

УДК 519.865.3

**ПОЛИЭДРАЛЬНАЯ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТЬ НА СИМПЛЕКСЕ.
МЕТОД ВСТРЕЧНЫХ ПУТЕЙ ДЛЯ УБЫВАЮЩИХ
КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ¹**

В. И. Шмырев

В работе исследуется математическая первооснова оригинального подхода полиэдральной комплементарности, предложенного автором для отыскания экономического равновесия в моделях обмена и различных их вариаций. Проблема равновесия сводится к отысканию неподвижной точки точечно-множественных отображений симплекса цен в себя. Это приводит к задаче полиэдральной комплементарности, порождаемой парой полиэдральных комплексов в двойственности. Рассматривается новый класс убывающих отображений, не имеющих аналогов в \mathbb{R}^n , — класс квазирегулярных отображений. Исследуется процедура встречных путей, которая обобщает известный метод Лемке для задач линейной комплементарности. Показано, что в рассматриваемом случае процедура обладает свойством монотонности, характерным для задач линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений (P-класс). Следствием монотонности является единственность искомого решения.

Ключевые слова: Симплекс, полиэдральный комплекс, комплементарность, монотонность, неподвижная точка, алгоритм.

V. I. Shmyrev. Polyhedral complementarity on a simplex. Method of meeting paths for decreasing quasi-regular mappings.

The paper explores the mathematical basis of a novel polyhedral complementarity approach proposed by the author for finding an economic equilibrium in a linear exchange model and its variations. The equilibrium problem reduces to finding fixed points of point-to-set mappings of the price simplex to itself. As a result, we obtain a polyhedral complementarity problem generated by a pair of polyhedral complexes in duality. The class of quasi-regular mappings, which is a new class of decreasing mappings having no analogs in \mathbb{R}^n , is considered. The procedure of meeting paths, which generalizes the known Lemke method for linear complementarity problems, is studied. It is shown that in the case under consideration the procedure has the property of monotonicity characteristic of linear complementarity problems with positive principal minors of the constraint matrix (P-class). The uniqueness of the desired fixed point is a consequence of monotonicity.

Keywords: simplex, polyhedral complex, complementarity, monotonicity, fixed point, algorithm.

MSC: 90C33, 90-08

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-273-286

Введение

Работа посвящена исследованию математических конструкций, лежащих в основе оригинального подхода к проблеме отыскания экономического равновесия в линейных моделях обмена. Особенность проблемы экономического равновесия заключается в том, что рассмотрение идет на симплексе цен, а это имеет свою специфику. Речь идет о неподвижных точках специального класса точечно-множественных кусочно-постоянных отображений симплекса цен в себя. Вопрос имеет значительную предысторию, восходящую к работе автора [1], в которой кусочно-постоянные отображения рассматривались в \mathbb{R}^n в предположении монотонности и была доказана их потенциальность, что позволило свести проблему отыскания неподвижной точки к оптимизационной задаче. В основе рассмотрения лежит полиэдральная комплементарность [2], являющаяся естественным обобщением линейной комплементарности. В случае симплекса монотонность рассматриваемых отображений носит иной характер. Автором

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-010-00910 А), целевой программы Президиума РАН (проект № 227) и междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН (проект № 7Б).

в статье [3] рассмотрена задача комплементарности с особым заданием порождающих полиэдральных комплексов. Для класса локально убывающих регулярных отображений доказана потенциальность, что позволило разработать конечные алгоритмы отыскания неподвижных точек [4]. Следствием потенциальности является единственность неподвижной точки для таких отображений. Эти отображения можно рассматривать как аналоги рассмотренных в [1] монотонных отображений в \mathbb{R}^n .

Настоящая работа является логическим продолжением статьи [4]. Рассмотрение распространяется с регулярных отображений на более широкий класс квазирегулярных отображений, не имеющих аналогов в \mathbb{R}^n . Локально убывающие отображения этого класса уже не обладают свойством потенциальности, но сохраняют свойство монотонности в целом, благодаря которой единственность неподвижной точки сохраняется. Предложен конечный алгоритм встречающихся путей, который можно рассматривать как аналог известного метода Лемке [5] для задач линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений (класс P). Применительно к линейной модели обмена идея такого процесса была использована автором в работе [6].

Из предыстории вопроса о проблеме равновесия в линейных моделях следует отметить работу Е. Айзенберга и Д. Гейла [7]. Для простейшей из линейных моделей (модель Фишера) авторы свели проблему к оптимизационной задаче, которая была использована многими исследователями для разработки алгоритмов отыскания равновесных цен. Обзор по этой теме можно найти в [8].

Автором настоящей работы был предложен принципиально иной подход, в большей мере отражающий природу экономического равновесия. На его основе были получены конечные алгоритмы отыскания равновесных цен не только для классического варианта линейной модели обмена [6], но и для новых, более общих, моделей такого рода [9]. В основе подхода лежит сведение проблемы к задаче полиэдральной комплементарности [10]. Подход полиэдральной комплементарности не имеет аналогов и позволяет получить оптимизационные задачи как для модели Фишера, так и для общей линейной модели обмена. Качественная связь этого подхода в случае модели Фишера с результатом [7] была выявлена в [11; 12]. Преимущество подхода полиэдральной комплементарности состоит в естественной экономической и геометрической интерпретации его логической схемы, а также в особой простоте реализации полученных на его основе алгоритмов [10; 13], использующих лишь аппарат классической транспортной задачи.

Больше информации по обсуждаемой проблематике читатель найдет в [4].

Проводимые в этой статье исследования дополняют и обобщают полученные ранее результаты.

1. Задача полиэдральной комплементарности

Следуя [3], приведем необходимые описания требуемых объектов. Будем пользоваться понятиями комбинаторной топологии [14; 15].

Под *многогранником* в дальнейшем понимается множество в \mathbb{R}^n , задаваемое некоторой системой линейных уравнений и неравенств.

Грань многогранника задается дополнительным требованием, чтобы некоторые из неравенств в его описании выполнялись как равенства.

Полиэдральный комплекс определяется как такая совокупность многогранников ω , что любая грань многогранника из ω также принадлежит ω .

Многогранники комплекса именуются *клетками*. Бинарное отношение “клетка Ω_1 является гранью клетки Ω_2 ” задает в ω отношение частичного порядка $\Omega_1 \prec \Omega_2$.

Пусть два полиэдральных комплекса ω и ξ имеют одинаковое число клеток r и множество $R \subset \omega \times \xi$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между клетками комплексов $R = \{(\Omega_i, \Xi_i)\}_{i=1}^r$, где $\Omega_i \in \omega$, $\Xi_i \in \xi$.

