ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

К ТЕОРИИ ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА[1]

Н. Ю. Лукоянов, А. Р. Плаксин

Для динамической системы, движение которой описывается дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла, рассматривается дифференциальная игра на минимакс-максимин показателя качества, который оценивает историю движения, реализующуюся к терминальному моменту времени. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Игра формализуется в классах чистых позиционных стратегий с памятью истории движения. Доказывается, что у такой игры существует цена и седловая точка. Доказательство основано на выборе подходящего функционала Ляпунова — Красовского при построении стратегий управления по методу экстремального сдвига на сопутствующие точки.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, теория управления, дифференциальные игры.

N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. To the theory of positional differential games for neutral-type systems.

For a dynamic system whose motion is described by neutral-type differential equations in Hale's form, we consider a minimax–maximin differential game with a quality index evaluating the motion history realized up to the terminal time. The control actions of the players are subject to geometric constraints. The game is formalized in classes of pure positional strategies with a memory of the motion history. It is proved that the game has a value and a saddle point. The proof is based on the choice of an appropriate Lyapunov–Krasovskii functional in the construction of control strategies by the method of an extremal shift to accompanying points.

Keywords: neutral-type systems, control theory, differential games.

MSC: 49N70, 49N35, 34K40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-118-128

Введение

Работа посвящена развитию теории позиционных дифференциальных игр [1–3] для систем нейтрального типа. Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра, в которой движение динамической системы описывается дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла [4]. Управляющие воздействия игроков стеснены геометрическими ограничениями. Показатель качества процесса управления оценивает историю движения системы, сложившуюся к терминальному моменту времени. Игра формализуется в классах чистых позиционных стратегий в рамках подхода [1–3]. Результатом работы является теорема о существовании цены и седловой точки в рассматриваемой дифференциальной игре.

Вопросы существования цены и оптимальных стратегий в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа изучались ранее в [5–8]. При этом в [8] исследовались линейные системы нейтрального типа. В [5; 7] рассматривались дифференциальные игры для нелинейных систем, но формализованные в классах стратегий управления с поводырем. Наиболее близкий к настоящей статье результат был получен в [6], где рассматривалась дифференциальная игра в классах чистых позиционных стратегий для нелинейных систем нейтрального типа достаточно общего вида. Однако в силу особой техники доказательства, основанной на конструкциях двух поводырей [9; 10], в [6] на игру накладывались дополнительные, вообще

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-3566.2019.1.

говоря обременительные, ограничения: требовалось, чтобы функционал, определяющий показатель качества, и функционал, стоящий под знаком производной в левой части уравнений движения, удовлетворяли условию Липшица, причем последний — с константой меньшей единицы. В настоящей статье эти ограничения сняты. При этом система имеет по сравнению с [5–7] несколько менее общий, но тем не менее достаточно типичный вид. Получить данный результат удалось при помощи классической схемы рассуждений из [3], подобрав подходящий функционал Ляпунова — Красовского [11; 12].

1. Дифференциальная игра

Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру, в которой движение системы описывается дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла [4]

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t)-g(t,x(t-h))\Big)=f(t,x(t),x(t-h),u(t),v(t)),\\ t\in[t_0,\vartheta],\quad x(t)\in\mathbb{R}^n,\quad u(t)\in\mathbb{U},\quad v(t)\in\mathbb{V},\end{gathered}\tag{1.1}$$

а показатель качества имеет вид

$$\gamma=\sigma(x_\vartheta(\cdot)).\tag{1.2}$$

Здесь t — время; $x(t)$ — вектор состояния в момент времени t; t_0 и ϑ — фиксированные начальный и терминальный моменты; $h>0$ — константа запаздывания; $x_\vartheta(\cdot)$ — история движения на промежутке $[\vartheta-h,\vartheta]$: $x_\vartheta(\xi)=x(\vartheta+\xi)$, $\xi\in[-h,0]$; $u(t)$ и $v(t)$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно; $\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{V}\subset\mathbb{R}^l$ — компакты.

Первый игрок нацелен минимизировать показатель (1.2), второй — максимизировать.

Всюду ниже угловыми скобками $\langle\cdot,\cdot\rangle$ обозначаем скалярное произведение векторов, двойными скобками $\|\cdot\|$ — евклидову норму; $\mathrm{Lip}([a,b],\mathbb{R}^n)$ — пространство липшицевых функций из $[a,b]$ в $\mathbb{R}^n$, снабженное равномерной нормой; $\mathrm{Lip}=\mathrm{Lip}([-h,0],\mathbb{R}^n)$. Равномерную норму в Lip обозначаем как $\|\cdot\|_\infty$. Также для $\alpha>0$ принимаем $B(\alpha)=\{x\in\mathbb{R}^n\colon\|x\|\le\alpha\}$.

Полагаем, что для функций $g\colon[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}^n$, $f\colon[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{U}\times\mathbb{V}\mapsto\mathbb{R}^n$ и функционала $\sigma\colon\mathrm{Lip}\mapsto\mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

(g) Для любого $\alpha>0$ найдется такое $\lambda_g=\lambda_g(\alpha)>0$, что имеет место оценка

$$\big\|g(t,x)-g(t',x')\big\|\le\lambda_g\big(|t-t'|+\|x-x'\|\big),\quad t,t'\in[t_0,\vartheta],\quad x,x'\in B(\alpha).$$

(f_1) Функция f непрерывна.

