ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 517.977

АЛЬТРУИСТИЧЕСКИЙ И АГРЕССИВНЫЙ ТИПЫ ПОВЕДЕНИЯ В НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКОЙ ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ

А. Ф. Клейменов

В настоящей работе результаты предыдущих работ автора, касающихся неантагонистической позиционной дифференциальной игры двух лиц с различными типами поведения игроков, обобщаются на игру трех лиц. Для простоты парадоксальный тип поведения игроками не используется. Дается обобщение понятий альтруистического и агрессивного типов поведения игроков. Как и в игре двух лиц, предполагается, что каждый игрок наряду с выбором позиционной стратегии выбирает также индикаторную функцию-программу. Уточняются правила формирования управлений для каждой тройки типов поведения, а также определение BT-решения. Рассматривается пример игры с динамикой простого движения на плоскости и фазовым ограничением. Допускается, что игроки могут проявлять альтруизм и агрессию по отношению к своим партнерам, причем не исключается случай одновременной агрессии со стороны всех игроков. Дается описание BT-решений игры.

Ключевые слова: позиционная дифференциальная игра трех лиц, терминальные показатели выигрыша, альтруистический и агрессивный типы поведения игроков, решения нэшевского типа.

A. F. Kleimenov. Altruistic and aggressive types of behavior in a nonantagonistic positional differential game of three persons.

In this paper, the results of the author's previous work concerning a nonantagonistic positional differential game of two persons with different types of the players' behavior are generalized to a game of three persons. For simplicity, the paradoxical type of behavior is not used by the players. The notions of altruistic and aggressive behavior types are generalized. As in the two-person game, it is assumed that each player chooses not only a positional strategy but also an indicator program function. The rules for forming controls for each triple of behavior types and the definition of a BT-solution are clarified. An example of a game with the dynamics of simple motion on a plane and a phase constraint is considered. It is assumed that the players can show altruism and aggression towards their partners, and the case of simultaneous aggression from all the players is not excluded. A description of BT-solutions of the game is given.

Keywords: nonantagonistic positional differential game, terminal payoff functionals, altruistic and aggressive behavior types, Nash equilibrium.

MSC: 20D10, 20D25

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-108-117

Введение

Настоящая работа посвящена развитию теории позиционных дифференциальных игр [1;2] на отдельные классы неантагонистических игр (см., например, [3]).

Ранее в работах автора [4–6] была предложена формализация неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц с различными типами поведения игроков. Предполагалось, каждый из двух игроков помимо обычного, *нормального* (nor), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственного функционала выигрыша, может использовать другие типы поведения, введенные в работах [7; 8], а именно *альтруистический* (alt) и *агрессивный* (agg) по отношению к другому игроку типы, а также *парадоксальный* (par) тип. Допускалось, что по ходу игры игроки могли осуществлять переключения своего поведения с одного типа на другой. Предполагалось, что в игре каждый игрок одновременно с выбором позиционной стратегии выбирал также индикаторную функцию, определенную на всем отрезке игры и принимающую значения в множестве $\{nor, alt, agg, par\}$. Индикаторная функция игрока показывала динамику изменения типа поведения, которой придерживается этот игрок. Для каждой пары типов поведения игроков были введены правила формирования управлений. При этом формализация позиционных стратегий в игре основывалась на формализации и результатах общей теории позиционных дифференциальных игр [1; 2; 9]. Было предложено понятие BT-решения. На простых примерах была проиллюстрирована процедура построения BT-решений.

В настоящей работе результаты работ [4–6] обобщаются на неантагонистическую позиционную дифференциальную игру трех лиц. Для простоты парадоксальный тип поведения игроками не используется. Для игры трех лиц дается обобщение понятий альтруистического и агрессивного типов поведения игроков. Как и в игре двух лиц, предполагается, что каждый игрок наряду с выбором позиционной стратегии выбирает также индикаторную функцию-программу. Уточняются правила формирования управлений для каждой тройки типов поведения, а также определение BT-решения. Предложен пример игры с динамикой простого движения на плоскости и фазовым ограничением. Допускается, что первый, второй и третий игроки могут проявлять альтруизм, а также агрессию по отношению к некоторым из своих партнеров в течение некоторых промежутков времени, причем не исключается случай одновременной агрессии со стороны всех игроков. Дается описание BT-решений игры.

1. Неантагонистическая позиционная дифференциальная игра трех лиц. NE - и $P(NE)$-решения

Динамика игры описывается уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v, w), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $u \in Q^u \in comp(\mathbb{R}^p)$; $v \in Q^v \in comp(\mathbb{R}^q)$; $w \in Q^w \in comp(\mathbb{R}^s)$; ϑ — заданный момент окончания игры.

