ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 3 2019

УДК 523.46/.481

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОДМНОГООБРАЗИЯ СФЕР И КОНУСОВ[1]

М. И. Зеликин, Ю. С. Осипов

В работе изучаются пересечения конусов нулевого индекса со сферами. Найдены поля соответствующих минимальных многообразий. В частности, рассмотрим конус $\mathbb{K} = \{x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$. Его пересечение со сферой $\mathbb{S}^3 = \sum_{i=0}^3 x_i^2$ часто называют клиффордовым тором $\mathbb{T}$, потому что Клиффорд первым заметил, что метрика этого тора как подмногообразия $\mathbb{S}^3$ с индуцированной из $\mathbb{S}^3$ метрикой является евклидовой. Помимо этого тор $\mathbb{T}$, рассматриваемый как подмногообразие $\mathbb{S}^3$, является минимальной поверхностью. Аналогично можно рассмотреть конус $\mathcal{K} = \{\sum_{i=0}^3 x_i^2 = \sum_{i=4}^7 x_i^2\}$, который часто называют конусом Саймонса, потому что он доказал, что $\mathcal{K}$ задает однозначную, негладкую, глобально определенную минимальную поверхность в $\mathbb{R}^8$, не являющуюся плоскостью. Оказывается, что пересечение $\mathcal{K}$ с семимерной сферой $\mathbb{S}^7$ также является, подобно тору Клиффорда, минимальной поверхностью в $\mathbb{S}^7$. Эти факты доказываются в статье с помощью техники кватернионов и алгебры Кэли.

Ключевые слова: минимальная поверхность, гауссова кривизна, кватернионы, октонионы (числа Кэли), поле экстремалей, функция Вейерштрасса.

M. I. Zelikin, Yu. S. Osipov. Minimal submanifolds of spheres and cones.

Intersections of cones of index zero with spheres are investigated. Fields of the corresponding minimal manifolds are found. In particular, we consider the cone $\mathbb{K} = \{x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$. Its intersection with the sphere $\mathbb{S}^3 = \sum_{i=0}^3 x_i^2$ is often called the Clifford torus $\mathbb{T}$, because Clifford was the first to notice that the metric of this torus as a submanifold of $\mathbb{S}^3$ with the metric induced from $\mathbb{S}^3$ is Euclidian. In addition, the torus $\mathbb{T}$ considered as a submanifold of $\mathbb{S}^3$ is a minimal surface. Similarly, it is possible to consider the cone $\mathcal{K} = \{\sum_{i=0}^3 x_i^2 = \sum_{i=4}^7 x_i^2\}$, often called the Simons cone because he proved that $\mathcal{K}$ specifies a single-valued nonsmooth globally defined minimal surface in $\mathbb{R}^8$ which is not a plane. It appears that the intersection of $\mathcal{K}$ with the sphere $\mathbb{S}^7$, like the Clifford torus, is a minimal submanifold of $\mathbb{S}^7$. These facts are proved by using the technique of quaternions and the Cayley algebra.

Keywords: minimal surface, gaussian curvature, quaternions, octonions (Cayley numbers), field of extremals, Weierstrass function.

MSC: 49Q05, 11R52

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-3-100-107

1. Случай Клиффорда

В пространстве $\mathbb{R}^4$ рассмотрим конус $\mathbb{K} = \{x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$ нулевого индекса. Покажем, что пересечение $\mathbb{K}$ со стандартной единичной сферой $\mathbb{S}^3$ является тором $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Действительно, введем координаты на торе $\mathbb{T}$, рассматривая его пересечения с плоскостями $A_1 = \{x_0 = x_1 = 0\}$ и $A_2 = \{x_2 = x_3 = 0\}$. Пересечение $\mathbb{T}$ с плоскостью A_2 есть окружность $\{x_0^2 + x_1^2 = 1/2\}$, параметризованная координатой α; пересечение $\mathbb{T}$ с плоскостью A_1 есть окружность $\{x_2^2 + x_3^2 = 1/2\}$, параметризованная координатой β:

$$\begin{cases} x_0 &= (1/\sqrt{2})\cos\alpha, \\ x_1 &= (1/\sqrt{2})\sin\alpha, \\ x_2 &= (1/\sqrt{2})\cos\beta, \\ x_3 &= (1/\sqrt{2})\sin\beta. \end{cases} \tag{1.1}$$