(f_2) Существует такая константа $c_f>0$, что имеет место оценка

$$\big\|f(t,x,y,u,v)\big\|\le c_f\big(1+\|x\|+\|y\|\big),\quad (t,x,y,u,v)\in[t_0,\vartheta]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{U}\times\mathbb{V}.$$

(f_3) Для любого $\alpha>0$ существует такое $\lambda_f=\lambda_f(\alpha)>0$, что справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\big\|f(t,x,y,u,v)-f\big(t,x',y',u,v\big)\big\|\le\lambda_f\big(\|x-x'\|+\|y-y'\|\big),\\ t\in[t_0,\vartheta],\quad x,y,x',y'\in B(\alpha),\quad u\in\mathbb{U},\quad v\in\mathbb{V}.\end{gathered}$$

(f_4) Для любых $t\in[t_0,\vartheta]$ и $x,y,s\in\mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\langle f(t,x,y,u,v),s\rangle=\max_{v\in\mathbb{V}}\min_{u\in\mathbb{U}}\langle f(t,x,y,u,v),s\rangle.$$

(σ) Функционал σ непрерывен.

Зафиксируем некоторые числа $\alpha_0, \lambda_0 > 0$. Определим множество начальных позиций

$$G_0 = \{t_0\} \times \{w(\cdot) \in \mathrm{Lip}\colon \|w(\xi)\| \leq \alpha_0,\ \|x(\xi) - x(\xi')\| \leq \lambda_0 |\xi - \xi'|,\ \xi, \xi' \in [-h, 0]\}.$$

Взяв число c_f из условия (f_2), определим множество допустимых позиций

$$G = \Big\{(t, x_t(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times \mathrm{Lip}\colon x(\cdot) \in \mathrm{Lip}([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n),\ (t_0, x_{t_0}(\cdot)) \in G_0,$$

$$\Big\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t) - g(t, x(t-h))\Big)\Big\| \leq c_f\big(1 + \|x(t)\| + \|x(t-h)\|\big) \text{ при п.в. } t \in [t_0, \vartheta]\Big\}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $x_t(\cdot)\colon x_t(\xi) = x(t+\xi)$, $\xi \in [-h, 0]$.

Пусть выбрана позиция $(\tau, w(\cdot)) \in G$, $\tau < \vartheta$. Допустимыми реализациями управляющих воздействий $u(t)$ и $v(t)$ на промежутке $[\tau, \vartheta]$ будем называть измеримые функции $u(\cdot) : [\tau, \vartheta) \mapsto \mathbb{U}$ и $v(\cdot)\colon [\tau, \vartheta) \mapsto \mathbb{V}$. Действуя, например, по схеме из [13] (см. также [14, P1]), можно показать, что при условиях (g), (f_1)–(f_3) любая пара допустимых реализаций $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ единственным образом порождает из позиции $(\tau, w(\cdot))$ движение $x(\cdot)$ системы (1.1) — функцию из $\mathrm{Lip}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, которая удовлетворяет начальному условию $x(\tau + \xi) = w(\xi)$, $\xi \in [-h, 0]$ и вместе с $u(t)$ и $v(t)$ почти всюду на $[\tau, \vartheta]$ удовлетворяет уравнению (1.1). Кроме того, в силу определения (1.3) множества G для движения $x(\cdot)$ будет справедливо включение

$$(t, x_t(\cdot)) \in G, \quad \tau \in [t, \vartheta]. \tag{1.4}$$

Формализацию дифференциальной игры (1.1), (1.2) будем проводить в классах позиционных стратегий управления игроков, следуя подходу [1–3]. При этом в силу условия (f_4) можно ограничиться классом чистых позиционных стратегий [3, § 8].

Под стратегией управления первого игрока понимаем отображение

$$U = U(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \mathbb{U}, \quad (t, w(\cdot)) \in G, \quad \varepsilon > 0,$$

где ε — параметр точности [3, с. 68].

Пусть зафиксированы позиция $(\tau, w(\cdot)) \in G$, число $\varepsilon > 0$ и разбиение отрезка $[\tau, \vartheta]$:

$$\Delta_\delta = \{t_j : 0 < t_{j+1} - t_j \leq \delta,\ j \in \overline{1, J-1},\ t_1 = \tau,\ t_J = \vartheta\}. \tag{1.5}$$

Тройка $\{U, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ определяет закон управления первого игрока, который в цепи обратной связи формирует кусочно-постоянную (а стало быть, допустимую) реализацию $u(\cdot)$ по правилу

$$u(t) = U(t_j, x_{t_j}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j \in \overline{1, J-1}. \tag{1.6}$$

Из позиции $(\tau, w(\cdot))$ такой закон в паре с допустимой реализацией управления второго игрока $v(\cdot)$ однозначно порождает движение $x(\cdot)$ системы (1.1). Соответствующее этому движению значение показателя качества (1.2) обозначим через $\gamma(\tau, w(\cdot); U, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot))$.

