ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.518.476

ОБ УСЛОВИЯХ АБСОЛЮТНОЙ ЧЕЗАРОВСКОЙ СУММИРУЕМОСТИ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

С. Битимхан

Получено необходимое и достаточное условие абсолютной $|C;\overline{\beta}|_\lambda$-суммируемости почти всюду на $\mathbb{T}^s$ кратных тригонометрических рядов Фурье функций $f\in L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)$, принадлежащих к обобщенным классам Бесова $B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$, где $\mathbb{T}^s=[0,2\pi)^s$, $\overline{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s)$, $\overline{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_s)$, $1<q_j\le 2$, $j=\overline{1,s}$, $1\le\lambda\le q_s\le \ldots\le q_1$, $\lambda<\theta<\infty$, $0\le\beta_j<1/q'_j=1-1/q_j$, $j=\overline{1,s}$, $r\in\mathbb{N}$, $r>\sum_{j=1}^s(1/q_j-\beta_j)$, ω_r — функция типа модуля гладкости порядка r.

Ключевые слова: кратные тригонометрические ряды Фурье, абсолютная суммируемость, модуль гладкости, обобщенный класс Бесова.

S. Bitimkhan. Conditions of absolute Cesaro summability of multiple trigonometric Fourier series.

A necessary and sufficient condition of absolute $|C;\overline{\beta}|_\lambda$-summability almost everywhere on $\mathbb{T}^s$ is obtained for multiple trigonometric Fourier series of functions $f\in L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)$ from generalized Besov classes $B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$, where $\mathbb{T}^s=[0,2\pi)^s$, $\overline{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s)$, $\overline{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_s)$, $1<q_j\le 2$, $j=\overline{1,s}$, $1\le\lambda\le q_s\le\ldots\le q_1$, $\lambda<\theta<\infty$, $0\le\beta_j<1/q'_j=1-1/q_j$, $j=\overline{1,s}$, $r\in\mathbb{N}$, $r>\sum_{j=1}^s(1/q_j-\beta_j)$, and ω_r is a function of the type of modulus of smoothness of order r.

Keywords: multiple trigonometric Fourier series, absolute summability, modulus of smoothness, generalized Besov class.

MSC: 42A24

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-42-47

Пусть $\mathbb{R}^s$ — s-мерное евклидово пространство точек $\overline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_s)$, $s\in\mathbb{N}$;

$\mathbb{T}^s=\{\overline{x}\in\mathbb{R}^s\colon 0\le x_j<2\pi,\ j=\overline{1,s}\}$; $L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)$ — пространство всех измеримых 2π-периодических по каждой переменной x_j, $j=\overline{1,s}$, функций $f(\overline{x})=f(x_1,x_2,\ldots,x_s)$, для которых

$$\|f\|_{\overline{q},s}=\left(\int\limits_0^{2\pi}\left[\ldots\left[\int\limits_0^{2\pi}|f(\overline{x})|^{q_1}dx_1\right]^{q_2/q_1}\ldots\right]^{q_s/q_{s-1}}dx_s\right)^{1/q_s}<\infty,$$

где $\overline{q}=(q_1,q_2,\ldots,q_s)$, $1\le q_j<\infty$, $j=\overline{1,s}$ (в случае $q_1=q_2=\ldots=q_s=q$ полагаем $\|f\|_{\overline{q},s}\equiv\|f\|_{q,s}$);

$E^{(j)}_{n,\infty}(f)_{\overline{q},s}$ — частное наилучшее приближение функции $f(\overline{x})\in L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше $n\in\mathbb{Z}_+$ по переменной x_j, $j=\overline{1,s}$ (см., например, [1, гл. II, п. 2.2]);