Прямое произведение этих двух окружностей и есть тор $\mathbb{T}$. Первая квадратичная форма на торе определяется по формуле $\mathbb{T}\ ds^2 = (d\alpha)^2 + (d\beta)^2$, следовательно, как и было показано

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00805).

Клиффордом [2], метрика на торе $\mathbb{T}$, унаследованная от сферической метрики $\mathbb{S}^3$, является евклидовой. Следующий факт достаточно простой, но мы не встречали упоминаний о нем в литературе.

Теорема 1. *Тор $\mathbb{T}$, рассматриваемый как многообразие, вложенное в сферу $\mathbb{S}^3$, является минимальной поверхностью.*

Доказательство. Для того чтобы найти вторую квадратичную форму, надо спроектировать вторые производные радиус-вектора поверхности $r = \{\cos\alpha, \sin\alpha, \cos\beta, \sin\beta\}$ по параметрам на нормаль $N = \{y_0, y_1, y_2, y_3\}$. Именно из-за расположения внешней нормали вторая квадратичная форма существенно зависит от того многообразия, в которое погружена поверхность. Для ортогональности к вектору $r_\alpha = \{-\sin\alpha, \cos\alpha, 0, 0\}$ необходимо, чтобы $y_1/y_0 = \tan\alpha$. Для ортогональности к вектору $r_\beta = \{0, 0, -\sin\beta, \cos\beta\}$ необходимо, чтобы $y_3/y_2 = \tan\beta$. Значит нормаль должна иметь вид $\{C_1\cos\alpha, C_1\sin\alpha, C_2\cos\beta, C_2\sin\beta\}$. Но если считать объемлющим многообразием сферу, то нормаль должна лежать в касательной плоскости, т. е. быть ортогональной к радиус-вектору сферы $\mathbb{S}^3$. Следовательно, $C_1 = -C_2$. Вторая квадратичная форма имеет вид $(d\alpha)^2 - (d\beta)^2$. Ее след равен нулю. Следовательно, тор $\mathbb{T}$, вложенный в сферу, является минимальной поверхностью. Это означает, что его площадь есть критическое значение функционала площади относительно вариаций поверхности $\mathbb{T}$, лежащих внутри сферы. □

Для доказательства достаточных условий минимума следует построить поле экстремалей, содержащее данную поверхность. Первый вариант теории поля для задачи минимизации кратных интегралов был разработан Каратеодори [1] в конце двадцатых годов. Второй (относительно более простой) вариант, основанный на более жестких требованиях к минимизируемому функционалу, был построен Вейлем в середине тридцатых годов [6]. В многомерном вариационном исчислении должно быть столько же функций, какова размерность пространства независимых переменных, что ведет к рассмотрению инвариантных интегралов для якобианов соответствующих отображений. В основу конструкции Вейля положен инвариантный интеграл типа следа. Конструкция Каратеодори основана на инвариантном интеграле типа детерминанта. Впоследствии были предложены многочисленные, но неэффективные конструкции полей для произвольных самых общих инвариантных интегралов. Эффективные для вычислений поля с инвариантными интегралами, имеющими вид следов всех внешних степеней матрицы якобианов, были изучены в работе [7].