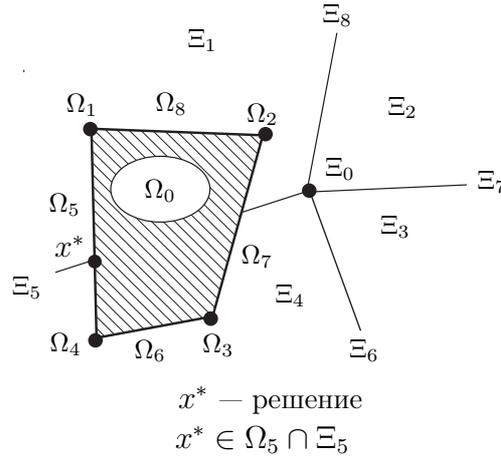


Рис. 1. Полиэдральная комплементарность в \mathbb{R}^2 .

Комплексы ω и ξ находятся в двойственности по соответствию R , если отношения порядка в этих комплексах взаимно противоположны: $\Omega_j < \Omega_i \iff \Xi_j > \Xi_i$.

Задача полиэдральной комплементарности состоит в отыскании точки, принадлежащей обеим клеткам некоторой пары (Ω_i, Ξ_i) :

$$x^* \text{ — решение} \iff x^* \in \Omega_i \cap \Xi_i \text{ для некоторого } i.$$

Отметим, что невырожденные задачи линейной комплементарности являются частным случаем задач полиэдральной комплементарности, в которых полиэдральные комплексы ω и ξ формируются из граней двух симплексных конусов. Таким образом, речь идет о естественном обобщении задач линейной комплементарности.

Рисунок 1 иллюстрирует задачу полиэдральной комплементарности в \mathbb{R}^2 . Комплексы ω и ξ содержат по 9 клеток. Одним из решений задачи является точка x^* , в которой пересекаются отвечающие друг другу одномерные клетки Ω_5 и Ξ_5 .

Задача полиэдральной комплементарности в приведенной формулировке была введена автором в [2].

2. Полиэдральная комплементарность на симплексе

Пусть σ — стандартный $(n - 1)$ -мерный симплекс в \mathbb{R}^n : $\sigma = \{p \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j=1}^n p_j = 1\}$. В данной работе исследуется специальный класс задач полиэдральной комплементарности на симплексе σ . Клетки полиэдральных комплексов ω и ξ в задачах этого класса задаются особым образом.

Полномерные клетки $\Omega_i \in \omega$ задаются условием $p \in \sigma$ и системами линейных неравенств вида

$$\sum_{j \in S} p_j - (p, d) \geq 0, \tag{2.1}$$

где $S \neq \emptyset, S \subset J = \{1, \dots, n\}$, а d — некоторый вектор с компонентами $d_j \in [0, 1)$.

Клетки комплекса ξ являются подмножествами открытого симплекса σ° — внутренности симплекса σ . Полномерные из них задаются условием $p \in \sigma^\circ$ и неравенствами вида

$$p_j/p_l \geq \gamma_{jl}. \tag{2.2}$$

Предполагается, что клетки $\Omega \in \omega$ образуют разбиение симплекса σ : они не пересекаются по относительным внутренностям Ω° и покрывают весь симплекс, примыкая друг к другу по граням. Аналогично, клетки $\Xi \in \xi$ образуют разбиение открытого симплекса σ° .

В комплексе ω присутствуют как нульмерные клетки (вершины), так и полномерные. Это должно выполняться и для двойственного комплекса ξ . Полномерной клетке $\Omega \in \omega$ в комплексе ξ должна отвечать некоторая вершина q , а $(n-2)$ -мерной грани клетки Ω — примыкающая к q одномерная клетка комплекса ξ . Так как любая $(n-2)$ -мерная клетка в ω является гранью некоторой полномерной клетки Ω , то любая одномерная клетка комплекса ξ примыкает к некоторой вершине q .

Для задания вершины q в ξ нужно, чтобы неравенства некоторого достаточно полного набора неравенств (2.2) выполнялись как равенства, задавая вектор q с точностью до положительного множителя. Ясно, что можно обойтись набором из $(n-1)$ неравенств. Зафиксировав один из таких наборов, можно сопоставить парам (j, l) , отвечающим неравенствам набора, дуги $u = (j, l)$ ориентированного графа Γ с множеством вершин $J = \{1, \dots, n\}$. Ясно, что граф Γ будет деревом.

Одномерным клеткам комплекса $\Xi \in \xi$ (ребрам) будут отвечать наборы из $(n-2)$ условий указанного типа и графы Γ , состоящие из двух компонент связности, каждая из которых также будет деревом. Уравнения, отвечающие соответствующим неравенствам (2.2), будут описывать аффинный носитель клетки. Разбиению графа на две компоненты связности отвечает разбиение всего множества вершин J на два непересекающихся подмножества Q и J/Q . Для точек $\tilde{q} \in \Xi$ координаты \tilde{q}_j на каждой из компонент связности будут сохранять взаимные пропорции, задаваемые вершиной q ,

$$\tilde{q}_j = tq_j, \quad j \in Q, \quad (2.3)$$

$$\tilde{q}_l = \tau q_l, \quad l \in J/Q, \quad (2.4)$$

где t и τ — параметры, связь между которыми задается условием $\sum_{j=1}^n \tilde{q}_j = 1$.

Одномерной клетке $\Xi \in \xi$, примыкающей к вершине q , в комплексе ω сопоставляется $(n-2)$ -мерная грань полномерной клетки Ω , отвечающей вершине q . Эта грань задается уравнением, отвечающим одному из неравенств вида (2.1), с соответствующим разбиением множества J на S и J/S .

Таким образом, одномерные клетки $\Xi \in \xi$ (ребра комплекса ξ) характеризуются разбиениями множества J на два непересекающихся подмножества, как это имеет место и для отвечающих им $(n-2)$ -мерных клеток $\Omega \in \omega$.

У с л о в и е согласования [3]: Одномерная клетка комплекса ξ и отвечающая ей $(n-2)$ -мерная клетка комплекса ω задают одно и то же разбиение множества J на две части: $\{S, J \setminus S\}$ из (2.1) совпадает с $\{Q, J \setminus Q\}$ из (2.3), (2.4).

Это условие задает уже однозначно все другие соответствия между клетками комплексов ω и ξ : клетке комплекса $\Omega \in \omega$ меньшей размерности сопоставляется клетка $\Xi \in \xi$, являющаяся выпуклой оболочкой ребер комплекса ξ , отвечающих $(n-2)$ -мерным граням комплекса ω , содержащим рассматриваемую клетку Ω .

