neq \mathbb{R}^n$.

Пусть Ω_k – k-мерный объем системы векторов $x_1,\ldots,x_k$, тогда при каждом $k > 1$ справедливо равенство $\Omega_k = \Omega_{k-1}z_k$, где $z_k = |\xi_k^T x_k|$ – длина проекции вектора x_k на нормаль к подпространству W_{k-1}. При этом $\Omega_1 = \|x_1\| \geqslant z_1$ и $z_k \geqslant \gamma\beta_1$ по построению. Отсюда имеем неравенства

$$\Omega_n = \|x_1\|\prod_{i=2}^n z_i \geqslant \prod_{i=1}^n z_i \geqslant (\gamma\beta_1)^n.$$

Но $\Omega_n = |\det\Xi|$, где Ξ – матрица, составленная из столбцов $x_1,\ldots,x_n$. Таким образом, матрица Ξ невырождена и поэтому векторы $x_1,\ldots,x_n$ составляют базис пространства $\mathbb{R}^n$. Это означает, что $W_n = \mathbb{R}^n$ и проводимый нами процесс построений завершится на шаге с номером n.

Поскольку $\Xi\eta = \eta_1 x_1 + \ldots + \eta_n x_n$, где $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T \in \mathbb{R}^n$, имеем оценки

$$\|\Xi\| = \sup_{\eta \neq 0} \frac{\|\Xi\eta\|}{\|\eta\|} \leqslant \sup_{\eta \neq 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_i\| |\eta_i|}{\|\eta\|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \leqslant n\alpha\beta_2.$$

Кроме того, согласно [5, с. 94] справедливо неравенство

$$\|\Xi^{-1}\| \leqslant \|\Xi\|^{n-1} |\det \Xi|^{-1} \leqslant (n\alpha\beta_2)^{n-1} (\gamma\beta_1)^{-n}.$$

Возьмем любое $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и разложим его по базису $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $x_0 = q_1 x_1 + \ldots + q_n x_n$, т. е. $x_0 = \Xi q$, где $q = (q_1, \ldots, q_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Тогда $q = \Xi^{-1} x_0$ и $\|q\| \leqslant \|\Xi^{-1}\| \|x_0\|$. Для управления $u_0 = q_1 u_1 + \ldots + q_n u_n$ имеем равенство $\mathcal{B}_I u_0 = -x_0$ и оценку $\|u_0\| \leqslant |q_1| \|u_1\| + \ldots + |q_n| \|u_n\| \leqslant n\|q\|$, т. е. управление u_0 переводит состояние x_0 в нуль и удовлетворяет неравенству $\|u_0\| \leqslant \delta \|x_0\|$, где $\delta = n\|\Xi^{-1}\| \leqslant n^n (\alpha\beta_2)^{n-1} (\gamma\beta_1)^{-n}$. □

Аналогичные условия двойственности могут быть сформулированы для пары “достижимость — идентифицируемость”.

Теорема 2. *Пусть форма F_I равномерно ограничена и равномерно невырождена по y на семействе Δ. Тогда Δ-равномерная полная достижимость системы* (1.7) *эквивалентна Δ-равномерной полной идентифицируемости системы* (1.1) *с выходом* (1.2).

Доказательство теоремы 2 почти дословно повторяет доказательства теоремы 1.

4. Примеры

Пример 1. Пусть семейство Δ состоит из всех отрезков длины ϑ, $Z_I = V_I = L_2(I, \mathbb{R}^n)$ для $I \in \Delta$ и $C \in L_2^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Нетрудно проверить, что в этом случае выполнены все условия теорем 1 и 2, и поэтому Δ-равномерная полная наблюдаемость (соответственно, идентифицируемость) системы (1.1) с наблюдателем (1.2) будет эквивалентна Δ-равномерной полной управляемости (соответственно, достижимости) системы (1.7). Кроме того, при сделанных предположениях условия равномерной полной наблюдаемости по Калману и по Тонкову оказываются эквивалентными.

Пример 2. Пусть семейство Δ снова состоит из всех отрезков длины ϑ, $Z_I = V_I = C(I, \mathbb{R}^n)$ для $I \in \Delta$ и $C \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Как известно, пространство Z_I^* в его канонической реализации является пространством регулярных борелевских мер (или, в другой терминологии, зарядов). Соответственно, в таком виде его элементы в систему (1.7) подставлены быть не могут. В другой общепринятой реализации элементами пространства Z_I^* являются функции ограниченной вариации, но в этом случае в систему (1.7) должны подставляться их производные, являющиеся обобщенными функциями, что переводит рассматриваемую систему из класса обыкновенных дифференциальных систем в класс систем с обощенными функциями в правой части и, более того, таких, у которых должна осуществляться некорректная операция умножения функции на обобщенную функцию.

Один из возможных способов выхода из этой ситуации состоит в выборе $V_I = C(I, \mathbb{R}^n)$. Поскольку любую регулярную борелевскую меру можно сколь угодно точно аппроксимировать мерой с непрерывной плотностью, условия теорем 1 и 2 оказываются в этом случае выполненными, что гарантирует эквивалентность Δ-равномерной полной наблюдаемости системы (1.1) с наблюдателем (1.2) и Δ-равномерной полной управляемости системы (1.7).