Предполагается, что функция f непрерывна, липшицева по x, удовлетворяет условию подлинейного роста по x, а также условию седловой точки в маленькой игре [1].

Игрок 1, игрок 2 и игрок 3 распоряжаются выбором управлений u, v и w соответственно.

Всем игрокам доступна информация о текущей позиции игры $\{t, x(t)\}$. Используемая здесь формализация позиционных стратегий и порождаемых ими движений аналогична формализации, введенной в [1; 2], за исключением технических деталей [9].

Стратегия игрока 1 отождествляется с парой $U = \{u(t, x, \varepsilon), \beta_1(\varepsilon)\}$, где $u(\cdot)$ — произвольная функция позиции (t, x) и положительного параметра точности ε, принимающая значения в множестве Q^u. Функция $\beta_1 : (0, \infty) \to (0, \infty)$ непрерывная монотонная и удовлетворяет условию $\beta_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Для фиксированного ε величина $\beta_1(\varepsilon)$ является верхней границей шага разбиения отрезка $[t_0, \vartheta]$, которое игрок 1 применяет при формировании пошаговых движений. Аналогично стратегия игрока 2 определяется как $V = \{v(t, x, \varepsilon), \beta_2(\varepsilon)\}$, а стратегия игрока 3 — как $W = \{w(t, x, \varepsilon), \beta_3(\varepsilon)\}$.

Движения, порожденные тройкой (U, V, W) из начальной позиции (t_0, x_0), рассматриваются двух типов: аппроксимационные (пошаговые) движения и идеальные (предельные) движения.

Аппроксимационное движение $x^{\varepsilon}_{\Delta}[t] = x\,[t, t_0, x_0, U, \varepsilon_1, \Delta_1, V, \varepsilon_2, \Delta_2, W, \varepsilon_3, \Delta_3]$ определяется для фиксированных значений параметров точности ε_1, ε_2 и ε_3, для фиксированных разбиений отрезка $[t_0, \vartheta]$: $\Delta_1 = \{t^{(1)}_i\}$, $\Delta_2 = \{t^{(2)}_k\}$ и $\Delta_3 = \{t^{(3)}_l\}$, выбранных игроками и удовлетворяющих условиям $\delta(\Delta_i) \le \beta_i(\varepsilon_i),\ i = 1, 2, 3,$ где $\delta(\Delta_i) = \max\limits_j (t^{(i)}_{j+1} - t^{(i)}_j)$.

Идеальное (предельное) движение $x(t) = x(t, t_0, x_0, U, V, W)$ есть равномерный предел последовательности аппроксимационных движений

$$\{x^{\varepsilon^s}_{\Delta^s}\,[t, t^s_0, x^s_0, U, \varepsilon^s_1, \Delta^s_1, V, \varepsilon^s_2, \Delta^s_2, W, \varepsilon^s_3, \Delta^s_3]\},$$

где $s \to \infty,\ \varepsilon_i^s \to 0,\ t_0^s \to t_0,\ x_0^s \to x_0,\ \delta(\Delta_i^s) \le \beta_i(\varepsilon_i^s),\ i = 1,2,3.$

Законы управления $(U, \varepsilon_1, \Delta_1)$, $(V, \varepsilon_2, \Delta_2)$ и $(W, \varepsilon_3, \Delta_3)$ назовем *согласованными по параметру точности*, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$. Согласованные законы управления порождают согласованные аппроксимационные движения, последовательности которых порождают согласованные предельные движения. Множество предельных движений $X(t_0, x_0, U, V, W)$ есть компакт в пространстве $C[t_0, \vartheta]$.

Функционал выигрыша игрока i , берется в виде

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)), \quad i = 1,2,3, \tag{1.2}$$

где σ_i — непрерывная функция.

Таким образом, определена классическая неантагонистическая позиционная дифференциальная игра (НПДИ) [3; 9]. Кроме того допускаем наличие в игре фазовых ограничений.

О п р е д е л е н и е 1. Тройка стратегий (U^N, V^N, W^N) образует нэшевское решение (NE-решение) игры НПДИ, если для любого движения $\overline{x}(\cdot) \in X(t_0, x_0, U^N, V^N, W^N)$, любого $\tau \in [t_0, \vartheta]$, любых стратегий U, V и W выполнены следующие неравенства:

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U, V^N, W^N)) \le \min_{x(\cdot)} \sigma_1(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W^N)),$$

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V, W^N)) \le \min_{x(\cdot)} \sigma_2(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W^N)),$$

$$\max_{x(\cdot)} \sigma_3(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W)) \le \min_{x(\cdot)} \sigma_3(x(\vartheta, \tau, \overline{x}(\tau), U^N, V^N, W^N)),$$

причем операции min производятся на множествах согласованных движений, а операции max — на соответствующих множествах всех движений.