Определим величину гарантированного результата стратегии U

$$\rho_u(\tau, w(\cdot), U) = \varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v(\cdot)} \gamma(\tau, w(\cdot); U, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot)). \tag{1.7}$$

Тогда оптимальным гарантированным результатом первого игрока будет величина

$$\rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)) = \inf_U \rho_u(\tau, w(\cdot), U). \tag{1.8}$$

Стратегию U° называем оптимальной, если справедливо равенство

$$\rho_u(\tau, w(\cdot), U^\circ) = \rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in G.$$

Аналогично, с понятными изменениями, для второго игрока рассматриваем стратегию управления $V = V(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \mathbb{V}$, $(t, w(\cdot)) \in G$, $\varepsilon > 0$, закон управления $\{V, \varepsilon, \Delta_\delta\}$, определяющий кусочно-постоянную реализацию $v(\cdot)$ по правилу

$$v(t) = V(t_j, x_{t_j}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j \in \overline{1, J-1},$$

величину гарантированного результата стратегии V

$$\rho_v(\tau, w(\cdot), V) = \varliminf_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\delta \downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u(\cdot)} \gamma(\tau, w(\cdot); u(\cdot); V, \varepsilon, \Delta_\delta) \tag{1.9}$$

и величину оптимального гарантированного результата второго игрока

$$\rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)) = \sup_V \rho_v(\tau, w(\cdot), V). \tag{1.10}$$

Стратегия управления второго игрока V° оптимальна, если

$$\rho_v(\tau, w(\cdot), V^\circ) = \rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in G.$$

Из соотношений (1.8) и (1.10) вытекает неравенство

$$\rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)) \geq \rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in G. \tag{1.11}$$

В случае, когда справедливо равенство

$$\rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)) = \rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)), \quad (\tau, w(\cdot)) \in G,$$

говорят, что дифференциальная игра (1.1), (1.2) имеет *цену*, а пару оптимальных стратегий $\{U^\circ, V^\circ\}$ называют *седловой точкой игры*.

Теорема. *Дифференциальная игра* (1.1), (1.2) *имеет цену и седловую точку* $\{U^\circ, V^\circ\}$.

Ключевую роль в доказательстве этой теоремы будет играть следующий вспомогательный функционал Ляпунова — Красовского [11; 12].

2. Функционал Ляпунова — Красовского

Опираясь на соотношение (1.3), можно показать существование таких $\alpha_G, \lambda_G > 0$, что

$$\|w(\xi)\| \leq \alpha_G, \quad \|w(\xi) - w(\xi')\| \leq \lambda_G |\xi - \xi'|, \quad \xi, \xi' \in [-h, 0], \quad (t, w(\cdot)) \in G. \tag{2.1}$$

Тогда в силу условий (g) и (f_3) для $\lambda_g = \lambda_g(\alpha_G)$ и $\lambda_f = \lambda_f(\alpha_G)$ имеем

$$\begin{gathered} \|g(t, w(-h)) - g(t', w'(-h))\| \leq \lambda_g \big(|t - t'| + \|w(-h) - w'(-h)\|\big), \\ \|f(t, w(0), w(-h), u, v) - f(t, w'(0), w'(-h), u, v)\| \leq \lambda_f \big(\|w(0) - w'(0)\| + \|w(-h) - w'(-h)\|\big), \\ (t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot)) \in G, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Определим функционал

$$V_\varepsilon(t, p, w(\cdot)) = \kappa_\varepsilon(t, p, w(\cdot)) e^{-2(\lambda_f + \lambda_g/h)(t - t_0)}, \quad (t, p, w(\cdot)) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{Lip}, \tag{2.3}$$

где

$$\kappa_\varepsilon(t, p, w(\cdot)) = \sqrt{\varepsilon^2 + \|p\|^2} + \lambda_f \int_{-h}^{0} \Big(1 - \frac{2\lambda_g \xi}{h}\Big) \|w(\xi)\| \mathrm{d}\xi, \quad \varepsilon > 0. \tag{2.4}$$

Лемма 1. *Пусть* $\tau \in [t_0, \vartheta]$ *и* $\varepsilon > 0$. *Пусть функции* $s(\cdot) \in \mathrm{Lip}([\tau, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ *и* $z(\cdot) \in \mathrm{Lip}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ *удовлетворяют оценкам*

$$\begin{gathered} \|s(t) - z(t)\| \leq \lambda_g \|z(t-h)\|, \quad t \in [\tau, \vartheta], \\ \Big\langle \frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}, s(t) \Big\rangle \leq \lambda_f \big(\|z(t)\| + \|z(t-h)\|\big) \|s(t)\| + \varepsilon^2 \text{ при п.в. } t \in [\tau, \vartheta]. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Тогда будет справедливо неравенство