Уравнение пересечения конуса $\mathbb{K}$ со сферой $\mathbb{S}^3$ можно записать в виде $x_0^2 + x_1^2 = 1/2$, потому что второе уравнение $x_2^2 + x_3^2 = 1/2$ является следствием первого. Включим тор $\mathbb{T}$ в семейство равных торов. Для этого рассмотрим пространство $\mathbb{R}^4$ как пространство кватернионов:

$$x_0 \mapsto \mathbf{1}a_0, \quad x_1 \mapsto \mathbf{i}a_1, \quad x_2 \mapsto \mathbf{j}a_2, \quad x_3 \mapsto \mathbf{k}a_3.$$

Умножение справа и умножение слева на кватернион, равный единице по модулю, определяют разные ортогональные преобразования пространства $\mathbb{R}^4$ [4]. Рассмотрим преобразование J_γ, которое индуцировано умножением справа на кватернион $\mathbf{z}_\gamma = \mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{j}\sin\gamma$. Легко видеть, что плоскости $\{x_0, x_2\}$ и $\{x_1, x_3\}$ инвариантны относительно J_γ. В обеих плоскостях преобразование J_γ индуцирует одновременный поворот на угол γ. Умножение на единичный кватернион определяет в $\mathbb{S}^3$ клиффордов сдвиг. Это означает, что, подобно евклидову сдвигу, каждая точка проходит один и тот же путь (в нашем случае угол γ) и расстояния между любыми двумя точками сохраняют постоянное значение.

Найдем образ конуса $\mathbb{K}$ при преобразовании J_γ. Умножение справа на кватернион $\mathbf{z}_\gamma = \mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{j}\sin\gamma$ действует как умножение на матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma & 0 & -\sin\gamma & 0 \\ 0 & \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ \sin\gamma & 0 & \cos\gamma & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix}.$$

Применяя эту матрицу к (1.1), получаем отображение

$$
\begin{cases}
x_0 &= (1/\sqrt{2})(\cos\alpha\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma),\\
x_1 &= (1/\sqrt{2})(\sin\alpha\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma),\\
x_2 &= (1/\sqrt{2})(\cos\alpha\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma),\\
x_3 &= (1/\sqrt{2})(-\sin\alpha\sin\gamma + \sin\beta\cos\gamma).
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

Пересечение точек (1.2) с исходным конусом $\mathbb{K}$ осуществляется при значениях γ, которые удовлетворяют уравнению $x_0^2 + x_1^2 = 1/2(2 - \sin 2\gamma\cos(\alpha+\beta)) = 1/2$. Или

$$
\sin 2\gamma = \frac{1}{\cos(\alpha+\beta)}.
$$

Это уравнение не имеет решений при $|\cos(\alpha+\beta)| < 1$. Следовательно, $\gamma = \pm\pi/4$. Значит образы конуса $\mathbb{K}$ в области $0 \le \gamma < \pi/4$ пересекаются только в начале координат. Следовательно, при этих значениях γ образы торов $\mathbb{T}$ взаимно не пересекаются. Размерность сферы $\mathbb{S}^3$ превосходит размерность торов на единицу. Следовательно, образы торов $\mathbb{T}$ заполняют в пространстве $\mathbb{S}^3$ открытую область. Через каждую точку этой области проходит один и только один тор. Для того чтобы доказать, что многообразия $J_\gamma(\mathbb{T})$ образуют поле экстремалей, можно использовать формулу (17) работы [7], которая определяет функцию Вейерштрасса. Дифференцирования уравнения (1.2) по α и β дают

$$
x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\alpha\cos\gamma,\ \cos\alpha\cos\gamma,\ \sin\alpha\sin\gamma,\ -\cos\alpha\sin\gamma)
$$

и

$$
x_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\beta\sin\gamma,\ \cos\beta\sin\gamma,\ -\sin\beta\cos\gamma,\ \cos\beta\cos\gamma).
$$

Имеем $E = x_\alpha^2 = 1/2$, $F =< x_\alpha, x_\beta >= 0$, $G = x_\beta^2 = 1/2$. Первая квадратичная форма определяется как $EG - F^2 \equiv 1/4$. Под интегралом в функционале площади стоит $f = 1/4$. Момент $p \equiv 0$. Функция Вейерштрасса $W \equiv 1/4$. Положительность функции Вейерштрасса гарантирует минимум функционала площади.