В [3; 4] рассматривался случай, когда все векторы d в неравенствах (2.1) имеют вид $d = \lambda\theta$ при $\theta = (1, \dots, 1)$ и $\lambda \in [0, 1)$. В этом случае с учетом $p \in \sigma$ неравенства (2.1) принимают вид

$$\sum_{j \in S} p_j \geq \lambda.$$

Их можно переписать также в виде

$$(1 - \lambda) \sum_{j \in S} p_j - \lambda \sum_{k \notin S} p_k \geq 0.$$

Это случай регулярных отображений.

Рисунок 2 иллюстрирует пример полиэдральных комплексов на симплексе. Комплексы содержат по 13 клеток, при этом в комплексе ω имеются две полномерные клетки, помеченные номерами 1 и 2, которым в комплексе ξ соответствуют две вершины $1'$ и $2'$.

Рисунок 3 иллюстрирует решение возникающей задачи полиэдральной комплементарности. Решением является точка p^* — пересечение отвечающих друг другу клеток (ребер) 3 и $3'$.

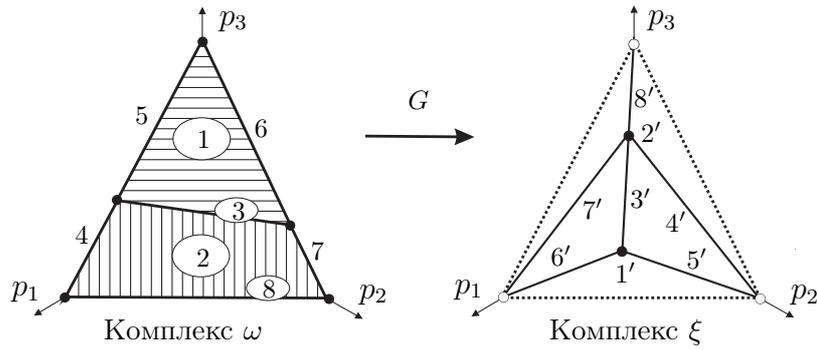


Рис. 2. Пример двойственных комплексов на симплексе.

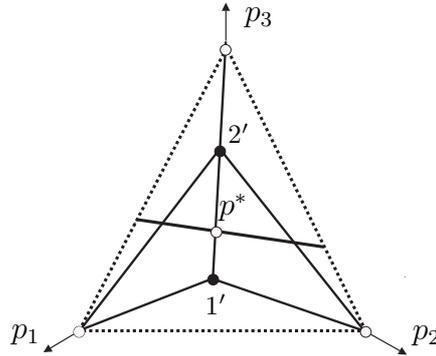


Рис. 3. Решение задачи комплементарности.

3. Монотонные отображения

Задачу полиэдральной комплементарности можно переформулировать в виде задачи о неподвижной точке точечно-множественного отображения G , сопоставляя каждой точке p из относительной внутренней Ω° клетки $\Omega \in \omega$ в качестве образа соответствующую клетку Ξ : $G(p) = \Xi$ для $p \in \Omega^\circ$. Исходная задача принимает вид: *найти точку* $p \in G(p)$. Несложно убедиться, что отображение G является полунепрерывным сверху. При этом точкам границы симплекса σ в качестве образов отвечают незамкнутые клетки Ξ . Непосредственно к симплексу σ теорема Какутани неприменима. Но если незначительно уменьшить симплекс σ , заменив условия $p_j \geq 0$ на $p_j \geq \varepsilon$ с малым ε , то все образы $G(p)$ будут уже замкнутыми, и теорема Какутани применима. Ясно, что речь идет о сужении отображения G на σ° , которое будем обозначать G° . Легко видеть, что его неподвижные точки совпадают с таковыми для G . Таким образом, в рассматриваемой задаче решение всегда существует.

Главной особенностью рассматриваемого класса задач полиэдральной комплементарности является тот факт, что при определенных условиях монотонности и регулярности упомянутые кусочно-постоянные отображения оказываются потенциальными, и проблема может быть сведена к оптимизационной задаче.

Понятие монотонного отображения вводится следующим образом.

Пусть для полномерной клетки $\Omega \in \omega$ клетка $\bar{\Omega}$ является $(n - 2)$ -мерной гранью. Рассмотрим вектор коэффициентов h в неравенстве (2.1) из системы, задающей клетку Ω . Это неравенство выполняется для точек клетки $\bar{\Omega}$ как равенство. Имеем

$$\bar{p} \in \bar{\Omega}, p \in \Omega^\circ \implies (h, p - \bar{p}) > 0.$$

Будем говорить в таком случае, что клетки Ω и $\bar{\Omega}$ образуют *подчиненную пару*. Подчеркнем, что каждой подчиненной паре отвечает вполне определенный вектор h . Множество всех подчиненных пар в ω обозначим Υ .

Подчиненной паре в ω отвечает пара клеток в ξ : вершина q и одномерная клетка $\bar{\Xi}$. Эту пару клеток из ξ также будем называть подчиненной.

Пусть $\bar{q} \in \bar{\Xi}$, $\bar{q} \neq q$. Как легко видеть, аффинные носители клеток $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Xi}$ трансверсальны. Поэтому выполняется одно из двух неравенств

$$(h, q - \bar{q}) > 0, \quad (3.1)$$

$$(h, q - \bar{q}) < 0. \quad (3.2)$$

О п р е д е л е н и е 3.1. Отображение G называется *локально возрастающим*, если (3.1) выполняется для любой пары клеток из Υ , и *локально убывающим* в случае (3.2).

В любом из случаев будем называть отображение *локально монотонным*.

З а м е ч а н и е 3.1. Заметим, что фигурирующий в определении вектор h однозначно определяет соответствующее множество S из (2.1): $S = \{j \in J \mid h_j > 0\}$. Компоненты \bar{q}_j , $j \in S$, получаются пропорциональным изменением компонент вектора q с сохранением взаимных пропорций $\bar{q}_j = tq_j$, $j \in S$. Для возрастающего отображения $t < 1$, а для убывающего $t > 1$. Аналогично $\bar{q}_l = \tau q_l$, $l \notin S$, и здесь $\tau > 1$ в случае возрастающего отображения и $\tau < 1$ — в случае убывающего отображения. Таким образом, в случае убывающего отображения имеем $\bar{q}_j > q_j$ при $j \in S$ и $\bar{q}_l < q_l$ — при $l \notin S$. В результате выполняется

$$\frac{\bar{q}_j}{\bar{q}_l} \geq \frac{q_j}{q_l}, \quad j \in S, \quad l \notin S.$$

Введенную терминологию можно пояснить также следующим образом.

О п р е д е л е н и е 3.2. Полномерные клетки $\Omega_1, \Omega_2 \in \omega$ называются *соседними*, если они имеют общую $(n-2)$ -мерную грань. Отвечающие им в ξ вершины q^1, q^2 также именуется *соседними* (в ξ).