$$V_\varepsilon(t, s(t), z_t(\cdot)) \leq V_\varepsilon(\tau, s(\tau), z_\tau(\cdot)) + (t - \tau)\varepsilon, \quad t \in [\tau, \vartheta]. \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опираясь на соотношения (2.3) и (2.4), с учетом липшицевости функций $s(\cdot)$ и $z(\cdot)$ можно показать липшицевость функций $\omega_1(t) = \kappa_\varepsilon(t, s(t), z_t(\cdot))$ и $\omega_2(t) = V_\varepsilon(t, s(t), z_t(\cdot))$, $t \in [\tau, \vartheta]$. Тогда, пользуясь оценками (2.5), при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$ имеем

$$\frac{\mathrm{d}\omega_1(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\langle \mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t, s(t)\rangle}{\sqrt{\varepsilon^2 + \|s(t)\|^2}} + \lambda_f \|z(t)\| - \lambda_f(1 + 2\lambda_g)\|z(t-h)\| + \frac{2\lambda_f\lambda_g}{h} \int\limits_{t-h}^{t} \|z(\xi)\| \mathrm{d}\xi$$

$$\leq \varepsilon + 2\lambda_f\|z(t)\| - 2\lambda_f\lambda_g\|z(t-h)\| + \frac{2\lambda_f\lambda_g}{h}\int\limits_{t-h}^{t} \|z(\xi)\|\mathrm{d}\xi \leq \varepsilon + 2\lambda_f\|s(t)\| + \frac{2\lambda_f\lambda_g}{h}\int\limits_{t-h}^{t}\|z(\xi)\|\mathrm{d}\xi.$$

Отсюда выводим оценку

$$\frac{\mathrm{d}\omega_2(t)}{\mathrm{d}t} = \bigg(\varepsilon - 2(\lambda_g/h)\|s(t)\| - 2\lambda_f^2 \int\limits_{t-h}^{t} \|z(\xi)\|\mathrm{d}\xi\bigg) e^{-2(\lambda_f + \lambda_g/h)(t - t_0)} \leq \varepsilon,$$

из которой вытекает неравенство (2.6).

Лемма 2. *Существует такое число* $\lambda_V > 0$, *что для всех* $\varepsilon > 0$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, $p \in \mathbb{R}^n$ *и* $w(\cdot) \in \mathrm{Lip}$ *при условии*

$$\|w(\xi)\| \leq 2\alpha_G, \quad \|w(\xi) - w(\xi')\| \leq 2\lambda_G|\xi - \xi'|, \quad \xi, \xi' \in [-h, 0], \tag{2.7}$$

справедливо неравенство

$$\|w(\cdot)\|_\infty^2 \leq \lambda_V V_\varepsilon(t, p, w(\cdot)). \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии (2.7) существует $\lambda_* > 0$ такое, что

$$\|w(\cdot)\|_\infty^2 \leq \lambda_* \int\limits_{-h}^{0} \|w(\xi)\|\mathrm{d}\xi.$$

Отсюда и из (2.3), полагая $\lambda_V = e^{2(\lambda_f + \lambda_g/h)(\vartheta - t_0)}\lambda_*/\lambda_f$, получаем неравенство (2.8).

3. Доказательство теоремы

По правой части системы (1.1) определим гамильтониан

$$H(t, x, y, s) = \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, x, y, u, v), s\rangle, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x, y, s \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1}$$

и многозначные отображения

$$\begin{aligned} F_+(t, x, y, v) &= \mathrm{co}\big\{f(t, x, y, u, v) \,|\, u \in \mathbb{U}\big\} \subset \mathbb{R}^n, \\ F_-(t, x, y, u) &= \mathrm{co}\big\{f(t, x, y, u, v) \,|\, v \in \mathbb{V}\big\} \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}, \tag{3.2}$$

где символ co означает выпуклую оболочку в $\mathbb{R}^n$. В силу условий (f_1)–(f_4) имеем

(H) Для числа $\lambda_f > 0$ из (2.2) и любых $(t, w(\cdot)), (t, w'(\cdot)) \in G$ и $s \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$|H(t, w(0), w(-h), s) - H(t, w'(0), w'(-h), s)| \leq \lambda_f \big(\|w(0) - w'(0)\| + \|w(-h) - w'(-h)\| \big) \|s\|.$$

(F_1) Многозначные отображения F_+ и F_- выпукло компактнозначны и непрерывны в метрике Хаусдорфа.

(F_2) Для числа $c_f > 0$ из условия (f_2) при любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ и $l \in F_+(t, x, y, v) \cup F_-(t, x, y, u)$ справедливо неравенство

$$\|l\| \leq c_f \big(1 + \|x\| + \|y\| \big).$$

(F_3) Для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, y, s \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\max_{v \in \mathbb{V}} \min_{l \in F_+(t,x,y,v)} \langle l, s \rangle = H(t, x, y, s) = \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{l \in F_-(t,x,y,u)} \langle l, s \rangle.$$

Для $(\tau, w(\cdot)) \in G$ и $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ через $X_+(\tau, w(\cdot), v)$ и $X_-(\tau, w(\cdot), u)$ обозначим множество функций $x(\cdot) \in \mathrm{Lip}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условию $x(\tau + \xi) = w(\xi)$ при $\xi \in [-h, 0]$ и, соответственно, следующим дифференциальным включениям при почти всех $t \in [\tau, \vartheta]$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t) - g(t, x(t-h)) \Big) \in F_+(t, x(t), x(t-h), v), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(x(t) - g(t, x(t-h)) \Big) \in F_-(t, x(t), x(t-h), u).$$