О п р е д е л е н и е 2. NE-решение (U^P, V^P, W^P), неулучшаемое по Парето относительно величин I_1, I_2, I_3 (1.2), называется $P(NE)$-решением НПДИ.

Введем вспомогательные антагонистические позиционные дифференциальные игры Γ_1, Γ_2 и Γ_3. Динамика каждой игры описывается уравнением (1.1). В игре Γ_i, $i = 1,2,3$, игрок i максимизирует свой функционал I_i (1.2) , а два других игрока совместно противодействуют ему. В [1; 2] показано, что игры Γ_1, Γ_2 и Γ_3 имеют универсальные седловые точки

$$u^{(i)}(t, x, \varepsilon),\ v^{(i)}(t, x, \varepsilon),\ w^{(i)}(t, x, \varepsilon) \tag{1.3}$$

и непрерывные функции цены $\gamma_i(t, x)$, $i = 1,2,3$.

Свойство универсальности стратегий (1.3) означает, что они являются оптимальными не только для фиксированной начальной позиции (t_0, x_0), но и для любой позиции (t_*, x_*), рассматриваемой в качестве начальной. Нетрудно видеть, что величина $\gamma_i(t, x)$ представляет собою гарантированный выигрыш игрока i в позиции (t, x) игры.

Для каждой NE- и $P(NE)$- траектории $x^*(t)$ имеет место следующее свойство [9].

С в о й с т в о A. Точка $t = \vartheta$ является точкой максимума функции гарантированного выигрыша игрока i, вычисленной вдоль этой траектории, т. е.

$$max_{t \in [t_0, \vartheta]} \gamma_i(t, x^*(t)) = \gamma_i(\vartheta, x^*(\vartheta)), \quad i = 1,2,3. \tag{1.4}$$

2. Типы поведения

В работах [4–6] для игры двух лиц дополнительно предполагалось, что помимо обычного, *нормального* (nor), типа поведения, ориентированного на максимизацию собственных функционалов выигрыша, игроки могут использовать другие типы поведения, а именно *альтруистический* и *агрессивный* [7; 8].

Эти два типа поведения для игры трех лиц формализуем следующим образом.

Определение 3. Скажем, что игрок i, $i \in \{1,2,3\}$, придерживается на отрезке $[t_*, t^*]$ альтруистического типа поведения по отношению к игроку j, $j \in \{1,2,3\}, j \neq i$ (далее обозначаем этот тип через $alt(j)$), если на этом отрезке действия игрока i направлены на максимизацию функционала I_j (1.2) игрока j.

Определение 4. Скажем, что игрок $i, i \in \{1,2,3\}$, придерживается на отрезке $[t_*, t^*]$ агрессивного типа поведения по отношению к игроку j, $j \in \{1,2,3\}, j \neq i$ (далее обозначаем этот тип через $agg(j)$), если на этом отрезке действия игрока i направлены на минимизацию функционала I_j (1.2) игрока j.

Таким образом, игрок i в каждой позиции игры делает выбор из 5 возможных типов поведения: nor, $alt(j_1)$, $alt(j_2)$, $agg(j_1)$, $agg(j_2)$, где $j_1 \neq i, j_2 \neq i$.

Заметим, что агрессивный тип поведения игроков фактически используется в НПДИ как двух, так и трех лиц в форме стратегий наказания, содержащихся в структуре решений игры (см., например, [9]).

Приведенные определения характеризуют экстремальные типы поведения игроков. В действительности же реальные индивидуумы ведут себя, как правило, частично нормально, частично альтруистично и частично агрессивно. Другими словами, смешанные типы поведения, по-видимому, больше согласуются с реальностью.

Если каждого игрока ограничить "чистыми" типами поведения, то в рассматриваемой игре трех лиц с динамикой (1.1) и с функционалами I_1, I_2 и I_3 (1.2) существует 125 возможных троек типов поведения. При этом в некоторых тройках интересы игроков совпадают и игроки решают командные задачи управления. В некоторых тройках игроки (коалиции игроков) имеют противоположные интересы и, следовательно, разыгрываются антагонистические дифференциальные игры. Оставшиеся тройки определяют неантагонистические дифференциальные игры двух игроков (коалиций игроков) и трех игроков.

Идея использования игроками возможности переключения по ходу игры своего поведения с одного типа на другой была применена для игры с кооперативной динамикой в работе [8] и для повторяющейся биматричной 2×2 игры в работе [10], что позволило получить новые решения в этих играх.