Пусть $\bar{\Omega}$ — общая $(n-2)$ -мерная грань для соседних Ω_1, Ω_2 и h — вектор коэффициентов в соответствующем неравенстве (2.1) из задания клетки Ω_1 . Имеем $(h, p) > 0$, $p \in \Omega_1^\circ$, и $(h, p) < 0$, $p \in \Omega_2^\circ$. Поэтому $(h, p^1 - p^2) > 0 \quad \forall p^2 \in \Omega_2^\circ, p^1 \in \Omega_1^\circ$. В случае локально возрастающего отображения будет выполняться $(h, q^1 - q^2) > 0$. Таким образом, при отображении G рост аргумента p (в направлении h) ведет к росту образа q . Это свойство характеризует возрастающие функции в \mathbb{R}^1 .

Можно привести и несколько иную интерпретацию.

Изменение координат движущейся точки q по отрезку $[q^2, q^1]$ можно описать формулами (2.3), (2.4), полагая в них, например, $\tilde{q} = q^2$ (с $Q = S$). При этом один из параметров t, τ возрастает, а другой убывает (от значения 1). Как отмечалось в замечании 3.1, для возрастающего отображения $t > 1$ и $\tau < 1$. Взаимное расположение соседних в ξ вершин q^1, q^2 оказывается таким же, как и их прообразов в ω — клеток Ω_1, Ω_2 : из того, что клетка Ω_1 расположена по направлению h “дальше” клетки Ω_2 , следует, что по этому направлению точка q^1 также “дальше” точки q^2 .

В случае убывающего отображения $t < 1, \tau > 1$: порядок следования вершин q^1, q^2 оказывается обратным порядку следования клеток Ω_1, Ω_2 .

Рисунок 4 иллюстрирует локально убывающее отображение. Взаимное расположение соседних клеток Ω_1 и Ω_2 противоположно расположению их образов Ξ, Ξ_2 . Легко проверить, что отображение, порождаемое приведенными выше на рис. 2 комплексами, является локально убывающим. Из дальнейшего рассмотрения будет видно (см. рис. 5), что в определенном смысле монотонной является и соответствующая задача полиэдрадральной комплементарности.

Для регулярных отображений из локальной монотонности следует их потенциальность [3] и монотонность в целом. Благодаря этому проблему отыскания неподвижной точки регулярного убывающего отображения удается свести к задаче оптимизации специальной выпуклой

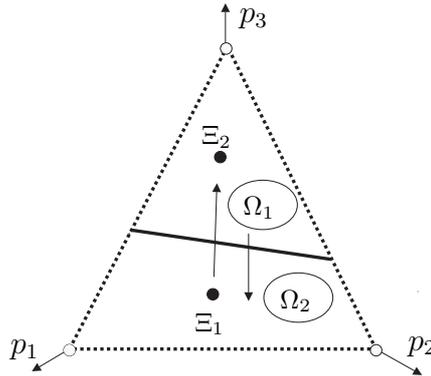


Рис. 4. Убывающее отображение.

функции на σ° . Прежде всего, следует отметить, что неподвижная точка не может лежать на границе симплекса σ , и, как отмечалось ранее, речь идет о неподвижной точке отображения G° .

Введем для $p > 0$ функцию $h(p) = (p, \ln p)$. Обозначим через $\bar{h}(p)$ сужение этой функции на σ° . Рассмотрим функцию

$$\varphi(p) = \bar{h}(p) - \bar{f}(p),$$

где $\bar{f}(p)$ — потенциальная функция отображения G° (см. [3]). Функция $\bar{h}(p)$ является строго выпуклой, а $\bar{f}(p)$ — вогнутой кусочно-линейной функцией. Поэтому функция $\varphi(p)$ будет строго выпуклой. Несложно убедиться, что у функции $\varphi(p)$ в σ° существует, и при том единственная, точка минимума. Это является следствием того, что производная функции одной переменной $p_j \ln p_j$ стремится к $+\infty$ при $p_j \rightarrow +0$, а функция $\bar{f}(p)$ кусочно-линейная. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 [4, теорема 2]. *Неподвижная точка отображения G совпадает с точкой минимума функции $\varphi(p)$.*

Для минимизации функции $\varphi(p)$ в [4] предложены простые алгоритмы субоптимизации. Но если не предполагать регулярности отображения, то потенциальность уже не имеет места, и эти алгоритмы неприменимы.

4. Метод встречных путей. Квазирегулярные отображения.

Идея метода встречных путей была предложена и реализована для отыскания равновесных цен в общей модели обмена в [6]. Ниже мы рассматриваем применение этой идеи для отыскания неподвижной точки регулярных и квазирегулярных отображений симплекса в себя, безотносительно к экономическим моделям равновесия, в которых такие отображения возникают. Предложен конечный алгоритм встречных путей, который можно рассматривать как аналог известного метода Лемке [5] для задач линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений задачи (класс P). Однако ввиду того, что процедура метода Лемке излагается на языке симплексных преобразований линейного программирования, идейную общность с предлагаемым процессом увидеть непросто.

1°. Опишем общую схему подхода применительно к задаче о неподвижной точке рассматриваемых отображений. Как и в случае регулярных отображений [4], на текущем k -м шаге процесса имеются две отвечающие друг другу клетки $\Omega_k \in \omega$, $\Xi_k \in \xi$ и две точки $p^k \in \Omega_k$, $q^k \in \Xi_k$. Рассматриваем аффинные носители имеющихся клеток $L_k \supset \Omega_k$, $M_k \supset \Xi_k$. При определенных дополнительных условиях на задание клеток комплекса ω , о которых речь пойдет ниже, L_k и M_k имеют единственную общую точку r^k . Отыскание этой точки сводится к решению некоторой линейной системы уравнений.

Рассматриваются две движущиеся точки $p(t) = (1-t)p^k + tr^k$ и $q(t) = (1-t)q^k + tr^k$ при изменении параметра $t \in [0, 1]$. Находим максимальное $t = t_k^*$, при котором еще соблюдаются условия $p(t) \in \Omega_k$, $q(t) \in \Xi_k$. Если оказалось, что $t_k^* = 1$, то r^k — это искомое решение проблемы. При $t_k^* < 1$ различаем два случая. Если t_k^* лимитируется условием $p(t) \in \Omega_k$, то это означает, что точка $p(t)$ при $t = t_k^*$ оказалась в некоторой грани клетки Ω_k . Эта грань принимается в качестве новой клетки Ω_{k+1} , что определяет и парную ей клетку Ξ_{k+1} . Случай, когда лимитирующим оказалось условие $q(t) \in \Xi_k$, аналогичен. В ситуации, когда лимитируют оба условия, можно выбирать произвольно один из них. Эта ситуация рассматривается как вырожденная. В любом случае принимаем $p^{k+1} = p(t_k^*)$, $q^{k+1} = q(t_k^*)$ и переходим к следующему шагу.