Умножение на кватернионы $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{k}\sin\gamma$ дает другое семейство непересекающихся торов, которое также заполняет открытую область фазового пространства. На первый взгляд получается другое поле минимальных поверхностей. Но это иллюзия. Поля переходят одно в другое при отражении $\mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{k}$. В то же время умножение на кватернионы $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{i}\sin\gamma$ дает лишь вращение конуса $\mathbb{K}$ вокруг своей оси. Приведем слегка видоизмененную конструкцию доказательства знаменитой теоремы Клиффорда, которая будет использована в дальнейшем.

Теорема 2 (Клиффорд). *Гауссова кривизна тора $\mathbb{T}$ с унаследованной сферической метрикой равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображения J_γ определяют в инвариантных плоскостях поток окружностей. Поскольку при $\gamma = \pi$ эти окружности проходят через диаметрально противоположную (по отношению к исходному положению) точку, они являются геодезическими сферами. (В доказательстве Клиффорда проективное отображение переводит их в клиффордовы параллельные прямые линии, которые являются прямолинейными образующими однополостного гиперболоида — другой интерпретации тора $\mathbb{T}$.) Другое семейство геодезических сферы получается в результате аналогичного левого умножения. Каждое из семейств (левое и правое) определяет клиффордовы сдвиги сферы: каждая точка проходит один и тот же путь (в нашем случае угол γ) и расстояния между любыми двумя точками остаются постоянными. Траектории обоих сдвигов пересекают друг друга под прямым углом, поскольку нормаль переходит в нормаль. Для данной начальной точки q пройдем сначала по правому семейству, а потом по левому на один и тот же угол. Если повторить для той же начальной точки q обе эти операции в обратном порядке, то мы попадем в ту же самую конечную точку. В результате получится пространственный клиффордов параллелограмм A в многообразии $\mathbb{T} \subset \mathbb{S}^3$. Сумма его углов равна 4π. Следовательно, гауссова кривизна криволинейного параллелограмма A равна нулю. Поскольку точку q можно выбирать произвольно, геометрия $\mathbb{T}$ евклидова. $\square$

Чтобы изучить образ начального тора $\mathbb{T}$ при отображении (1.2), положим

$$\begin{cases} x_0 &= \rho\cos\eta, \\ x_1 &= \rho\sin\eta, \\ x_2 &= R\cos\xi, \\ x_3 &= R\sin\xi, \end{cases}$$

где $R^2+\rho^2=1$. Для данных значений $R,\ \rho,\ \eta,\ \xi$ найдем $\alpha,\ \beta$ и γ. Помножим первое уравнение в (1.2) на $\sin\eta$, второе уравнение на $\cos\eta$ и вычтем второе из первого. Получится

$$\sin\eta\cos\alpha\cos\gamma-\cos\eta\sin\alpha\cos\gamma-\sin\eta\cos\beta\sin\gamma-\cos\eta\sin\beta\sin\gamma=0$$

или

$$\tan\gamma=\frac{\sin(\eta-\alpha)}{\sin(\eta+\beta)}. \tag{1.3}$$

Далее помножим третье уравнение в (1.2) на $\sin\xi$, четвертое на $\cos\xi$ и вычтем второе из первого. Получится $\sin\xi\cos\alpha\sin\gamma+\sin\xi\cos\beta\cos\gamma+\cos\xi\sin\alpha\sin\gamma-\cos\xi\sin\beta\cos\gamma=0$ или

$$\tan\gamma=\frac{\sin(\beta-\xi)}{\sin(\alpha+\xi)}. \tag{1.4}$$

Комбинация $x_0^2+x_1^2$ из уравнений (1.2) дает $1-\sin 2\gamma\cos(\alpha+\beta)=2\rho^2$. Комбинация $x_2^2+x_3^2$ из уравнений (1.2) дает

$$1+\sin 2\gamma\cos(\alpha+\beta)=2R^2.$$

При вычитании получится

$$R^2-\rho^2=\sin 2\gamma\cos(\alpha+\beta). \tag{1.5}$$

Мы имеем три независимых уравнения для трех неизвестных величин α,β,γ. Примем α и β за независимые переменные, определяемые уравнениями (1.3) и (1.4). Уравнение (1.5) дает соответствующее значение функции $\gamma(\alpha,\beta)$.