Распространение указанного подхода на неантагонистические позиционные дифференциальные игры трех лиц приводит к новым постановкам задач. В частности, представляет интерес, как трансформируются выигрыши игроков, получаемые на нэшевских решениях. Актуальной становится задача минимизации времени "ненормального" поведения при условии достижения результата, более хорошего, чем при нормальном поведении игроков.

3. Формализация игры НПДИсТП. BT-решение игры

Итак, игроки могут по ходу игры переключаться с одного типа поведения на другой. Такую игру будем называть *неантагонистической позиционной дифференциальной игрой с типами поведения игроков* (НПДИсТП).

Далее будем полагать, что одновременно с выбором позиционной стратегии игрок i, $i = 1,2,3$, выбирает также индикаторную функцию, определенную на отрезке $[t_0, \vartheta]$ и принимающую значение в множестве $\Omega(i) = \{nor, alt(j_1), alt(j_2), agg(j_1), agg(j_2)\}$, где $j_1 \neq i, j_2 \neq i$. Обозначим индикаторную функцию игрока i символом $\alpha_i : [t_0, \vartheta] \to \Omega(i)$, $i = 1,2,3$. Если индикаторная функция какого-то игрока принимает значение, скажем, $alt(j_1)$ на некотором отрезке времени, то этот игрок действует на этом отрезке как альтруист по отношению к игроку j_1. Заметим также, что если индикаторные функции всех трех игроков тождественно равны значению nor на всем промежутке игры, то имеем классическую НПДИ.

Таким образом, в рассматриваемой игре с различными типами поведения игроков игрок 1 управляет выбором пары *действий* {позиционная стратегия, индикаторная функция}:

$(U,\ \alpha_1(\cdot))$, игрок 2 управляет выбором пары действий $(V,\ \alpha_2(\cdot))$, а игрок 3 управляет выбором пары действий $(W,\ \alpha_3(\cdot))$.

Как упоминалось выше, при выборе игроками различных типов поведения могут сложиться четыре вида задач принятия решений: задача командного управления, антагонистическая игра, неантагонистическая игра двух или трех лиц. Будем считать, что игроки в каждой из четырех указанных ситуаций руководствуются следующим правилом.

П р а в и л о 1. Если на промежутке $(\tau_1, \tau_2) \subset [t_0, \vartheta]$ индикаторные функции игроков сгенерировали неантагонистическую игру двух или трех лиц, то на этом промежутке игроки выбирают одно из $P(NE)$- решений сложившейся игры. Если сложилась антагонистическая игра, то в качестве решения игроки реализуют седловую точку игры. Наконец, если сложилась задача командного управления, то игроки выбирают одну из троек управлений, обеспечивающих неубывание вдоль траектории функции цены γ_i, где i — номер игрока, функционал которого максимизируется.

Вообще говоря, одна и та же часть траектории может быть отслежена несколькими тройками типов поведения игроков, причем эти тройки могут отличаться друг от друга суммарным временем использования *ненормальных* типов. Естественно ввести следующее правило.

П р а в и л о 2. При наличии нескольких троек типов поведения, отслеживающих некоторую часть траектории, игроки выбирают ту из них, которая минимизирует суммарное время использования ненормальных типов поведения.

Введем теперь определение понятия решения игры НПДИсТП. Отметим, что множество движений, порожденных тройкой действий $\{(U, \alpha_1(\cdot)), (V, \alpha_2(\cdot)), (W,\ \alpha_3(\cdot))\}$, совпадает с множеством движений, порожденных тройкой (U, V, W) в соответствующей НПДИ.

О п р е д е л е н и е 5. Тройка действий $\{(U^0, \alpha_1^0(\cdot)), (V^0, \alpha_2^0(\cdot)), (W^0,\ \alpha_3^0(\cdot))\}$, согласованная с правилом 1, образует BT-решение игры НПДИсТП, если найдется порожденная тройкой траектория $x^{BT}(\cdot)$ и найдется $P(NE)$-решение в соответствующей игре НПДИ, порождающее траекторию $x^P(\cdot)$, такие, что выполнены неравенства

$$\sigma_i(x^{BT}(\vartheta)) \geq \sigma_i(x^P(\vartheta)), \quad i = 1, 2, 3,$$

причем по крайней мере одно из неравенств строгое.

О п р е д е л е н и е 6. BT-решение $\{(U^P, \alpha_1^P(\cdot)), (V^P, \alpha_2^P(\cdot)), (W^P,\ \alpha_3^P(\cdot))\}$, неулучшаемое по Парето относительно величин I_1, I_2, I_3 (1.2), назовем $P(BT)$-решением игры НПДИсТП.