2°. Геометрическая интерпретация процесса. Будем рассматривать разности множеств по Минковскому, используя для этой операции особый знак вычитания “—”:

$$A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}.$$

На k -м шаге процесса имеем множество $\Theta_k = \Omega_k - \Xi_k$ и точку $\vartheta^k = p^k - q^k$, $\vartheta^k \in \Theta_k$. При изменении параметра t получаем переменную точку $\vartheta(t) = p(t) - q(t)$. Как легко видеть, $\vartheta(t) = (1-t)\vartheta^k$. Следовательно, все точки $\vartheta(t)$ движутся по направлению к точке 0 по лучу $\Lambda = \{\vartheta = \lambda\vartheta^0 \mid \lambda \geq 0\}$, $\vartheta^0 = p^0 - q^0$. Для $t = t_k^*$ получаем $\vartheta^{k+1} = \vartheta(t_k^*) = (1-t_k^*)\vartheta^k$. Процесс остановится, когда на очередном шаге будет получено $t_k^* = 1$, и, следовательно, $\vartheta^{k+1} = 0$, а $p^{k+1} = q^{k+1}$ — искомая неподвижная точка.

3°. Описанная схема применима и к регулярным отображениям, что приводит к новому алгоритму, отличному от предложенных в [4]. Но главная особенность этой схемы в том, что она позволяет также решить проблему неподвижной точки для более широкого класса убывающих отображений, которые мы именуем *квазирегулярными*.

Исследуем детально вопрос об определении точки пересечения текущих многообразий L_k и M_k . Рассмотрим граф, задающий частичный порядок в множестве клеток комплекса ω . Каждый максимальный путь в этом графе соединяет некоторую полномерную клетку $\hat{\Omega}$ с некоторой нульмерной клеткой $\check{\Omega} = \{\check{p}\}$. Рассмотрим один из таких путей P . При движении по этому пути последовательно с убыванием размерности проходятся множества $\Omega^1 = \hat{\Omega}, \Omega^2, \dots, \Omega^n = \check{\Omega}$. Как отмечалось ранее, s -му из этих множеств можно сопоставить некоторый граф $\Gamma(\Omega^s)$ с определенным числом компонент связности, являющихся деревьями. Ясно, что весь процесс движения по пути P можно рассматривать как последовательное исключение дуг из некоторого стартового графа-дерева $\hat{\Gamma}$, отвечающего множеству $\hat{\Omega}$. Число компонент текущего графа Γ^k увеличивается при движении к $\check{\Omega}$. Для нульмерной клетки (вершины) $\check{\Omega}$ этот граф распадется на изолированные вершины. Аффинный носитель вершины $\check{\Omega}$ имеет тривиальное описание в виде системы уравнений

$$p_j = \delta_j \quad j = 1, \dots, n, \quad \left(\sum_{j=1}^n \delta_j = 1 \right). \quad (4.1)$$

Для клеток большей размерности в системе уравнений, описывающей L_k , каждой компоненте связности соответствующего графа отвечает одно уравнение. Пусть τ — число компонент графа Γ , отвечающего рассматриваемой клетке, и $J = Q_1 \cup Q_2, \cup \dots, Q_\tau$ — получающееся разбиение множества вершин. В [4] показано, что при движении по пути P в обратном направлении, т. е. от $\hat{\Omega}$ к $\check{\Omega}$, на каждом шаге происходят объединение двух компонент связности в одну и суммирование соответствующих двух уравнений. Линейная система, задающая L_k , будет эквивалентна системе вида

$$\sum_{j \in Q_\nu} p_j = \sum_{j \in Q_\nu} \delta_j, \quad \nu = 1, \dots, \tau. \quad (4.2)$$

Для регулярных отображений правые части δ_j в системе (4.1) являются константами, характеризующими вершину $\check{\Omega}$. При переходе к квазирегулярным отображениям они заменяются линейными функциями.

О п р е д е л е н и е 4.1. Отображение G является *квазирегулярным*, если оно локально убывающее и вершины \check{p}^s комплекса ω задаются как решения линейных систем вида

$$p_j = (p, d^{sj}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

где d^{sj} являются строками неотрицательной матрицы D_s , для которой матрица D_s^T является стохастической: $D_s^T \theta = \theta$ ($\theta = (1, \dots, 1)$). Не исключается, что есть нулевые строки, так что матрица D_s перестановкой строк и такой же перестановкой столбцов приводится к виду

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \check{D}_s \end{pmatrix}.$$

Матрица \check{D}_s предполагается неразложимой. При дополнительном условии $\sum_{j \in J} p_j = 1$ система (4.3) имеет единственное решение (теорема Фробениуса).

Для квазирегулярных отображений система (4.2) принимает вид

$$\sum_{j \in Q_\nu} p_j = (p, \check{d}^\nu), \quad \nu = 1, \dots, \tau, \quad \check{d}^\nu = \sum_{j \in Q_\nu} d^{sj}. \quad (4.4)$$

Векторы \check{d}^ν так же, как и векторы d^{sj} , неотрицательны, и $\sum \check{d}^\nu = \theta$.

Для определения точки r^k систему (4.4) нужно рассматривать вместе с системой пропорций, задающей многообразие M_k . На ν -й компоненте связности компоненты вектора $q \in M_k$ определяются с точностью до положительного множителя π_ν компонентами текущей точки q^k :

$$q_j = \pi_\nu q_j^k, \quad j \in Q_\nu. \quad (4.5)$$

Рассматривая систему (4.4) совместно с системой (4.5) (при $q = p$), получаем для вектора множителей $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_\tau)$ систему

$$\pi = \gamma \pi, \quad (4.6)$$

где матрица γ имеет такие же свойства, как и матрица D_s , а значит при условии $\sum_{j=1}^\tau \pi_j = 1$ система (4.6) имеет единственное решение, что однозначно определяет точку r^k .

4°. Обоснование процесса для квазирегулярных отображений.

Вернемся к геометрической интерпретации процесса.

У с л о в и е невырожденности. Все грани, по которым луч Λ пересекает многогранники $\Theta = \Omega - \Xi$, имеют размерность $(n - 2)$.

Это условие является аналогом известного условия невырожденности в симплекс-методе линейного программирования. Ясно, что оно будет выполнено при незначительном изменении стартовых точек p^0, q^0 . Условие означает, что на каждом шаге процесса при определении величины t^* может реализоваться лишь одна из описанных возможностей, при этом размерности текущих клеток изменяются на одну единицу.