Пример 3. Пусть семейство Δ произвольно, $V_I = L_\infty(I, \mathbb{R}^n)$ и $C \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$. Здесь выбор Z_I в виде $V_I^* = L_\infty^*(I, \mathbb{R}^n)$ вообще проблематичен, так как $L_\infty^*(I, \mathbb{R}^n)$ является достаточно экзотическим пространством. В то же время можно положить $Z_I = L_1(I, \mathbb{R}^n)$, и тогда $V_I = Z_I^* = L_\infty(I, \mathbb{R}^n)$, что вполне приемлемо.

5. Заключение

В работе предложено определение Δ-равномерной полной наблюдаемости, которое, в отличие от классического определения полной наблюдаемости Р. Калмана и двойственного ему определения Е. Л. Тонкова, не накладывает ограничений на коэффициенты системы и длины отрезков управления. Исследованы простейшие свойства введенного понятия. В теореме 1 установлены достаточные условия двойственности Δ-равномерной полной наблюдаемости и Δ-равномерной полной управляемости, а в теореме 2 — достаточные условия двойственности Δ-равномерной полной достижимости и Δ-равномерной полной идентифицируемости.

Наиболее интересная возможность, открываемая новым определением, состоит в рассмотрении семейств отрезков, длины которых неограниченно растут при удалении в бесконечность. Введенное понятие будет использовано при формулировке условий разрешимости задачи назначения спектра показателей Ляпунова нестационарной вполне управляемой системы, заданной на положительной полуоси и не являющейся равномерно вполне управляемой в обычном смысле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Калман Р., Фалб П., Арбиб М.** Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
2. **Гайшун И.В.** Введение в теорию линейных нестационарных систем / Институт математики НАН Беларуси. Минск, 1999. 409 с.
3. **Kalman R.E.** Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5, no. 1. P. 102–119.
4. **Макаров Е.К., Попова С.Н.** Об определении равномерной полной управляемости // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, вып. 3. С. 326–343. doi: 10.20537/vm170304.
5. **Макаров Е.К., Попова С.Н.** Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
6. **Попова С.Н.** Задачи управления показателями Ляпунова: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02. Ижевск, 1992. 103 с.
7. **Зайцев В.А.** Критерии равномерной полной управляемости линейной системы // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, вып. 2. С. 157–179. doi: 10.20537/vm150202.
8. **Тонков Е.Л.** Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 10. С. 1804–1813.
9. **Васильев В.В., Тонков Е.Л.** Критерий равномерной полной наблюдаемости линейной предельно рекуррентной системы // Проблемы современной теории периодических движений. Ижевск, 1980. № 4. С. 39–42.
10. **Тонков Е.Л.** К теории линейных управляемых систем. Ижевск: Изд-во УдГУ, 2018. 228 с.

Поступила 11.07.2019
После доработки 25.07.2019
Принята к публикации 29.07.2019

Макаров Евгений Константинович
д-р физ.-мат. наук, профессор
зав. отделом дифференциальных уравнений
Институт математики НАН Беларуси,
г. Минск
e-mail: jcm@im.bas-net.by

Попова Светлана Николаевна
д-р физ.-мат. наук
зав. кафедрой дифференциальных уравнений
Удмуртский государственный университет,

г. Ижевск
e-mail: udsu.popova.sn@gmail.com

REFERENCES

1. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. *Topics in mathematical system theory.* International Series in Pure and Applied Mathematics, N Y etc.: McGraw-Hill Book Company, 1969, 358 p. ISBN: 0754321069 . Translated to Russian under the title *Ocherki po matematicheskoi teorii sistem.* Moscow: Mir Publ., 1971, 400 p.
2. Gaishun I.V. *Vvedenie v teoriyu lineinykh nestatsionarnykh sistem* [Introduction to the theory of linear nonstationary systems]. Minsk: Natsional'naya Akademiya Nauk Belarusi, Institut Matematiki, 1999, 409 p. ISBN: 985-6499-10-0 .
3. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control. *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
4. Makarov E.K., Popova S.N. On the definition of uniform complete controllability. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 326–343 (in Russian). doi: 10.20537/vm170304 .
5. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* [Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems]. Minsk: Belarus. Navuka Publ., 2012, 407 p. ISBN: 978-985-08-1393-0 .
6. Popova S.N. *Zadachi upravleniya pokazatelyami Lyapunova* [Problems of controllability of Lyapunov exponents]. Candidate Sci. (Phys.-Math.) Dissertation (01.01.02). Izhevsk, 1992, 103 p.
7. Zaitsev V.A. Criteria for uniform complete controllability of a linear system. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2015, vol. 25, no. 2, pp. 157–179 (in Russian). doi: 10.20537/vm150202 .
8. Tonkov E.L. A criterion of uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system. *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian).
9. Vasil'ev V.V., Tonkov E.L. Criterion of uniform full observability of a linear extremely recurrent system. In: *Problems of the modern theory of periodic motions.* Izhevsk, 1980, no. 4, pp. 39–42 (in Russian).
10. Tonkov E.L. *K teorii lineinykh upravlyaemykh sistem* [On the theory of linear control systems]. Izhevsk: UdGU Publ., 2018, 228 p.

Received July 11, 2019
Revised July 25, 2019
Accepted July 29, 2019

Funding Agency: The work of the second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18–51–41005).

Evgenii Konstantinovich Makarov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, 220072 Belarus, e-mail: jcm@im.bas-net.by .

Svetlana Nikolaevna Popova, Dr. Phys.-Math. Sci., Udmurt State University, Izhevsk, 426034 Russia, e-mail: udsu.popova.sn@gmail.com .

Cite this article as: E. K. Makarov, S. N. Popova. On the definition of uniform complete observability, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 129–140 .