З а д а ч а 1. Найти множество BT-решений.

З а д а ч а 2. Найти множество $P(BT)$-решений.

В общем случае задачи 1 и 2 решений не имеют. Однако вполне ожидаемо, что использование игроками в игре НПДИсТП типов поведения, отличных от нормального, может в ряде случаев привести к исходам, более предпочтительным для них, чем в соответствующей игре НПДИ только с нормальным типом поведения.

Учитывая определения 5 и 6, а также свойство A (1.4) $P(NE)$-траекторий, приходим к следующему алгоритму.

А л г о р и т м построения BT-решений игры НПДИсТП.

Ш а г 1. Найти множество $P(NE)$-траекторий игры НПДИ.

Ш а г 2. В множестве достижимости системы (1.1), построенном для момента ϑ, найти все точки z, для которых выполнены неравенства

$$\sigma_i(z) \geq \sigma_i(a), \quad i = 1, 2, 3, \quad \sigma_1(z) + \sigma_2(z) + \sigma_3(z) > \sigma_1(a) + \sigma_2(a) + \sigma_3(a), \tag{3.1}$$

где $a = x^*(\vartheta)$, $x^*(\cdot)$ — $P(NE)$-траектория.

Ш а г 3. Для определенной на шаге 2 точки z (если таковая найдется) построить индикаторные функции-программы игроков, обеспечивающие движение по траектории L, переводящей систему (1.1) из точки x_0 в точку z.

Ш а г 4. Найти тройку стратегий игроков, порождающую предельное движение L и согласованную с построенными индикаторными функциями.

Алгоритм иллюстрируется на примере в следующем разделе.

4. Пример

Пусть динамика (1.1) имеет вид

$$\dot{x} = u + v + w, \quad x, u, v, w \in \mathbb{R}^2, \quad \|u\| \leq 2\mu, \quad \|v\| \leq \mu, \quad \|w\| \leq \mu, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta, \quad x(t_0) = x_0, \tag{4.1}$$

а функционалы выигрыша (1.2) суть

$$I_i = \sigma_i(x(\vartheta)) = M - \|x(\vartheta) - a^{(i)}\|, \quad i = 1, 2, 3,$$

т. е. игрок i стремится привести точку $x(\vartheta)$ как можно ближе к целевой точке $a^{(i)}$.

Зададим следующие начальные условия и значения параметров: $t_0 = 0$, $x_0 = (0, 0)$, $\vartheta = 3.0$, $\mu = 0.5$, $a^{(1)} = (10, 0)$, $a^{(2)} = (-8, 6)$, $a^{(3)} = (-2, 10)$, $M = 20$ (рисунок).

Опишем фазовые ограничения. Траекториям системы (4.1) запрещается заходить во внутренность множества S, которое получается удалением из пятиугольника $abcde$ отрезка ag. Множество S состоит из двух частей S_1 и S_2, т. е. $S = S_1 \cup S_2$. Координаты точек, задающих фазовые ограничения, следующие: $a = (0, 0)$, $b = (-2, 1.5)$, $c = (-2, 3.5)$, $d = (0, 5)$, $e = (4, 0)$, $g = (2, 2.5)$. Можно проверить, что точка b лежит на отрезке $a^{(2)}a$, а точка g — на отрезке ed.

Множество достижимости системы (4.1), построенное для момента $\vartheta = 3.0$, содержит точки, ограниченные двухзвенником bae и дугой окружности радиуса 6, а также дугами, соединяющими эту окружность со сторонами cd и de пятиугольника (см. рисунок). Первая (составная) дуга состоит из дуги окружности с центром в точке b и радиусом $r_1 = 6 - |ab|$ и дуги окружности с центром в точке c и радиусом $r_2 = 6 - |ab| - |bc|$. Вторая (также составная) дуга состоит из дуги окружности с центром в точке g и радиусом $r_3 = 6 - |ag|$ и дуги окружности с центром в точке e и радиусом $r_4 = 6 - |ae|$. Кроме того, в множество достижимости входят точки отрезка ag.