Теорема 2. При выполнении условия невырожденности процесс встречных путей позволяет получить искомую неподвижную точку квазирегулярного отображения за конечное число шагов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что Θ_k является выпуклым множеством, и, следовательно, $\Theta_k \cap \Lambda = [\vartheta^k, \vartheta^{k+1}]$. При $t_k^* > 0$ точка ϑ^{k+1} ближе к точке 0, чем точка ϑ^k . Если это так на каждом шаге, то точки ϑ^s монотонно приближаются к точке 0. Отсюда следует, что пройденные множества Θ_k в дальнейшем не повторяются. Конечность процесса последует из конечности числа клеток $\Omega \in \omega$. Таким образом, доказательство теоремы сводится к доказательству того, что $t_k^* > 0$ на каждом шаге процесса.

4°а. Рассмотрим предварительно случай регулярного отображения.

Пусть на предыдущем шаге величина t^{k-1} лимитировалась условием $p(t) \in \Omega_{k-1}$. Какое-то из неравенств системы, задающей Ω_{k-1} , препятствует увеличению параметра t и при $p = p^k$ выполняется как равенство. Этому неравенству (2.1) отвечает дуга $u_0 = (j_0, l_0)$ в графе $\Gamma_{k-1} = \Gamma(\Omega_{k-1})$, которая исключается при переходе к $\Gamma_k = \Gamma(\Omega_k)$. Пусть дуга u_0 принадлежит компоненте связности графа Γ_{k-1} с множеством вершин Q_1 . При исключении дуги u_0 эта компонента распадется на две, что повлечет разбиение множества Q_1 на Q_1^1 и Q_1^2 . Пусть для определенности $j_0 \in Q_1^1, l_0 \in Q_1^2$. Следуя логике рассмотрения [4], несложно показать, что неравенство (2.1), оказавшееся лимитирующим для t^{k-1} , эквивалентно неравенству такого же вида либо с $S = Q_1^1$, либо с $S = Q_1^2$. Пусть для определенности $S = Q_1^1$, т. е. лимитирующее неравенство эквивалентно неравенству

$$\sum_{j \in Q_1^1} p_j \geq \delta^1. \quad (4.7)$$

Этому неравенству точка r^{k-1} не удовлетворяет

$$\sum_{j \in Q_1^1} r_j^{k-1} < \delta^1. \quad (4.8)$$

Для определения координат точки r^{k-1} система вида (4.2) рассматривается совместно с системой, описывающей M_{k-1} . Последняя задает условия пропорциональности на каждой из компонент графа Γ_{k-1} . Пусть $U_{k-1,1}$ — множество дуг первой компоненты. Упомянутые условия пропорциональности для этой компоненты можно записать в виде

$$\frac{q_j}{q_l} = \frac{q_j^{k-1}}{q_l^{k-1}}, \quad (j, l) \in U_{k-1,1}.$$

Среди этих уравнений присутствует уравнение, отвечающее дуге u_0 , $\frac{q_{j_0}}{q_{l_0}} = \frac{q_{j_0}^{k-1}}{q_{l_0}^{k-1}}$.

На следующем шаге при переходе к графу Γ_k оно заменится неравенством. Вместо него в систему (4.2) при определении r^k добавится уравнение

$$\sum_{j \in Q_1^1} r_j^k = \delta^1. \quad (4.9)$$

Рассматриваемое отображение является убывающим, и, следовательно, в соответствии с замечанием 3.1 неравенство будет иметь тип “ \geq ”:

$$\frac{q_{j_0}}{q_{l_0}} \geq \frac{q_{j_0}^{k-1}}{q_{l_0}^{k-1}}. \quad (4.10)$$

Для точки $q = q^k$ здесь имеем равенство. Таким образом, точка q^k принадлежит границе клетки Ξ_k . Ввиду условия невырожденности лишь полученное неравенство может не позволить увеличить параметр t от значения $t = 0$. Все прочие неравенства в задании клетки Ξ_k должны выполняться как строгие. Это неравенство не будет препятствовать увеличению параметра t , если оно выполняется для новой точки r^k . Убедимся в этом.

У компонент r_j^k при $j \in Q_1^1$ взаимные пропорции такие же, как и у соответствующих компонент r_j^{k-1} . В то же время ввиду (4.8) и (4.9) имеем

$$\sum_{j \in Q_1^1} r_j^{k-1} < \sum_{j \in Q_1^1} r_j^k.$$

Тем самым, $r_j^{k-1} < r_j^k$ при $j \in Q_1^1$ и $r_l^{k-1} > r_l^k$ при $l \notin Q_1^1$. Ввиду $j_0 \in Q_1^1$, $l_0 \notin Q_1^1$ имеем $r_{j_0}^{k-1} < r_{j_0}^k$ и $r_{l_0}^{k-1} > r_{l_0}^k$. Отсюда следует, что неравенство (4.10) для $q = r^k$ выполняется, что и требовалось показать.

Таким образом, условие невырожденности обеспечивает $t_k^* > 0$.

Аналогично исследуется случай, когда величина t^{k-1} лимитировалась условием $q(t) \in \Xi_{k-1}$.

4°b. Рассмотрим изменения в приведенном анализе при переходе к квазирегулярным отображениям.

Так как клетки $\Xi \in \xi$ находятся в σ° , то при отыскании неподвижной точки можно ограничиться случаем $p^0 > 0$. В этом случае в системе (4.4) среди векторов \tilde{d}^v не будет нулевых, а в системе (4.6) матрица γ будет неразложимой.

При удалении дуги u_0 первое уравнение в системе (4.4) распадется на два уравнения вида

$$\sum_{j \in Q_1^1} p_j = (p, \tilde{d}^{1,1}), \tag{4.11}$$

$$\sum_{j \in Q_1^2} p_j = (p, \tilde{d}^{1,2}). \tag{4.12}$$

Здесь $\tilde{d}^{1,1}, \tilde{d}^{1,2} \geq 0$ и $\tilde{d}^{1,1} + \tilde{d}^{1,2} = \tilde{d}^1$. В (4.8) и (4.9) будем иметь $\delta^1 = (p, \tilde{d}^{1,1})$. Для точки r^{k-1} в новой системе будут выполняться все условия, кроме приведенных двух. Ввиду (4.8) в (4.11) будет неравенство типа “меньше” и в (4.12) — неравенство противоположного знака:

$$\sum_{j \in Q_1^1} p_j < (p, \tilde{d}^{1,1}), \tag{4.13}$$

$$\sum_{j \in Q_1^2} p_j > (p, \tilde{d}^{1,2}). \tag{4.14}$$

Утверждение. Для квазирегулярных отображений при $q = r^k$ выполняется неравенство (4.10).