$\omega^{(j)}_r(f;\delta)_{\overline{q},s}$ — частный модуль гладкости функции $f\in L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)$ порядка $r\in\mathbb{N}$ по переменной x_j, $j=\overline{1,s}$ (см., например, [1, гл. III, пп. 3.4.34, 3.12.5]):

$$\omega^{(j)}_r(f;\delta)_{\overline{q},s}=\sup\{\|\Delta^r_{h,x_j}f(\cdot)\|_{\overline{q},s}\colon h\in\mathbb{R}^1,\ |h|\le\delta\},\quad \delta\in[0,+\infty),$$

где

$$\Delta^r_{h,x_j}f(\overline{x})=\sum_{\nu=0}^r(-1)^{r-\nu}\binom{r}{\nu}f(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+h,x_{j+1},\ldots,x_s),\quad \binom{r}{\nu}=\frac{r!}{\nu!(r-\nu)!},\quad \nu=\overline{0,r}.$$

Положим $\gamma_i(nx) = \{\cos nx,\ i = 1;\ \sin nx,\ i = 2\}$, где $x \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим кратный тригонометрический ряд

$$\sum_{\overline{n}\geq\overline{1}} B_{\overline{n}}(\overline{x}) = \sum_{n_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{n_s=1}^{\infty} B_{n_1,\ldots,n_s}(x_1,\ldots,x_s), \tag{1}$$

где

$$B_{\overline{n}}(\overline{x}) = \sum_{\overline{1}\leq\overline{i}\leq\overline{2}} a_{\overline{n}}^{(\overline{i})} \prod_{\nu=1}^{s} \gamma_{i_\nu}(n_\nu x_\nu), \quad a_{\overline{n}}^{(\overline{i})} \in \mathbb{R}^1 \equiv \mathbb{R}.$$

Для заданных $n \in \mathbb{N}$ и $\beta \in (-1, +\infty)$ положим $A_n^{(\beta)} = (\beta+1)(\beta+2)\ldots(\beta+n)/n!$. Сумма

$$\sigma_{\overline{n}}^{(\overline{\beta})}(\overline{x}) = \sum_{\overline{1}\leq\overline{k}\leq\overline{n}} \prod_{j=1}^{s} A_{n_j-k_j}^{(\beta_j-1)} \left(A_{n_j}^{(\beta_j)}\right)^{-1} B_{\overline{k}}(\overline{x}), \quad \overline{n} = (n_1,\ldots,n_s),$$

называется $(C;\overline{\beta}) \equiv (C;\beta_1,\ldots,\beta_s)$ *средним* (*или средним по Чезаро*) *ряда* (1).

Для чисел $b_{\overline{n}}$ определим смешанную разность $\Delta b_{\overline{n}}$ следующим образом:

$$\Delta b_{\overline{n}} = \sum_{\eta_1=0}^{1} \ldots \sum_{\eta_s=0}^{1} (-1)^{s-|\overline{\eta}|} b_{(n_1-1+\eta_1,\ldots,n_s-1+\eta_s)} = \sum_{\overline{0}\leq\overline{\eta}\leq\overline{1}} (-1)^{s-|\overline{\eta}|} b_{\overline{n}-\overline{1}+\overline{\eta}}$$

$\left(\overline{\eta} = (\eta_1,\ldots,\eta_s),\ \eta_i \in \{0,1\},\ i = \overline{1,s};\ |\overline{\eta}| = \eta_1+\ldots+\eta_s\right)$.

Для заданного числа $\lambda \geq 1$ ряд (1) называется $\left|C;\overline{\beta}\right|_\lambda$-*суммируемым* (*или абсолютно суммируемым по Чезаро*) *в точке* $\overline{x} \in \mathbb{T}^s$, если

$$\sum_{\overline{n}\geq\overline{1}} \left|\Delta\sigma_{\overline{n}}^{(\overline{\beta})}(\overline{x})\right|^\lambda \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda-1} < \infty.$$

(см., например, [2–4] — случай $\lambda = 1$; [5] — случай $s = 1$, $\lambda \geq 1$).