Действуя по схеме из [14, P2], можно показать, что множества $X_+(\tau, w(\cdot), v)$ и $X_-(\tau, w(\cdot), u)$ компактны в $\mathrm{Lip}([\tau - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, причем в силу (1.3) имеет место включение

$$(t, x_t(\cdot)) \in G, \quad t \in [\tau, \vartheta], \quad x(\cdot) \in X_+(\tau, w(\cdot), v) \cup X_-(\tau, w(\cdot), u). \tag{3.3}$$

Из результатов [7] вытекает следующее утверждение.

Утверждение. *Существует такой непрерывный функционал* $\varphi \colon G \mapsto \mathbb{R}$, *что*

$$\varphi(\vartheta, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot)), \quad (\vartheta, w(\cdot)) \in G; \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, w(\cdot)) &\geq \min_{x(\cdot) \in X_+(\tau, w(\cdot), v)} \varphi(t, x_t(\cdot)), \\ \varphi(\tau, w(\cdot)) &\leq \max_{x(\cdot) \in X_-(\tau, w(\cdot), u)} \varphi(t, x_t(\cdot)), \end{aligned} \quad (\tau, w(\cdot)) \in G, \quad t \in [\tau, \vartheta], \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \tag{3.5}$$

Пусть $\varepsilon > 0$, $(t, w(\cdot)) \in G$ и функционалом V_ε определен согласно (2.3). Через $O_\varepsilon(t, w(\cdot))$ обозначим множество позиций $(t, r(\cdot)) \in G$, удовлетворяющих неравенству

$$V_\varepsilon(t, w(0) - g(t, w(-h)) - r(0) + g(t, r(-h)), w(\cdot) - r(\cdot)) \leq \varepsilon (1 + t - t_0). \tag{3.6}$$

С учетом определения (1.3) множества G можно показать, что $O_\varepsilon(t, w(\cdot))$ — компакт в $\{t\} \times \mathrm{Lip}$.

Пусть φ — функционал из утверждения. Положим

$$U^*(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, w(0), w(-h), u, v), w(0) - g(t, w(-h)) - r_*(0) + g(t, r_*(-h)) \rangle, \tag{3.7}$$

где

$$(t, r_*(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{(t, r(\cdot)) \in O_\varepsilon(t, w(\cdot))} \varphi(t, r(\cdot)).$$

Лемма 3. *Справедливо неравенство* $\rho_u(\tau, w(\cdot), U^*) \leq \varphi(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in G$, *где* ρ_u — *величина, определенная согласно* (1.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению (1.7) величины $\rho_u(\tau, w(\cdot), U^*)$ для доказательства леммы достаточно показать, что для любого числа $\zeta > 0$ найдутся такие число $\varepsilon_* = \varepsilon_*(\zeta) > 0$ и функция $\delta_*(\varepsilon) = \delta_*(\zeta, \varepsilon) > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$, что, каковы бы ни были позиция $(\tau, w(\cdot)) \in G$, числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ и $\delta \in (0, \delta_*(\varepsilon))$, разбиение Δ_δ (1.5) и допустимая реализация $v(\cdot)$, для движения $x(\cdot)$ системы (1.1), порожденного из позиции $(\tau, w(\cdot))$ законом управления $\{U^*, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ и реализацией $v(\cdot)$, будет справедливо неравенство

$$\gamma(\tau, w(\cdot); U^*, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot)) = \sigma(x_\vartheta(\cdot)) \leq \varphi(\tau, w(\cdot)) + \zeta. \tag{3.8}$$

В силу условий (f_1), (F_1) и оценок (2.1) найдется такая функция $\delta_f(\varepsilon)$, $\varepsilon \in [0, +\infty)$, что для любых $\varepsilon > 0$, $u \in \mathbb{U}$, $v \in \mathbb{V}$ и $(t, w(\cdot)), (t', w'(\cdot)) \in G$ при условии

$$|t - t'| \leq \delta_f(\varepsilon), \quad \|w(0) - w'(0)\| \leq \delta_f(\varepsilon), \quad \|w(-h) - w'(-h)\| \leq \delta_f(\varepsilon),$$

имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|f(t, w(0), w(-h), u, v) - f(t', w'(0), w'(-h), u, v)\| &\leq \varepsilon, \\ \max_{l \in F_+(t, w(0), w(-h), v)} \min_{l' \in F_+(t', w'(0), w'(-h), v)} \|l - l'\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Пусть выбрано $\zeta > 0$. В силу условия (σ) и оценок (2.1) найдется такое число $\varepsilon_\sigma > 0$, что для любых $(\vartheta, w(\cdot)), (\vartheta, w'(\cdot)) \in G$ при условии $\|w(\cdot) - w'(\cdot)\|_\infty \leq \varepsilon_\sigma$ имеет место неравенство

$$|\sigma(w(\cdot)) - \sigma(w'(\cdot))| \leq \zeta. \tag{3.10}$$

Взяв числа α_G и λ_G из (2.1) и числа λ_g и λ_f из (2.2), обозначим

$$\alpha_s = 2(1 + \lambda_g)\alpha_G, \quad \lambda_s = 2\lambda_g(1 + \lambda_G), \quad c_* = c_f(1 + 2\alpha_G). \tag{3.11}$$