Доказательство. Для получения требуемого неравенства (4.10) воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Пусть A — неотрицательная неразложимая матрица и x — ее положительный собственный вектор, λ — соответствующее собственное число. Если для положительного вектора \tilde{x} у вектора $\tilde{z} = \lambda \tilde{x} - A \tilde{x}$ все компоненты равны нулю кроме $\tilde{z}_{i_1}, \tilde{z}_{i_2}$, то

$$\tilde{z}_{i_1} \leq 0 \iff \frac{\tilde{x}_{i_1}}{\tilde{x}_{i_2}} \leq \frac{x_{i_1}}{x_{i_2}}.$$

Это утверждение является эквивалентной переформулировкой леммы 3 из [6].

Рассмотрим системы вида (4.6), возникающие при определении r^{k-1} и r^k . Обозначим матрицы этих систем соответственно γ^{k-1} , γ^k , и пусть π^{k-1} , π^k — соответствующие решения. Компоненты π_1^k, π_2^k отвечают условиям (4.11), (4.12), а π_1^{k-1} — их сумме в системе для r^{k-1} . Размерность вектора π^{k-1} на единицу меньше размерности вектора π^k . Пополним вектор π^{k-1} новой компонентой, дублируя π_1^{r-1} и получая таким образом вектор $\tilde{\pi}^{r-1}$ такой же размерности, что и π^k :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1^{r-1} &= \tilde{\pi}_2^{r-1} = \pi_1^{r-1}, \\ \tilde{\pi}_i^{r-1} &= \pi_{i-1}^{r-1} \quad \text{для } i > 2. \end{aligned} \tag{4.15}$$

При подстановке вектора $\tilde{\pi}^{r-1}$ в систему для π^k все уравнения будут выполняться, кроме первого и второго: ввиду (4.13), (4.14) получим соответственно неравенства типа “<” и “>”.

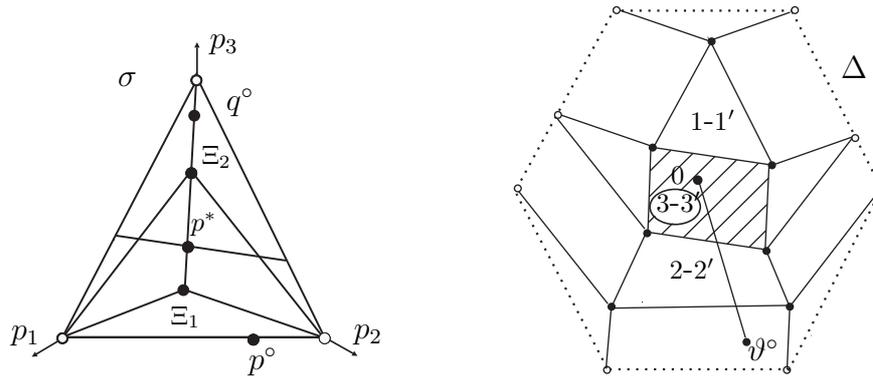


Рис. 5. Монотонность полиэдральной комплементарности на рис. 3.

В силу приведенной леммы отсюда следует $\frac{\tilde{\pi}_1^{r-1}}{\tilde{\pi}_2^{r-1}} \leq \frac{\pi_1^k}{\pi_2^k}$. С учетом (4.15) отсюда следует $\pi_2^k \leq \pi_1^k$. Ввиду $j_0 \in Q_1^1, l_0 \in Q_1^2$ имеем $r_{j_0}^k = \pi_1^k q_{j_0}^{k-1}, r_{l_0}^k = \pi_2^k q_{l_0}^{k-1}$. Поэтому

$$\frac{r_{j_0}^k}{r_{l_0}^k} = \frac{\pi_1^k q_{j_0}^{k-1}}{\pi_2^k q_{l_0}^{k-1}} \geq \frac{q_{j_0}^{k-1}}{q_{l_0}^{k-1}}.$$

Таким образом, для $q = r^k$ требуемое неравенство (4.10) выполняется. Это завершает обоснование метода встречных путей для квазирегулярных отображений. \square

5. Монотонность в задачах полиэдральной комплементарности

Описанный метод встречных траекторий характеризуется монотонным движением текущей точки $\vartheta^k = p^k - q^k$ аналогично тому, как это происходит в методе Лемке для задач линейной комплементарности в случае положительных главных миноров матрицы ограничений (класс P). Такие задачи всегда имеют единственное решение. Доказанная монотонность процесса для убывающих квазирегулярных отображений свидетельствует о том, что текущие соседние многогранники $\Theta_k = \Omega_k - \Xi_k$ не пересекаются по внутренним точкам. Используя логику проведенного рассмотрения, несложно убедиться, что все множества $\Theta = \Omega - \Xi$, порождаемые отвечающими друг другу клетками $\Omega \in \omega, \Xi \in \xi$, не пересекаются по внутренним точкам и образуют разбиение множества $\Delta = \sigma - \sigma^\circ$. Следствием этого является монотонность процесса и единственность неподвижной точки. Такие задачи полиэдральной комплементарности естественно называть монотонными. Для задач линейной комплементарности монотонность обеспечивается положительностью главных миноров матрицы ограничений. В случае квазирегулярных отображений монотонность в задаче полиэдральной комплементарности имеет более сложную природу. Несложно привести примеры, показывающие, что локальной монотонности недостаточно для монотонности в целом даже в случае линейной комплементарности. Для квазирегулярных отображений важным является особый характер неравенств, задающих клетки комплекса Ξ , — они являются двухкомпонентными аналогично столбцам матрицы ограничений в двухкомпонентных задачах линейного программирования. Рисунок 5 иллюстрирует монотонность на приведенном выше примере задачи полиэдральной комплементарности (см. рис. 3) Отрезок $[\vartheta^\circ, 0]$ отвечает траектории движущейся точки ϑ^k в методе встречных путей.

Заключение

В работе исследуется задача отыскания неподвижной точки точечно-множественных отображений симплекса в себя, порождаемых парой полиэдральных комплексов в двойственности.