Найдем особенности отображения $\{R,\rho,\xi,\eta\}\mapsto\{\alpha,\beta,\gamma\}$. Приравнивая правые части (1.3) и (1.4), получаем $\sin(\eta-\alpha)\sin(\xi+\alpha)=\sin(\beta-\xi)\sin(\beta+\eta)$. Дифференцирование (1.3) по η дает $-\cos(\alpha-\eta)+\tan\gamma\cos(\beta+\eta)=0$. Таким образом, мы имеем

$$\tan\gamma=\frac{\cos(\alpha-\eta)}{\cos\beta+\eta}=\frac{\sin(\eta-\alpha)}{\sin(\beta+\eta)}.$$

Отсюда следует, что $\sin(\alpha+\beta)=0$ и $\beta=-\alpha$. Имеем $\tan\gamma=1$. Следовательно, особенности должны лежать на окружностях $\rho=0$ и $R=0$. Интересующее нас множество $\{\rho=R\}$ свободно от сингулярностей. Мы получили дополнительное подтверждение того, что образы тора $\mathbb{T}$ в области $0\le\gamma<\pi/4$ не пересекают друг друга.

Было бы очень интересно посмотреть, как выглядит тор $\mathbb{T}$, будучи включенным в трехмерное (а не четырехмерное) пространство. Результаты статьи [3] дают такую возможность. В этой статье была определена операция развертки риманова многообразия, включенного в другое риманово многообразие $N\subset M$. При этом геодезические многообразия N продолжаются геодезическими M. Основная идея статьи [3] заключается в следующем. Следует продолжать не все геодезические N, а только те из них, которые принадлежат некоторому полю $\mathfrak{P}$ геодезических линий N. Различные поля геодезических определяют разные развертки. Было доказано, что листы развертки дают симплектоморфизм N. Это означает, что все инвариантные интегралы N остаются инвариантными в листе.

Для развертки мы будем использовать центральное поле геодезических сферы $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ с центром в точке $Q = (1, 0, 0, 0)$ (северный полюс). При длине геодезических равной π лист развертки становится единичным шаром B трехмерного касательного пространства к сфере в точке $x_0 = -1$. Границей этого шара является сфера радиуса π. Эта граница есть образ раздутия точки $Q \in \mathbb{S}^3$.

Запишем уравнения геодезических поля, используя сферические координаты трехмерного пространства $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$\begin{cases} x_0 &= -1, \\ x_1 &= \sin\psi, \\ x_2 &= \cos\psi\cos\phi, \\ x_3 &= \cos\psi\sin\phi. \end{cases} \tag{1.6}$$

Вектор скорости для начального положения получается дифференцированием (1.6) по ψ: $v = \{0, \cos\psi, -\sin\psi\cos\phi, -\sin\psi\sin\phi\}$. Уравнения геодезических поля получаются умножением координат начального положения $Q = (1, 0, 0, 0)$ на $\cos t$ и прибавлением вектора скорости v, умноженного на $\sin t$

$$\begin{cases} x_0 &= \cos t, \\ x_1 &= \cos\psi\sin t, \\ x_2 &= -\sin\psi\cos\phi\sin t, \\ x_3 &= -\sin\psi\sin\phi\sin t. \end{cases} \tag{1.7}$$