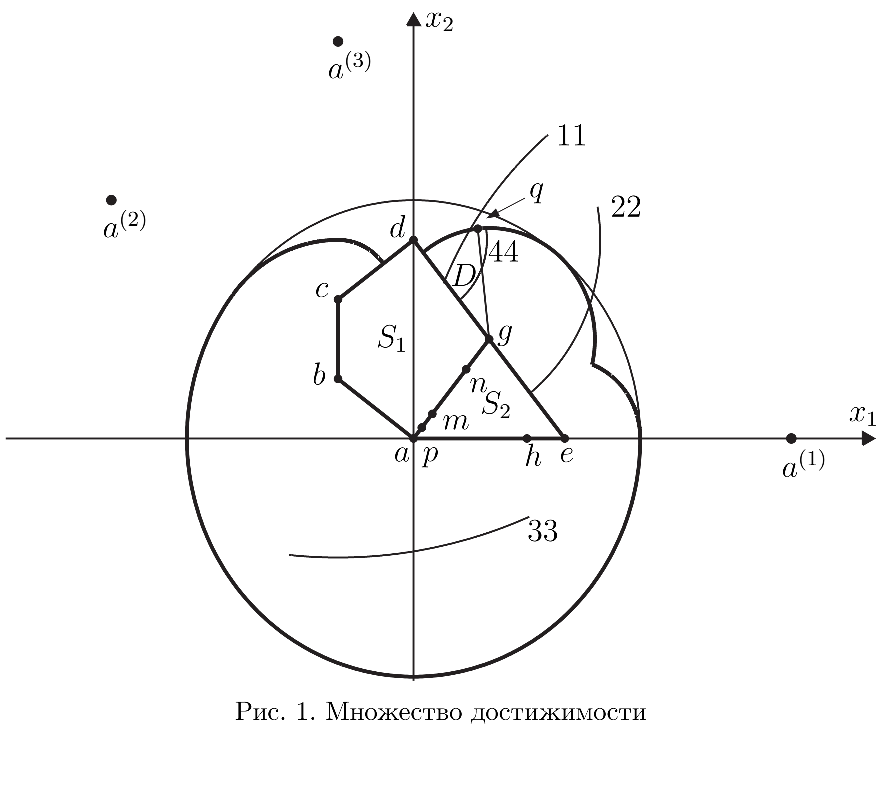

Рис. 1. Множество достижимости

Функции цены $\gamma_1(t,x)$, $\gamma_2(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$, $0 \le t \le \vartheta$, $x \in \mathbb{R}^2 \backslash S$ (1.3), вспомогательных антагонистических игр Γ_1, Γ_2 и Γ_3 в данном примере будут определяться как

$$\gamma_1\left(t,x\right) = \begin{cases} 20 - \|x - a^{(1)}\|, & \text{если } xa^{(1)} \bigcap intS = \varnothing, \\ 20 - \rho_S\left(x, a^{(1)}\right) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(здесь через $\rho_S\left(x, a^{(1)}\right)$ обозначено наименьшее из двух расстояний от точки x до точки $a^{(1)}$, одно из которых вычисляется при обходе множества S по часовой стрелке, а другое — при обходе S против часовой стрелки) и как

$$\gamma_i\left(t,x\right) = \begin{cases} 20 - \|x - a^{(i)}\| - (\vartheta - t), & \text{если } xa^{(i)} \bigcap intS = \varnothing, \\ 20 - \rho_S\left(x, a^{(i)}\right) - (\vartheta - t) & \text{в противном случае} \end{cases}$$

(здесь $i = 2,3$, а через $\rho_S\left(x, a^{(i)}\right)$ обозначено наименьшее из двух расстояний от точки x до точки $a^{(i)}$, одно из которых вычисляется при обходе множества S по часовой стрелке, а другое — при обходе S против часовой стрелки).

Перейдем теперь к построению BT-решений игры НПДИсТП в соответствии с алгоритмом из предыдущего раздела.

На шаге 1 можно проверить, что в игре НПДИ все точки отрезка ah, где $h = (3,0)$, и только они, являются концами траекторий, порожденных $P(NE)$-решениями. При этом в точке h заканчивается $P(NE)$-траектория, наилучшая для игрока 1, а в точке a — $P(NE)$-траектория, наилучшая для игроков 2 и 3 одновременно.

Далее ограничиваемся построением BT-решений, отвечающих только $P(NE)$-решению, приводящему в точку a (см. определение 5). Соответствующая $P(NE)$-траектория имеет вид $x(t) \equiv 0$, $t \in [0,3]$ (стационарная точка a). Выигрыши игроков на ней следующие: $I_1 = 10.0; I_2 = 10.0; I_3 = 11.0$.

На шаге 2 в множестве достижимости найдем все точки z, для которых выполнены неравенства (3.1). Такие точки составят множество D (см. рисунок). С "севера" оно ограничено границей множества достижимости, с "востока" составной дугой 44 окружности с центром в точке d и радиусом $10 - |a^{(2)}d|$ и окружности с центром в точке $a^{(2)}$ и радиусом 10. С "юга" множество D ограничено частью отрезка ed, а с "запада" дугой 11 окружности с центром в точке $a^{(1)}$ и радиусом 10. При этом на дуге 11 нестрогое неравенство (3.1) при $i = 1$ превращается в равенство, а на дуге 44 превращается в равенство нестрогое неравенство (3.1) при $i = 2$. В остальных точках множества D нестрогие неравенства (3.1) при $i \in \{1,2,3\}$ будут строгими.