Исследованию условий $\left|C;\overline{\beta}\right|_\lambda$-суммируемости при $\lambda = 1$ кратных тригонометрических рядов Фурье функций $f \in L_2(\mathbb{T}^s)$ в терминах поведения величин $E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{2,s}$ и $\omega_r^{(j)}(f;1/n)_{2,s}$ $(j = \overline{1,s})$ посвящены работы [3; 4; 6] (см. в них также библиографию, где приведены ссылки на более ранние работы, связанные с рассматриваемой тематикой). В случае $s = 1$ и $\lambda \geq 1$ наиболее разностороннее исследование вопроса $|C;\alpha|_\lambda$-суммируемости $(\alpha > -1)$ рядов Фурье функций $f \in L_q(T)$ $(1 < q \leq 2)$ с детальным обзором ранее известных результатов было проведено И. Салаи в [5].

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие обозначения:

$$E_{\overline{q},s}^{\varepsilon} = \left\{f \in L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)\colon E_{n,\infty}^{(j)}(f)_{\overline{q},s} = O(\varepsilon_n),\ n \in \mathbb{N},\ j = 1,2,\ldots,s\right\},$$

где $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ — заданная последовательность положительных чисел, монотонно убывающая к 0 при $n \to \infty$;

$$H_{\overline{q},s}^{\omega_r} = \left\{f \in L_{\overline{q}}(T^s)\colon \omega_r^{(j)}(f;\delta)_{\overline{q},s} = O(\omega_r(\delta)),\ \delta \in (0,1],\ j = 1,\ldots,s\right\},$$

где $\omega_r(\delta)$ — функция типа модуля гладкости порядка $r \in \mathbb{N} : \omega_r(\delta) \to 0 = \omega_r(0)$ при $\delta \to 0$, $\omega_r(\delta)$ непрерывна и не убывает на отрезке $[0,1]$, для некоторого постоянного $C(r) > 0$ и всех $0 < \delta_1 < \delta_2 \leq 1$ выполняется неравенство $\delta_2^{-r}\omega_r(\delta_2) \leq C(r)\delta_1^{-r}\omega_r(\delta_1)$.

Кроме того, нам понадобится также определение обобщенного класса О.В. Бесова $B_{\overline{q},s,\theta}^{\omega_r}$ (см., например, [7, разд. 1°]):

$$B_{\overline{q},s,\theta}^{\omega_r} = \left\{f \in L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)\colon \left(\int_0^1 \left(\frac{\omega_r^{(j)}(f;t)_{\overline{q},s}}{\omega_r(t)}\right)^\theta \frac{dt}{t}\right)^{1/\theta} < \infty,\ j = 1,2,\ldots,s\right\},$$

где $1 \le \theta \le \infty$. В случае $\theta = \infty$ класс $B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\infty} = H^{\omega_r}_{\overline{q},s}$. Если $q_1 = q_2 = \ldots = q_s = q$, то вместо $E^{\varepsilon}_{\overline{q},s}$ и $H^{\omega_r}_{\overline{q},s}$ будем писать соответственно $E^{\varepsilon}_{q,s}$ и $H^{\omega_r}_{q,s}$.

При наличии ограничений на параметры $1 < q \le 2$, $1 \le \lambda \le q$, $0 \le \beta_j < 1/q' = 1 - 1/q$, $j = \overline{1,s}$, $r > s/q - \sum_{j=1}^{s} \beta_j$ в работе [8, теоремы 2 и 3] найдены необходимые и достаточные условия на последовательность $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ (на функцию $\omega_r(\delta)$) для $|C;\overline{\beta}|_\lambda$-суммируемости почти всюду на $\mathbb{T}^s$ ряда Фурье каждой функции $f \in E^{\varepsilon}_{q,s}$ (соответственно $f \in H^{\omega_r}_{q,s}$).