Лист $t = \pi$ является плоским трехмерным пространством. Найдем образ тора в нем. Пересечение геодезических с тором удовлетворяет уравнению $x_2^2 + x_3^2 = 1/2$. Следовательно, $\sin^2\psi\sin^2 t = 1/2$ или

$$\sin^2 t = \frac{1}{2\sin^2\psi}. \tag{1.8}$$

Область определения для переменной ψ есть $\pi/4 \le \psi \le 3\pi/4$. Подставляя (1.8) в два последних уравнения (1.7), получаем

$$x_2 = \frac{\sin\phi}{\sqrt{2}}, \qquad x_3 = \frac{\cos\phi}{\sqrt{2}}.$$

Имеем уравнения первого из кругов тора $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Второе уравнение (1.7) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cot\psi$ дает сложенный вдвое отрезок $-1/\sqrt{2} \le x_2 \le 1/\sqrt{2}$, который является вырожденным образом второй окружности тора $\mathbb{T}$. Переменная ϕ принимает произвольные значения. На листе $t = \pi$ мы получили плоский цилиндр. Образ тора $\mathbb{T}$ при сканировании центральным полем геодезических оказывается вырожденным. Образ сохраняет свойство быть евклидовым, но перестает быть минимальной поверхностью. Клиффорд реализовал свой тор в виде однополостного гиперболоида трехмерного проективного пространства. Этот образ есть тор с точки зрения проективной геометрии. Наша реализация в ограниченной части пространства приводит к вырожденному плоскому тору, имеющему форму цилиндра.

2. Случай Саймонса

Похожий трюк может быть реализован для конуса Саймонса $\mathcal{K} = \{\sum_{i=1}^4 x_i^2 = \sum_{i=5}^8 x_i^2\}$, играющего роль тора многообразия $\mathcal{T} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{S}^7$. Вместо кватернионов следует использовать октонионы. Мы называем $\mathcal{K}$ *конусом Саймонса*, потому что он доказал, что этот конус дает глобально определенную негладкую минимальную поверхность, отличную от плоскости в $\mathbb{R}^8$ [5], поставив точку в решении проблемы Бернштейна. Подобно случаю конуса Клиффорда, мы имеем следующую теорему.

Теорема 3. *Включение $\mathcal{T} \subset \mathbb{S}^7$ определяет минимальную поверхность.*

Доказательство. Используем аргументацию теоремы 1. Вновь нормаль к первому сомножителю $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ есть $(\mu(q_1), *)$, где q_1 — радиус-вектор первой сферы $\mathbb{S}^3$. Нормаль ко второму сомножителю есть $(*, \nu(q_2))$. Нормаль к многообразию $\mathcal{T} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ в точке $(q_1, q_2) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, лежащей в сфере $\mathbb{S}^7$, есть $(1/\sqrt{2})(q_1, -q_2)$. Обозначим через $(ds)^2(q)$ значение второй квадратичной формы первого сомножителя $\mathbb{S}^3$ в точке q; а через $(d\tilde{s})^2(q)$ значение второй квадратичной формы второго сомножителя $\mathbb{S}^3$ в точке q. Тогда вторая квадратичная форма многообразия $\mathcal{T} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ равна $(ds)^2 - (d\tilde{s})^2$. След этой формы равен нулю. □

Будем, как это принято, обозначать базис алгебры Кэли через $\mathbf{1}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{h}$. Вновь включаем многообразие $\mathcal{T} = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ в семейство равных многообразий. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^8$ как пространство октонионов:

$$x_0 \mapsto \mathbf{1}a_0; \quad x_1 \mapsto \mathbf{i}a_1; \quad x_2 \mapsto \mathbf{j}a_2; \quad x_3 \mapsto \mathbf{k}a_3; \quad x_4 \mapsto \mathbf{e}a_4; \quad x_5 \mapsto \mathbf{f}a_5; \quad x_6 \mapsto \mathbf{g}a_6; \quad x_7 \mapsto \mathbf{h}a_7.$$