Шаг 3 опишем только для BT-решения, приводящего в точку $q \in D$, лежащую на границе множества достижимости. Рассмотрим траекторию agq. Выигрыши игроков на ней составляют $I_1 = 10.236$, $I_2 = 10.175$, $I_2 = 13.956$, т. е. каждый игрок выигрывает больше, чем на $P(NE)$-траектории, приводящей в точку a. Требуется построить индикаторные функции-программы игроков, обеспечивающие движение по этой траектории.

На отрезке ag найдем точку m, равноудаленную от точки $a^{(1)}$ как при обходе множества S_2 по часовой стрелке, так и при обходе S_2 против часовой стрелки. Найдем также точку n, равноудаленную от точки $a^{(2)}$ как при обходе множества S_1 по часовой стрелке, так и при обходе S_1 против часовой стрелки. Наконец, найдем также точку p, равноудаленную от точки $a^{(3)}$ как при обходе множества S_1 по часовой стрелке, так и при обходе S_1 против часовой стрелки. Результаты вычислений: $m = (0.494, 0.618)$, $n = (1.395, 1.744)$, $p = (0.219, 0.273)$.

Отметим, что при движении по траектории agq с максимальной скоростью при $t \in [0,3]$ момент попадания в точку p будет определяться как $t = 0.175$, в точку m — как $t = 0.396$, в точку n — как $t = 1.116$, в точку g — как $t = 1.601$, а в точку q — как $t = 3.0$.

Нетрудно проверить, что при таком движении по траектории agq на промежутке $t \in [0, 0.175]$ все три функции, $\gamma_1(t,x)$, $\gamma_2(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$, монотонно убывают; при движении на промежутке $t \in [0.175, 0.396]$ функции $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_2(t,x)$ продолжают убывать, а функция $\gamma_3(t,x)$

возрастает; при движении на промежутке $t \in [0.396, 1.116]$ функция $\gamma_2(t,x)$ продолжает убывать, а функции $\gamma_1(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$ возрастают; при движении на промежутке $t \in [1.116, 1.601]$ все три функции возрастают; наконец, на оставшемся промежутке $t \in [1.601, 3]$ функция $\gamma_1(t,x)$ убывает, а функции $\gamma_2(t,x)$ и $\gamma_3(t,x)$ возрастают.

Получаем, что на участке ap траектории тройка типов поведения $(agg(2), agg(3), agg(1))$ является одной из троек, определяющих командную задачу управления, в которой движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки p. На следующем участке pm тройка $(alt(3), alt(3), nor)$ (с минимальным суммарным временем использования ненормальных типов поведения) также определяет командную задачу управления, в которой движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки m. На участке mn тройка $(nor, alt(3), nor)$, минимизирующая суммарное время использования ненормальных типов поведения, снова определяет командную задачу управления, в которой движение представляет максимальный сдвиг в направлении точки n. На следующем участке ng тройка (nor, nor, nor) обеспечивает максимальный сдвиг в направлении точки g. Наконец, на участке gq тройка $(alt(2), nor, nor)$ порождает неантагонистическую игру двух лиц.

Таким образом, построены индикаторные функции-программы игроков

$$\alpha_1^\circ(t) = \{agg(2), t \in [0, 0.175);\ alt(3), t \in [0.175, 0.396)\}, \tag{4.2}$$

$$\alpha_1^\circ(t) = \{nor, t \in [0.396, 1.601);\ alt(2), t \in [1.601, 3]\},$$

$$\alpha_2^\circ(t) = \{agg(3), t \in [0, 0.175);\ alt(3), t \in [0.175, 1.116);\ nor, t \in [1.116, 3]\}. \tag{4.3}$$

$$\alpha_3^\circ(t) = \{agg(1), t \in [0, 0.175);\ nor, t \in [0.175, 3]\}. \tag{4.4}$$

На шаге 4 через $(U^\circ, V^\circ, W^\circ))$ обозначим тройку стратегий игроков, порождающую предельное движение agq при $t \in [0, 3]$ и согласованную с построенными индикаторными функциями.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Тройка действий* $\{(U^\circ, \alpha_1^\circ(\cdot)), (V^\circ, \alpha_2^\circ(\cdot)), (W^\circ, \alpha_3^\circ(\cdot))\}$ (4.2)–(4.4) *доставляет* $P(BT)$*-решение.*

Следуя схеме доказательства утверждения 1, приходим к следующему утверждению.