Возьмем число $\lambda_V > 0$ из леммы 2 и положим

$$\varepsilon_* = \frac{\varepsilon_\sigma^2}{\lambda_V^2(1 + \vartheta - t_0)}, \quad \delta_*(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\delta_f(\varepsilon^2/(8\alpha_s))}{1 + \lambda_G}, \frac{\varepsilon^2}{8c_*\lambda_s}, \frac{\varepsilon^2}{16\alpha_s\lambda_f\lambda_G}, \frac{\varepsilon^2}{16\alpha_G\lambda_f\lambda_s}\right\}. \tag{3.12}$$

Пусть зафиксированы позиция $(\tau, w(\cdot)) \in G$, числа

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_*), \quad \delta \in (0, \delta_*(\varepsilon)), \tag{3.13}$$

разбиение Δ_δ (1.5) и допустимая реализация $v(\cdot)$. Рассмотрим движение $x(\cdot)$ системы (1.1), порожденное законом управления $\{U^*, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ и реализацией $v(\cdot)$. По индукции докажем оценку

$$\varphi(t_j, r^j(\cdot)) \leq \varphi(\tau, w(\cdot)), \quad j \in \overline{1, J}, \tag{3.14}$$

где

$$(t_j, r^j(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{(t_j, r(\cdot)) \in O_\varepsilon(t_j, x_{t_j}(\cdot))} \varphi(t_j, r(\cdot)). \tag{3.15}$$

Для $j = 1$ оценка выполняется в силу выбора (3.15) позиции $(\tau, r^1(\cdot))$. Предположим теперь, что оценка (3.14) выполняется для $j = k$, и докажем ее для $j = k + 1$. Определим значение

$$v^k \in \operatorname*{argmax}_{v \in \mathbb{V}} \min_{l \in F_+(t_k, r^k(\cdot), v)} \langle l, x(t_k) - g(t_k, x(t_k - h)) - r^k(0) + g(t_k, r^k(-h))\rangle. \tag{3.16}$$

Согласно неравенствам (3.5) найдется такая функция $y^k(\cdot) \in X_+(t_k, r^k(\cdot), v^k)$, что

$$\varphi(t_{k+1}, y^k_{t_{k+1}}(\cdot)) \leq \varphi(t_k, r^k(\cdot)). \tag{3.17}$$

Определим функции

$$z^k(t) = x(t) - y^k(t), \quad s^k(t) = z^k(t) - g(t, x(t-h)) + g(t, y^k(t-h)), \quad t \in [t_k, \vartheta]. \tag{3.18}$$

Тогда, учитывая выбор (3.12), (3.13) числа δ, обозначения (3.11) и включения (1.4), (3.3), из оценок (2.1), (2.2) и условий (f_2), (F_2) для любых $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ выводим

$$\begin{gathered}
\max\left\{|t - t_k|, \|x_t(\cdot) - x_{t_k}(\cdot)\|_\infty, \|y^k_t(\cdot) - y^k_{t_k}(\cdot)\|_\infty\right\} \le \delta_f(\varepsilon^2/(8\alpha_s)),\\
\|z^k_t(\cdot)\|_\infty \le 2\alpha_G, \quad \|z^k_t(\cdot) - z^k_{t_k}(\cdot)\|_\infty \le \varepsilon^2/(8\lambda_f\alpha_s), \quad \|s^k(t) - z^k(t)\| \le \lambda_g\|z^k(t-h)\|\\
\|s^k(t)\| \le \alpha_s, \quad \|s^k(t) - s^k(t_k)\| \le \lambda_s|t - t_k| \le \min\{\varepsilon^2/(8c_*), \varepsilon^2/(16\alpha_G\lambda_f)\},\\
\|f(t, x(t), x(t-h), u, v)\| \le c_*, \quad \sup\{\|l\|\colon l \in F_+(t, y^k(t), y^k(t-h), v)\} \le c_*.
\end{gathered} \tag{3.19}$$

В силу уравнения (1.1) и включения $y^k(\cdot) \in X_+(t_k, r^k(\cdot), v^k)$ при почти всех $t \in [t_k, t_{k+1}]$ имеем

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}s^k(t)}{\mathrm{d}t}, s^k(t) \right\rangle = \langle f(t, x(t), x(t-h), u(t), v(t)) - l^k(t), s^k(t)\rangle, \quad l^k(t) \in F(t, y^k(t), y^k(t-h), v_k).$$

Отсюда, пользуясь (3.9) и (3.19), выводим

$$\begin{gathered}
\left\langle \frac{\mathrm{d}s^k(t)}{\mathrm{d}t}, s^k(t) \right\rangle \le \langle f(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u(t), v(t)) - l^k_*(t), s^k(t)\rangle + \varepsilon^2/4,\\
\le \langle f(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u(t), v(t)) - l^k_*(t), s^k(t_k)\rangle + \varepsilon^2/2,
\end{gathered}$$