Умножение (скажем, справа) на октонион, равный единице по абсолютной величине, определяет ортогональное преобразование пространства $\mathbb{R}^8$. Рассмотрим преобразования I_γ, которые индуцированы правым умножением на октонионы $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{j}\sin\gamma$. Легко видеть, что двумерные плоскости $\{x_0, x_2\}$, $\{x_1, x_3\}$, $\{x_4, x_6\}$ и $\{x_5, x_7\}$ являются инвариантными плоскостями преобразований I_γ. Во всех этих плоскостях преобразование I_γ индуцирует одновременный поворот на угол γ. Как и прежде, образы многообразия $\mathcal{T}$ не пересекаются. Через каждую точку открытого множества сферы $\mathbb{S}^7$ проходит один и только один образ многообразия $\mathcal{T}$. Следовательно, получается поле минимальных многообразий.

Вместо I_γ можно использовать умножение на другие октонионы. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{i}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_1\}$, $\{x_2, x_3\}$, $\{x_4, x_5\}$ и $\{x_6, x_7\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{k}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_3\}$, $\{x_1, x_2\}$, $\{x_4, x_7\}$ и $\{x_5, x_6\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{e}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_4\}$, $\{x_1, x_5\}$, $\{x_2, x_6\}$ и $\{x_3, x_7\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{f}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_5\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_7\}$ и $\{x_3, x_6\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{g}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_6\}$, $\{x_1, x_7\}$, $\{x_2, x_4\}$ и $\{x_3, x_5\}$. Умножение на $\mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{h}\sin\gamma$ имеет двумерные инвариантные пространства $\{x_0, x_7\}$, $\{x_1, x_6\}$, $\{x_2, x_5\}$ и $\{x_3, x_4\}$.

Нетрудно построить много полей оптимальных траекторий, рассматривая ограничения этих вращений на различные сечения сферы $\mathbb{S}^3$. Для таких сечений получаются результаты, вполне аналогичные теоремам 1–3.

Например, вернемся к правому и левому умножению октонионов сечения $\Xi = \bigcap_{i=4}^{7}\{x_i = 0\}$ на $I_\gamma = \mathbf{1}\cos\gamma + \mathbf{j}\sin\gamma$. Подобно многообразию $\mathbb{T}$ на сомножителях типа $\mathbb{S}^3$ можно построить минимальные поверхности, которые в свою очередь можно вложить в поля минимальных поверхностей. Рассмотрим Ξ_1 — пересечение сферы Ξ с конусом $\{x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$.

Теорема 4. *Вложение $\Xi_1 \subset \mathbb{S}^3$, рассматриваемое как подмножество сферы S^3, является минимальной поверхностью.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы 1. □

Само многообразие $\mathcal{T}$ не может быть евклидовым, так как оно содержит сферы $\mathbb{S}^3$, но его сечения оказываются евклидовыми.