Утверждения теорем 2 и 3 из [8] позднее были обобщены на случай классов функций со смешанной нормой $E^{\varepsilon}_{\overline{q},s}$ и $H^{\omega_r}_{\overline{q},s}$ в работе [9, теорема 3 и теорема 4]. В дальнейшем $C_j(r,s,\ldots)$, где $j \in \mathbb{N}$, обозначают положительные числа, значения которых зависят только от указанных в скобках параметров; в случае, когда понятно, от каких параметров зависят упомянутые числа, используется обозначение C_j.

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $1 < q_j \le 2$, $j = \overline{1,s}$, $1 \le \lambda \le q_s \le \ldots \le q_1$, $\lambda < \theta < \infty$, $0 \le \beta_j < 1/q_j' = 1 - 1/q_j$, $j = \overline{1,s}$, $r > æ \equiv \sum_{j=1}^{s} (1/q_j - \beta_j)$. *Тогда для* $|C;\overline{\beta}|_\lambda$-*суммируемости почти всюду на* $\mathbb{T}^s$ *ряда Фурье каждой функции* $f \in B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$ *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_0^1 \omega_r^{\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}}(t) \cdot t^{-\left(\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}æ+1\right)} dt < \infty. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Достаточность.* Пусть $f \in B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$ и выполняется (2). В силу неравенства (см., например, [1, гл. V, п. 5.3.1, неравенство (1)])

$$E^{(j)}_{n,\infty}(f)_{\overline{q},s} \le C_1(r,s)\omega_r^{(j)}(f;1/n)_{\overline{q},s}, \quad f \in L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s), \quad 1 \le q_j < \infty, \quad j = \overline{1,s},$$

имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda æ-1}\left(E^{(j)}_{n,\infty}(f)_{\overline{q},s}\right)^\lambda \asymp \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\lambda æ}\left(E^{(j)}_{2^k,\infty}(f)_{\overline{q},s}\right)^\lambda$$

$$\le C_1^\lambda(r,s)\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\lambda æ}\left(\omega_r^{(j)}(f;2^{-k})_{\overline{q},s}\right)^\lambda = C_1^\lambda(r,s)\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\lambda æ}\omega_r^\lambda(2^{-k})\Big(\frac{\omega_r^{(j)}(f;2^{-k})_{\overline{q},s}}{\omega_r(2^{-k})}\Big)^\lambda.$$

Поскольку $\lambda < \theta$, то, применяя неравенство Гельдера с показателями $\tau = \theta/\lambda > 1$, $\tau' = \theta/(\theta-\lambda)$ $(1/\tau + 1/\tau' = 1)$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda æ-1}\Big(E^{(j)}_{n,\infty}(f)_{\overline{q},s}\Big)^\lambda$$

$$\le C_2\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\Big(2^{k\lambda æ}\omega_r^\lambda(2^{-k})\Big)^{\tau'}\Big]^{1/\tau'}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\omega_r^{(j)}(f;2^{-k})_{\overline{q},s}}{\omega_r(2^{-k})}\Big)^{\lambda\tau}\Big]^{1/\tau}$$

$$= C_2\Big[\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k\lambda\theta}{\theta-\lambda}æ}\omega_r^{\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}}(2^{-k})\Big]^{(\theta-\lambda)/\theta}\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\omega_r^{(j)}(f;2^{-k})_{\overline{q},s}}{\omega_r(2^{-k})}\Big)^{\theta}\Big]^{\lambda/\theta}$$

$$\le C_3\Big[\int\limits_0^1 \omega_r^{\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}}(t)\cdot t^{-\left(\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}æ+1\right)}dt\Big]^{(\theta-\lambda)/\theta}\Big[\int\limits_0^1\Big(\frac{\omega_r^{(j)}(f;t)_{\overline{q},s}}{\omega_r(t)}\Big)^\theta\frac{dt}{t}\Big]^{\lambda/\theta}.$$

Из полученной оценки следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\lambda æ-1}\left(E^{(j)}_{n,\infty}(f)_{\overline{q},s}\right)^\lambda < \infty, \quad j = \overline{1,s},$$

откуда в силу теоремы 2 из [9] ряд Фурье функции $f \in B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$ является $|C;\overline{\beta}|_\lambda$-суммируемым почти всюду на $\mathbb{T}^s$.