где $l^k_*(t) \in F_+(t_k, r^k(0), r^k(-h), v^k)$. Далее, учитывая определение (3.7) стратегии U^* и правило (1.6) формирования реализации $u(\cdot)$, соответствующей этой стратегии, выбор (3.16) значения v^k, свойства (H) и (F_3), а также определение (3.18) функции $z^k(\cdot)$ и оценки (3.19), получаем

$$\begin{gathered}
\left\langle \frac{\mathrm{d}s^k(t)}{\mathrm{d}t}, s^k(t) \right\rangle \le \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_k, x(t_k), x(t_k - h), u(t), v), s^k(t_k)\rangle - \min_{l \in F(t_k, r^k(0), r^k(-h), v^k)} \langle l, s^k(t_k)\rangle + \varepsilon^2/2\\
= H(t_k, x(t_k), x(t_k - h), s^k(t_k)) - H(t_k, y^k(t_k), y^k(t_k - h), s^k(t_k)) + \varepsilon^2/2\\
\le \lambda_f\bigl(\|z^k(t_k)\| + \|z^k(t_k - h)\|\bigr)\|s^k(t_k)\| + \varepsilon^2/2 \le \lambda_f\bigl(\|z^k(t)\| + \|z^k(t-h)\|\bigr)\|s^k(t)\| + \varepsilon^2.
\end{gathered}$$

Отсюда, учитывая четвертое неравенство в (3.19), заключаем, что для $z(\cdot) = z^k(\cdot)$ и $s(\cdot) = s^k(\cdot)$ выполнены все условия леммы 1. Поэтому справедливо неравенство

$$V_\varepsilon(t_{k+1}, s^k(t_{k+1}), z^k_{t_{k+1}}(\cdot)) \le V_\varepsilon(t_k, s^k(t_k), z^k_{t_k}(\cdot)) + (t_{k+1} - t_k)\varepsilon,$$

которое в силу включения $r^k(\cdot) \in O_\varepsilon(t_k, x_{t_k}(\cdot))$ и неравенства (3.6) означает, что имеет место включение $y^k_{t_{k+1}}(\cdot) \in O_\varepsilon(t_{k+1}, x_{t_{k+1}}(\cdot))$. Таким образом, в согласии с соотношениями (3.15), (3.17) и предположением индукции, выводим

$$\varphi(t_{k+1}, r^{k+1}_{t_{k+1}}(\cdot)) \le \varphi(t_{k+1}, y^k_{t_{k+1}}(\cdot)) \le \varphi(t_k, r^k(\cdot)) \le \varphi(\tau, w(\cdot)).$$

Итак, неравенство (3.14) доказано для всех $j \in \overline{1, J}$.

По лемме 2, учитывая сначала включение $(\vartheta, r^J(\cdot)) \in O_\varepsilon(\vartheta, x_\vartheta(\cdot))$ вместе с неравенством (3.6), а затем соотношения (3.12), (3.13), получаем

$$\begin{gathered}
\|x_\vartheta(\cdot) - r^J(\cdot)\|^2_\infty \le \lambda_V V_\varepsilon(\vartheta, x(\vartheta) - g(\vartheta, x(\vartheta - h)) - r^J(0) + g(\vartheta, r^J(-h)), x_\vartheta(\cdot) - r^j(\cdot))\\
\le \lambda_V(1 + \vartheta - t_0)\varepsilon \le \lambda_V(1 + \vartheta - t_0)\varepsilon_* = \varepsilon^2_\sigma.
\end{gathered}$$

Отсюда, пользуясь неравенствами (3.10) и (3.14), с учетом равенства (3.4) заключаем

$$\sigma(x_\vartheta(\cdot)) \le \sigma(r^J(\cdot)) + \zeta = \varphi(\vartheta, r^J(\cdot)) + \zeta \le \varphi(t, w(\cdot)) + \zeta.$$

Лемма доказана.

Аналогично для второго игрока, полагая

$$V^*(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \operatorname*{argmax}_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \bigl\langle f(t, w(0), w(-h), u, v), r_*(0) - g(t, r_*(-h)) - w(0) + g(t, w(-h)) \bigr\rangle,$$

где

$$(t, r_*(\cdot)) \in \operatorname*{argmax}_{(t, r(\cdot)) \in O_\varepsilon(t, w(\cdot))} \varphi(t, r(\cdot)),$$

можно доказать следующую лемму.