Теорема 5. *Гауссова кривизна сечения Ξ_1, рассматриваемого как подмножество $\mathcal{T}$, равна нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение J_γ определяет окружности в инвариантных плоскостях $\{x_0, x_2\}$ и $\{x_1, x_3\}$. Эти окружности при $\gamma = \pi$ проходят через точку, диаметрально противоположную начальной точке, поэтому они являются геодезическими сферы $\mathbb{S}^3$. Второе семейство окружностей получается в результате умножения слева. Как и в случае кватернионов, каждое из семейств определяет клиффордовы сдвиги: каждая точка проходит один и тот же путь (угол γ) и расстояния между точками сохраняются. Траектории пересекаются под прямым углом, так как нормали переходят в нормали. Как и прежде, зафиксируем начальную точку q и пройдем сначала по правому семейству, а потом по левому на один и тот же угол γ. Потом мы повторим это, начиная опять с точки q, в обратном порядке (сначала по левому, а потом по правому семейству). Попадание в ту же самую конечную точку на этот раз проблематично, потому что алгебра Кэли неассоциативна. Однако положение спасает так называемое тождество элластичности: если умножить октонион $\mathbf{z}$ одновременно как справа, так и слева, на один и тот же октонион $\mathbf{a}$, то результат не зависит от порядка операций: $\mathbf{aza} = (\mathbf{az})\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{za})$ [4, с. 323]. Следовательно, мы попадаем в одну и ту же точку и получаем пространственный параллелограмм из геодезических линий многообразия Ξ_1. Сумма его углов равна 4π. Поскольку точка q произвольна, гауссова кривизна Ξ_1 равна нулю, и геометрия Ξ_1 евклидова. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Caratheodory C.** Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen // Acta Szeged. 1929. Vol. 4. P. 193–216.
2. **Clifford W.K.** On a surface of zero curvature and finite extent // Proc. London Math. Soc. 1873. Vol. 4. P. 381–395.
3. **Osipov Yu.S., Zelikin M.I.** Multidimensional generalization of Jacobi envelope theorem // Russian J. Math. Phys. 2012. Vol. 19, no. 1. P. 101–106. doi: 10.1134/S1061920812010086 .
4. **Постников М.М.**, Группы и алгебры Ли. Лекции по геометрии. Семестр V. Москва: Наука, 1982. 447 с.
5. **Simons J.** Minimal varieties in Riemannian manifold // Ann. Math. 1969. Vol. 88. P. 62–105.
6. **Weyl H.** Geodesic fields in the calculus of variations for multiple integrals // Ann. Math. 1935. Vol. 36. P. 607–629.
7. **Zelikin M.I.** Theory of fields for multiple integrals // Russian Math. Surveys. 2011. Vol. 66, no. 4. P. 103–136. doi: 10.1070/RM2011v066n04ABEH004754 .

Поступила 11.02.2019
После доработки 11.03.2019
Принята к публикации 18.03.2019

Зеликин Михаил Ильич
чл.-корр. РАН, профессор
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: mzelikin@mtu-net.ru

Осипов Юрий Сергеевич
академик РАН, заведующий кафедрой
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
г. Москва
e-mail: fff@imm.uran.ru

REFERENCES

1. Caratheodory C. Über die Variationsrechnung bei mehrfachen Integralen. *Acta Szeged.* 1929, vol. 4, pp. 193–216.
2. Clifford W.K. On a surface of zero curvature and finite extent. *Proc. London Math. Soc.*, 1873, vol. 4, pp. 381–395.

3. Osipov Yu.S., Zelikin M.I. Multidimensional generalization of Jacobi envelope theorem. *Russian J. Math. Phys.*, 2012, vol. 19, no. 1, pp. 101–106. doi: 10.1134/S1061920812010086 .
4. Postnikov M.M. *Lectures in geometry: Lie groups and Lie algebras. Semester V.* Moscow: Mir Publ., 1986, 437 p. ISBN (2nd ed.): 978-5-88417-024-6 . Original Russian text published in Postnikov M.M. *Gruppy i algebry Li. Lektsii po geometrii, Semestr V.* Moscow: Nauka Publ., 1982, 447 p.
5. Simons J. Minimal varieties in Riemannian manifold. *Ann. of Math.*, 1969, vol. 88, pp. 62–105. doi: 10.2307/1970556 .
6. Weyl H. Geodesic fields in the calculus of variations for multiple integrals. *Ann. Math.*, 1935, vol. 36, pp. 607–629. doi: 10.2307/1968645 .
7. Zelikin M.I. Theory of fields of extremals for multiple integrals. *Russian Math. Surveys*, 2011, vol. 66, no. 4, pp. 733–765. doi: 10.1070/RM2011v066n04ABEH004754 .

Received February 11, 2019
Revised March 11, 2019
Accepted March 18, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-01-00805).

Yury Sergeyevich Osipov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., RAS Academician, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia, e-mail: yriyosipov@hotmail.com .

Mikhail Ilyich Zelikin, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., RAS Corresponding Member, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia, e-mail: mzelikin@mtu-net.ru .

Cite this article as: M. I. Zelikin, Yu. S. Osipov. Minimal submanifolds of spheres and cones, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 3, pp. 100–107 .