Такие отображения возникли при исследовании проблемы экономического равновесия в линейных моделях обмена. Рассматривается новый класс квазирегулярных убывающих отображений. Такие отображения характеризуются определенным свойством монотонности, следствием чего является единственность неподвижной точки. Отвечающие им задачи полиэдральной комплементарности не имеют аналогов в \mathbb{R}^n . Для отыскания неподвижных точек предложена и обоснована конечная процедура встречных путей, которая обобщает известный метод Лемке для задач линейной комплементарности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шмырев В.И.** Об отыскании неподвижных точек кусочно-постоянных монотонных отображений в \mathbb{R}^n // Докл. АН СССР. 1981. Т. 259, № 2. С. 299–301.
2. **Шмырев В.И.** Задача полиэдральной комплементарности // Оптимизация: сб. науч. тр. / Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1988. Вып. 44(61). С. 82–95.
3. **Шмырев В.И.** Полиэдральная комплементарность на симплексе. Потенциальность регулярных отображений // Сиб. журн. индустр. математики. 2018. Т. 21, № 1(73). С. 118–128. doi: 10.17377/SIBJIM.2018.21.111.
4. **Шмырев В.И.** Полиэдральная комплементарность на симплексе: отыскание неподвижных точек убывающих регулярных отображений // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26, № 1. С. 94–114. doi: 10.33048/daio.2019.26.598.
5. **Lemke С.Е.** Bimatrix equilibrium points and mathematical programming // Management Science. 1965. Vol. 11, no. 7. P. 681–689. doi: 10.1287/mnsc.11.7.681.
6. **Шмырев В.И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 162–175.
7. **Eisenberg E., Gale D.** Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method // Ann. Math. Statist. 1959. Vol. 30, no. 1. P. 165–168. doi: 10.1214/aoms/1177706369.
8. **Devanur N. R., Papadimitriou C. H., Saberi A., Vazirani V. V.** Market equilibrium via a primal–dual algorithm for a convex program // JACM. 2008. Vol. 55, no. 5. Paper 22. doi: 10.1145/1411509.1411512.
9. **Шмырев В. И.** Алгоритмы полиэдральной комплементарности для отыскания равновесия в линейных моделях конкурентной экономики // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Сер. 2. Т. 21, № 2. С. 84–101.
10. **Шмырев В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 5. С. 1062–1066.
11. **Nikhil R. Devanur, Kamal Jain, Tung Mai, Vijay V. Vazirani, Sadra Yazdanbod.** New convex programs for Fisher’s market model and its generalizations. 2016. arXiv: 1603.01257v1 [cs.GT]. (Available at: <https://arxiv.org/pdf/1603.01257.pdf>). 23 p.
12. **Richard Cole, Nikhil Devanur, Vasilis Gkatzelis, Kamal Jain, Tung Mai, Vijay V. Vazirani, Sadra Yazdanbod.** Convex program duality, fisher markets, and nash social welfare // Proc. 18th ACM Conf. Econom. and Comput. 2017. P. 459–460. doi: 10.1145/3033274.3085109.
13. **Шмырев В. И.** Об одном алгоритме отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 2. С. 139–154.
14. **Понтрягин Л. С.** Основы комбинаторной топологии. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 120 с.
15. **Александров П. С.** Общая теория гомологий. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. 416 с.

Поступила 28.01.2019

После доработки 15.03.2019

Принята к публикации 15.04.2019

Шмырев Вадим Иванович

д-р физ.-мат. наук, вед. научный сотрудник

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;

Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

e-mail: shvi@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Shmyrev V.I. On the determination of fixed points of piecewise constant monotone mappings in \mathbb{R}^n . *Sov. Math. Dokl.*, 1981, vol. 24, no. 1, pp. 88–90.
2. Shmyrev V.I. The problem of polyhedral complementarity. *Optimizatsiya*, 1988, vol. 44 (61), pp. 82–95 (in Russian).
3. Shmyrev V.I. Polyhedral complementarity on a simplex. Potentiality of regular mappings. *J. Appl. Indust. Math.*, 2018, vol. 12, no. 1, pp. 167–176. doi: 10.1134/S1990478918010155.
4. Shmyrev V.I. Polyhedral complementarity on a simplex: search for fixed points of decreasing regular mappings. *Diskret. Anal. Issled. Oper.*, 2019, vol. 26, no. 1, pp. 114–134 (in Russian). doi: 10.33048/daio.2019.26.598.
5. Lemke C.E. Bimatrix equilibrium points and mathematical programming. *Management Science*, 1965, vol. 11, no. 7, pp. 681–689. doi: 10.1287/mnsc.11.7.681.
6. Shmyrev V.I. An algorithm for the search of equilibrium in a linear exchange model. *Sib. Math. J.*, 1985, vol. 26, no. 2, pp. 288–300. doi: 10.1007/BF00968776.
7. Eisenberg E., Gale D. Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method. *Ann. Math. Statist.*, 1959, vol. 30, no. 1, pp. 165–168.
8. Devanur N.R., Papadimitriou C.H., Saberi A., Vazirani V.V. Market equilibrium via a primal–dual algorithm for a convex program. *JACM*, 2008, vol. 55, no. 5, paper 22. doi: 10.1145/1411509.1411512.
9. Shmyrev V.I. Polyhedral complementarity algorithms for finding equilibrium in linear models of competitive economics. *Diskret. Anal. Issled. Oper.*, 2014, vol. 21, no. 2, pp. 84–101 (in Russian).
10. Shmyrev V.I. On an approach to the determination of equilibrium in elementary exchange models. *Sov. Math. Dokl.*, 1983, vol. 27, no. 1, pp. 230–233.
11. Nikhil R. Devanur, Kamal Jain, Tung Mai, Vijay V. Vazirani, Sadra Yazdanbod. New convex programs for fisher’s market model and its generalizations. *arXiv:1603.01257v1 [cs.GT]*. 2016. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1603.01257.pdf>. 23 p.
12. Richard Cole, Nikhil Devanur, Vasilis Gkatzelis, Kamal Jain, Tung Mai, Vijay V. Vazirani, Sadra Yazdanbod. Convex program duality, fisher markets, and nash social welfare. In: *Proc. 18th ACM Conf. Economics and Computation*, Massachusetts Institute of Technology, 2017, pp. 459–460. doi: 10.1145/3033274.3085109.
13. Shmyrev V.I. An algorithm for finding equilibrium in the linear exchange model with fixed budgets. *J. Appl. Indust. Math.*, 2009, vol. 3, no. 4, pp. 505–518. doi: 10.1134/S1990478909040097.
14. Pontryagin L.S. *Foundations of combinatorial topology*. Dover Publ., 2015, 112 p. ISBN: 9780486406855. Original Russian text published in Pontryagin L.S. *Osnovy kombinatornoi topologii*. Moscow: Nauka Publ., 1986, 120 p.
15. Aleksandrov P.S. *Obshchaya teoriya gomologii* [General homology theory]. Moscow: Nauka Publ., 1979, 416 p.

Received January 28, 2019

Revised March 15, 2019

Accepted April 15, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-010-00910 A), by Program no. 227 of the Presidium of the Russian Academy of Sciences, and by Interdisciplinary Integration Project no. 7B of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Vadim Ivanovich Shmyrev, Dr. Phys.-Math. Sci., Sobolev Institute of Mathematics; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630990 Russia, e-mail: shvi@math.nsc.ru.

Cite this article as: V. I. Shmyrev. Polyhedral complementarity on a simplex. Method of meeting paths for decreasing quasi-regular mappings, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 273–286.