Лемма 4. *Справедливо неравенство* $\rho_v(\tau, w(\cdot), V^*) \ge \varphi(\tau, w(\cdot))$, $(\tau, w(\cdot)) \in G$, *где* ρ_v *— величина, определенная согласно* (1.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Из лемм 3, 4 и соотношений (1.8), (1.10) и (1.11) получаем равенство

$$\rho_u^\circ(\tau, w(\cdot)) = \rho_u(\tau, w(\cdot), U^*) = \rho_v(\tau, w(\cdot), V^*) = \rho_v^\circ(\tau, w(\cdot)),$$

которое показывает, что дифференциальная игра (1.1), (1.2) имеет цену, а пара стратегий $\{U^*, V^*\}$ составляют седловую точку игры. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Осипов Ю.С.** К теории дифференциальных игр систем с последействием // Прикл. математика и механика. 1971. Т. 35, Вып. 2. С. 300–311.
3. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
4. **Hale J.** Theory of functional differential Equations. N Y: Springer-Verlag, 1977.
5. **Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Дифференциальные игры для систем нейтрального типа: аппроксимирующая модель // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 202–214.
6. **Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р.** Существование цены и седловой точки в позиционных дифференциальных играх для систем нейтрального типа // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2016. Т. 22, № 2. С. 101–112. doi: 10.21538/0134-4889-2016-22-2-101-112 .
7. **Гомоюнов М.И., Плаксин А.Р.** Об основном уравнении дифференциальных игр для систем нейтрального типа // Прикл. математика и механика. 2018. Т. 82, вып. 6. С. 675–689. doi: 10.31857/S003282350002733-6 .
8. **Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu.** On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems // Proc. Steklov Inst. Math. 2018. Vol. 301, suppl. 1. P. 44–56. doi: 10.1134/S0081543818050048 .
9. **Кряжимский А.В.** Об устойчивом позиционном управлении в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1978. Т. 42, Вып. 6. С. 963–968.
10. **Максимов В.И.** Дифференциальная игра наведения для систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Задачи динамического управления: сб. ст. / УНЦ АН СССР, 1981. С. 33–45.
11. **Красовский Н.Н.** О применении второго метода А. М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. математика и механика. 1956. Т. 20, вып. 3. С. 315–327.
12. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

13. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 225 с.
14. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во Урал. федерал. ун-та, 2011. 243 с.

Поступила 16.04.2019
После доработки 14.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Лукоянов Николай Юрьевич
д-р физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН,
директор
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: nyul@imm.uran.ru

Плаксин Антон Романович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: a.r.plaksin@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y: Springer. 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8 . Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Osipov Yu.S. On the theory of differential games of systems with aftereffect. *J. Appl. Math. Mech.*, 1971, vol. 35, no. 2, pp. 262–272. doi: 10.1016/0021-8928(71)90032-3 .
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 516 p.
4. Hale J. *Theory of Functional Differential Equations.* N Y: Springer-Verlag, 1977, 365 p. ISBN: 978-1-4612-9892-2 .
5. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Differential games for neutral-type systems: An approximation model. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2015, vol. 291, pp. 190–202. doi: 10.1134/S0081543815080155 .
6. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. Existence of a value and a saddle point in positional differential games for neutral-type systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2017, vol. 299, suppl. 1, pp. 37–48. doi: 10.1134/S0081543817090061 .
7. Gomoyunov M.I., Plaksin A.I. On the basic equation of differential games for neutral-type systems. *Prikl. Mat. Mekh.*, 2018, vol. 82, no. 6, pp. 675–689 (in Russian). doi: 10.31857/S003282350002733-6 .
8. Gomoyunov M.I., Lukoyanov N.Yu. On the numerical solution of differential games for neutral-type linear systems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 301, suppl. 1, pp. 44–56. doi: 10.1134/S0081543818050048 .
9. Kriazhimskii A.V. On stable position control in differential games. *J. Appl. Math. Mech.*, 1980, vol. 42, no. 6, pp. 1055–1060. doi: 10.1016/0021-8928(78)90054-0 .
10. Maksimov V.I. A differential guidance game for a system of neutral type with a deviating argument. *Problems of dynamic control, Collect. Artic.*, Sverdlovsk: UNTs AN SSSR, 1981, pp. 33–45 (in Russian).
11. Krasovskii N.N. On the application of the second method of Lyapunov for equations with time delays. *Prikl. Mat. Meh.*, 1956, vol. 20, pp. 315–327 (in Russian).
12. Krasovsky N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoichivosti dvizheniya* (Some problems of the theory of stability of motion). Moscow: Fizmatgiz Publ., 1959, 211 p.
13. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous right-hand sides.* Mathematics and Its Applications: Soviet Series, vol. 18. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Pub., 1988, 304 p. doi: 10.1007/978-94-015-7793-9 . Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu.* Moscow: Nauka Publ., 1985, 225 p.

14. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* [Functional Hamilton–Jacobi equations and control problems with hereditary information]. Ekaterinburg: Ural Federal University Publ., 2011, 243 p.

Received April 16, 2019
Revised May 14, 2019
Accepted May 20, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian President's Grant for Young Russian Scientists no. MK-3566.2019.1.

Nikolai Yur'evich Lukoyanov, Dr. Phys.-Math. Sci., Corresponding Member of RAS, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia,
e-mail: nyul@imm.uran.ru .

Anton Romanovich Plaksin, Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: a.r.plaksin@gmail.com .

Cite this article as: N. Yu. Lukoyanov, A. R. Plaksin. To the theory of positional differential games for neutral-type systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 118–128 .