Необходимость. Допустим, что ряд Фурье каждой функции $f \in B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$ является $|C;\overline{\beta}|_\lambda$-суммируемым почти всюду на $\mathbb{T}^s$, однако условие (2) не выполняется. Покажем, что в этом случае найдется функция $g_0(\overline{x}) \in B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$, ряд Фурье которой не будет $|C;\overline{\beta}|_\lambda$-суммируемым почти всюду на $\mathbb{T}^s$.

Построение функции $g_0(\overline{x})$ проведем, следуя схеме, приведенной в статье [7, разд. 3°, доказательство необходимости теоремы, п. 1]. Вначале отметим, что расходимость интеграла (2) равносильна расходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{\frac{k\lambda\theta}{\theta-\lambda}æ}\omega_r^{\frac{\lambda\theta}{\theta-\lambda}}(2^{-k}) = +\infty. \tag{3}$$

В обозначениях $d_k = 2^{kæ}\omega_r(2^{-k})$, $p = \lambda\theta/(\theta-\lambda)$ условие (3) примет вид $\sum_{k=0}^{\infty} d_k^p = +\infty$. Тогда найдется числовая последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(0 < \varepsilon_k \downarrow 0$ при $k \to \infty)$, удовлетворяющая условиям (см. [7, раз. 3°, п. 1, свойства (22)]):

$$1)\ \varepsilon_k d_k^{p/\lambda} \le 1, \quad 2)\ \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\theta < \infty, \quad 3)\ \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda = \infty. \tag{4}$$

Положим (равенство понимается в смысле сходимости в метрике $L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)$)

$$g_0(\overline{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{p/\lambda}\varepsilon_k 2^{-k\mu}\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=2^k+1}^{2^{k+1}}\cos n_j x_j, \quad \mu = \sum_{j=1}^{s}(1-\beta_j). \tag{5}$$

В силу известной оценки нормы одномерного ядра Дирихле (см., например, [10, § 4, доказательство теоремы 5 в части “необходимость”, неравенство (4.17) и неравенство после формулы (4.22)]) имеем

$$\Big\|\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=2^k+1}^{2^{k+1}}\cos n_j x_j\Big\|_{\overline{q},s} = \prod_{j=1}^{s}\Big\|\sum_{n_j=2^k+1}^{2^{k+1}}\cos n_j x_j\Big\|_{q_j,1} \leqslant C_4(\overline{q},s)2^{k\sum\limits_{j=1}^{s}(1-1/q_j)}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{6}$$

откуда, учитывая также условие 1) в (4) и условие $\beta_j < 1/q_j'$, $j = \overline{1,s}$, получим

$$\|g_0\|_{\overline{q},s} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{p/\lambda}\varepsilon_k 2^{-k\mu}\Big\|\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=2^k+1}^{2^{k+1}}\cos n_j x_j\Big\|_{\overline{q},s} \le C_4\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{p/\lambda}\varepsilon_k 2^{-k\sum\limits_{j=1}^{s}(1-\beta_j)}2^{k\sum\limits_{j=1}^{s}(1-1/q_j)}$$

$$= C_4\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{p/\lambda}\varepsilon_k 2^{-kæ} \le C_4\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-kæ} < \infty.$$

Из данной оценки следует, что ряд (5) действительно сходится в метрике $L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)$ к некоторой функции $g_0 \in L_{\overline{q}}(\mathbb{T}^s)$.