Утверждение 2. *Множество* D *состоит из точек, которые являются концами траекторий, порожденных* BT*-решениями игры.*

Заключение

В статье мы используем сложное переключение, а именно с одного типа поведения на другой, меняя природу проблемы оптимизации — с неантагонистических игр двух или трех лиц к играм с нулевой суммой или задачам командного управления и наоборот. И эти переключения выполняются в соответствии с предварительно выбранными индикаторными функциональными программами. Каждый игрок контролирует выбор пары действий {позиционная стратегия, индикаторная функция}. Таким образом, возможности каждого игрока в общем случае расширились, и можно ввести новую концепцию игрового решения ($P(BT)$-решения), в которой все три игрока увеличивают свои выигрыши по сравнению с выигрышами в равновесии по Нэшу в игре без переключения типов поведения. Для игроков выгодно реализовать $P(BT)$-траекторию, поэтому они будут следовать заявленным индикаторным функциям-программам (4.2)–(4.4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. . М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 516 с.
3. **Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.** Теория игр. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
4. **Клейменов А.Ф.** Альтруистическое поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Математическая теория игр и ее приложения. 2015. Т. 7, вып. 4. С. 40–55.
5. **Клейменов А.Ф.** Агрессивное поведение в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Математическая теория игр и ее приложения. 2016. Т. 8, вып. 4. С. 63–78.
6. **Kleimenov, A.F.** Altruistic and aggressive types of behavior in a non-antagonistic positional differential two-person game // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss 32. P. 219–224.
7. **Клейменов А.Ф.** О решениях в неантагонистической позиционной дифференциальной игре // Прикл. математика и механика. 1997. Т. 61, вып. 5. С. 739–746.
8. **Kleimenov, A.F., Kryazhimskii A.V.** Normal behavior, altruism and aggression in cooperative game dynamics. Interim Report IR-98-076. Laxenburg: IIASA, 1998. 47 p.
9. **Клейменов А.Ф.** Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука, 1993. 185 с.
10. **Kleimenov, A.F.** An approach to building dynamics for repeated bimatrix 2×2 games involving various behavior types // Dynamic and Control / ed. G. Leitman. London: Gordon and Breach, 1998. P. 195–204.

Поступила 16.05.2019
После доработки 5.07.2019
Принята к публикации 15.07.2019

Клейменов Анатолий Федорович
д-р физ.-мат.наук, профессор,
ведущий научный сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: kleimenov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry.* Moscow: Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow: Nauka Publ., 1985, 520 p.
3. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. *Teoriya igr* [Game theory]. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg Publ., 2012, 432 p. ISBN: 978-5-9775-0484-3 .
4. Kleimenov A.F. Altruistic behavior in a nonantagonistic positional differential game. *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 4, pp. 762–769. doi: 10.1134/S0005117917040178 .
5. Kleimenov A.F. Aggressive behavior in a non-antagonistic positional differential game. *Autom. Remote Control*, 2019, vol. 80, no. 1, pp. 171–179. doi: 10.1134/S0005117919010156 .
6. Kleimenov A.F. Altruistic and aggressive types of behavior in a non-antagonistic positional differential two-person game // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss 32. P. 219–224.
7. Kleimenov A.F. On solutions in a nonantagonistic positional differential game. *J. Appl. Math. Mech.*, 1997, vol. 61, no. 5, pp. 717–723. doi: 10.1016/S0021-8928(97)00094-4 .
8. Kleimenov, A.F., Kryazhimskii A.V. *Normal Behavior, Altruism and Aggression in Cooperative Game Dynamics.* Interim Report IR-98-076, Laxenburg: IIASA, 1998, 47 p.
9. Kleimenov, A.F. *Nonantagonistic positional differential games* (Neantagonisticheskie pozitsionnye differentsial'nye igry). Ekaterinburg: Nauka Publ., 1993, 185 p. ISBN: 5-7691-0353-1 .

10. Kleimenov, A.F. An Approach to Building Dynamics for Repeated Bimatrix 2×2 Games Involving Various Behavior Types. In: *Dynamics and Control*, Leitman G. etc (eds), London: Gordon and Breach, 1998, ISBN: 90-5699-172-8 , pp. 195–204.

Received May 16, 2019
Revised July 5, 2019
Accepted July 15, 2019

Anatolii Fedorovich Kleimenov, Dr. Phys.-Math. Sci., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620083 Russia, e-mail: kleimenov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. F. Kleimenov. Altruistic and aggressive types of behavior in a nonantagonistic positional differential game of three persons, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 108–117 .