Покажем теперь, что $g_0 \in B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$. Положим

$$\delta_k(g_0;\overline{x}) = \sum_{\overline{2^k+1} \le \overline{n} \le \overline{2^{k+1}}} B_{\overline{n}}(g_0,\overline{x}).$$

Воспользуемся утверждением (см. в [7, разд. 2°, п. 1, с. 328]), согласно которому $g_0 \in B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$ тогда и только тогда, когда $\sum_{k=0}^{\infty}\big(\omega_r^{-1}(2^{-k})\|\delta_k(g_0;\cdot)\|_{\overline{q},s}\big)^\theta < \infty$. Учитывая оценку (6), определение d_k и условие 2) в (4), имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\omega_r^{-1}(2^{-k})\|\delta_k(g_0;\cdot)\|_{\overline{q},s}\Big)^\theta = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\omega_r^{-1}(2^{-k})d_k^{p/\lambda}\varepsilon_k 2^{-k\mu}\Big)^\theta\Big\|\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=2^k+1}^{2^{k+1}}\cos n_j x_j\Big\|_{\overline{q},s}^\theta$$

$$\le C_4^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(\omega_r^{-1}(2^{-k}) d_k^{p/\lambda} \varepsilon_k 2^{-k æ}\right)^\theta = C_4^\theta \sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k^{p/\lambda - 1} \varepsilon_k\right)^\theta$$

$$= C_4^\theta \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{\theta\lambda/(\theta-\lambda)} \varepsilon_k^\theta = C_4^\theta \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\theta < \infty,$$

откуда следует, что $g_0 \in B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$.

По предположению ряд Фурье функции $g_0 \in B^{\omega_r}_{\overline{q},s,\theta}$ является $|C;\overline{\beta}|_\lambda$-суммируемым почти всюду на $\mathbb{T}^s$. Следовательно, согласно теореме 2 из [11] ряд

$$\sum_{\overline{n} \ge \overline{1}} |a_{\overline{n}}(g_0)|^\lambda \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} < \infty. \tag{7}$$

Отметим, что утверждение теоремы 2 из [11] является распространением на многомерный случай для косинус-рядов соответствующего одномерного результата И. Салаи [5, разд. 1, п. (i) теоремы 1].

Далее, согласно определению функции g_0, а также учитывая условие 3) в (4), получим

$$\sum_{\overline{n} \ge \overline{1}} |a_{\overline{n}}(g_0)|^\lambda \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=2^k+1}^{2^{k+1}} |a_{\overline{n}}(g_0)|^\lambda \prod_{j=1}^{s} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(d_k^{p/\lambda} \varepsilon_k 2^{-k\mu}\right)^\lambda \prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=2^k+1}^{2^{k+1}} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda 2^{-k\lambda\mu} \prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=2^k+1}^{2^{k+1}} n_j^{\lambda(1-\beta_j)-1}$$

$$\ge C_5 \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda 2^{-k\lambda\mu} \prod_{j=1}^{s} 2^{k(\lambda(1-\beta_j)-1)} 2^k = C_5 \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda 2^{-k\lambda\mu} 2^{k\lambda\mu} = C_5 \sum_{k=0}^{\infty} d_k^p \varepsilon_k^\lambda = +\infty,$$

что противоречит сходимости ряда (7). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Тиман А.Ф.** Теория приближения функций действительного переменного. Москва: Физматгиз, 1960. 624 с.
2. **Тиман М.Ф.** Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье // Сообщения АН Грузинской ССР. 1961. Т. 26, № 6. С. 641–646.
3. **Пономаренко Ю.А.** Некоторые критерии абсолютной чезаровской суммируемости кратных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1963. Т. 152, № 6. С. 1305–1307.
4. **Пономаренко Ю.А., Тиман М.Ф.** Об абсолютной суммируемости кратных рядов Фурье // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 3. С. 346–361.
5. **Салаи И.** Об абсолютной суммируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. 1981. Т. 30, № 6. С. 823–837.
6. **Тиман М.Ф., Пономаренко Ю.А.** Некоторые критерии абсолютной суммируемости рядов Фурье // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций: сб. тр. Баку: Изд-во АН Азерб. ССР, 1965. С. 489–492.
7. **Гольдман М.Л.** О вложении обобщенных гельдеровых классов // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 3. С. 325–336.
8. **Акишев Г.А., Битимханулы С.** Модули гладкости и абсолютная суммируемость кратных тригонометрических рядов // Мат. журн. Алматы. 2003. Т. 3, №1 (7). С. 5–14.
9. **Bitimkhan S., Akishev G.** The conditions of absolute summability of multiple trigonometric series // AIP Conf. Proc. 2015. Vol. 1676, no. 1, 020095. doi: 10.1063/1.4930521.
10. **Ульянов П.Л.** Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1967. Т. 72 (114), № 2. С. 193–225.

11. **Битимханулы С.** Условие абсолютной суммируемости кратных тригонометрических рядов // Вестн. КазГУ. Сер.: математика, механика, информатика. 2001. № 1 (24). С. 3–11.

Поступила 31.08.2018
После доработки 27.03.2019
Принята к публикации 29.04.2019

Битимхан Самат
канд. физ.-мат. наук,
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова,
г. Караганды, Казахстан
e-mail: bsamat10@mail.ru

REFERENCES

1. Timan A.F. *Theory of approximation of functions of real variables.* Macmillan, Pergamon Press, 1963. 631 p. Original Russian text published in Timan A.F. *Teorija priblizhenija funkcij dejstvitel'nogo peremennogo.* Moscow: Fizmatgiz Publ., 1960, 624 p.
2. Timan M.F. Absolute convergence and summability of Fourier series. *Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR*, 1961, vol. 26, no. 6, pp. 641–646 (in Russian).
3. Ponomarenko Yu.A. Criteria for absolute Cesaro summability of multiple Fourier series. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1963, vol. 152, no. 6, pp. 1305–1307 (in Russian).
4. Ponomarenko Yu.A., Timan M.F. On the absolute summability of Fourier multiple series. *Ukr. Math. J.*, 1971, vol. 23, no. 3, pp. 291–304. doi: 10.1007/BF01085351.
5. Szalay I. Absolute summability of trigonometric series. *Math. Notes*, 1981, vol. 30, no. 6, pp. 912–919. doi: 10.1007/BF01145770.
6. Timan M.F., Ponomarenko Yu.A. Some criteria of absolute summability of Fourier series. In: *Issled. Sovrem. Probl. Konstr. Teor. Funkts.*, sbornik trudov, Baku: AN Azerb. SSR, 1965, pp. 489–492 (in Russian).
7. Gol'dman M.L. On the inclusion of generalized Hölder classes. *Math. Notes*, 1972, vol. 12, no. 3, pp. 626–631. doi: 10.1007/BF01093999.
8. Akishev G.A., Bitimkhanuly S. Moduli of smoothness and the absolute summability of multiple trigonometric series. *Mat. Zh. Almaty*, 2003, vol. 3, no. 1, pp. 5–14 (in Russian).
9. Bitimkhan S., Akishev G. The conditions of absolute summability of multiple trigonometric series. *AIP Conf. Proc.*, 2015, vol. 1676, no. 1, 020095. doi: 10.1063/1.4930521.
10. Ul'yanov P.L. Absolute and uniform convergence of Fourier series. *Math. USSR-Sb.*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 169–197. doi: 10.1070/SM1967v001n02ABEH001973.
11. Bitimkhanuly S. Condition for the absolute summability of multiple trigonometric series. *Vestnik Kazakh. Univ. Ser. Mat., Mekh., Inf.*, 2001, no. 1 (24), pp. 3–11 (in Russian).

Received August 31, 2018
Revised March 27, 2019
Accepted April 29, 2019

Samat Bitimkhan. Cand. Phys.-Math. Sci., Karagandy State University named after E. A. Buketov, Karagandy city, 100028 Kazakhstan, e-mail: bsamat10@mail.ru.

Cite this article as: S. Bitimkhan. Conditions of absolute Cesaro summability of multiple trigonometric Fourier series, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 42–47.