ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.5

СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО СУММАМИ ФУРЬЕ ПО ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов

Пусть $\mathcal{A}(U)$ — множество аналитических в круге $U := \{z : |z| < 1\}$ функций f; $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(U)$ — класс функций $f \in \mathcal{A}(U)$, у которых $f^{(r)} \in L_2^{(r)}$, $r \in \mathbb{N}$; $W^{(r)}L_2$ — класс функций $f \in L_2^{(r)}$, удовлетворяющих ограничению $\|f^{(r)}\| \le 1$. В статье найдены точные значения среднеквадратических приближений функций $f \in W^{(r)}L_2$ и их последовательных производных $f^{(s)}(1 \le s \le r-1,\ r \ge 2)$ в метрике пространстве L_2. Аналогичная задача решена на классе $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N})$ — функций $f \in L_2^{(r)}$, $\mathscr{K}$-функционал r-й производной которых удовлетворяет условию

$$\mathscr{K}_m(f^{(r)}, t^m) \le \Psi(t^m), \quad 0 < t < 1,$$

где Ψ — некоторая возрастающая мажоранта, $\Psi(0) = 0$.

Ключевые слова: обобщенный модуль непрерывности, оператор обобщенного сдвига, ортонормированная система, неравенство Джексона — Стечкина, $\mathscr{K}$-функционал.

M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusainov. Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems.

Assume that $\mathcal{A}(U)$ is the set of functions analytic in the disk $U := \{z : |z| < 1\}$, $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(U)$ for $r \in \mathbb{N}$ is the class of functions $f \in \mathcal{A}(U)$ such that $f^{(r)} \in L_2^{(r)}$, and $W^{(r)}L_2$ is the class of functions $f \in L_2^{(r)}$ satisfying the constraint $\|f^{(r)}\| \le 1$. We find exact values for mean-square approximations of functions $f \in W^{(r)}L_2$ and their successive derivatives $f^{(s)}$ $(1 \le s \le r-1,\ r \ge 2)$ in the metric of the space L_2. A similar problem is solved for the class $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N})$ of functions $f \in L_2^{(r)}$ such that the $\mathscr{K}$-functional of their rth derivative satisfies the condition

$$\mathscr{K}_m\left(f^{(r)}, t^m\right) \le \Psi(t^m), \quad 0 < t < 1,$$

where Ψ is some increasing majorant and $\Psi(0) = 0$.

Keywords: generalized modulus of continuity, generalized translation operator, orthonormal system, Jackson–Stechkin inequality, $\mathscr{K}$-functional.

MSC: 42C10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-258-272

Посвящается 80-летию академика РАН В.И.Бердышева

1. Введение. Некоторые необходимые известные факты

В работе рассматривается задача среднеквадратичного полиномиального приближения функций комплексного переменного, регулярных в некоторой односвязной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, суммами Фурье по ортогональной системе в пространстве $L_2 := L_2(\mathcal{D})$ с конечной нормой

$$\|f\|_2 := \|f\|_{L_2(\mathcal{D})} = \left(\frac{1}{\pi} \iint\limits_{(\mathcal{D})} |f(z)|^2 \, d\sigma\right)^{1/2},$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, $d\sigma$ — элемент площади.

Отметим, что различные аспекты теории ортогональных по области регулярных функций и аппроксимации в среднем функций $f \in L_2(\mathcal{D})$ суммами Фурье рассмотрены в монографии [1, гл. III, с. 196–278]. В [2; 3] изучена задача отыскания точной константы в неравенстве типа Джексона — Стечкина между величиной наилучшего среднеквадратичного приближения функций $f \in L_2(\mathcal{D})$ и обобщенным модулем непрерывности высшего порядка; см. также статью 2018 г. второго автора (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 4. С. 217–224), где приведено некоторое уточнение неравенства Джексона — Стечкина из [2]. В случае, когда $\mathcal{D} = U := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, в [4] получены точные оценки скорости сходимости рядов Фурье по ортогональной в круге U системе $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ на классах функций, задаваемых обобщенным модулем непрерывности m-го порядка, и вычислены значения ряда n-поперечников на указанных классах функций. Здесь мы продолжим исследования в этом направлении и попутно обобщим некоторые результаты работы [4], используя те же обозначения и некоторые базовые факты, приведенные в указанной работе; напомним лишь те из них, которые будут применяться в дальнейшем.

Пусть

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k(z) \tag{1.1}$$

— ряд Фурье функции $f \in L_2$ по ортонормированной относительно скалярного произведения $(f,g) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\iint_{(\mathcal{D})} f(z)\overline{g(z)}\,d\sigma$ в области $\mathcal{D}$ системе комплекснозначных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$;

$$S_{n-1}(f,z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(f)\varphi_k(z)$$

— частичная сумма n-го порядка ряда (1.1), где

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(z)\overline{\varphi_k(z)}\,d\sigma \quad \text{— коэффициенты Фурье функции } f; \tag{1.2}$$

$$\mathcal{P}_{n-1} = \left\{p_{n-1}\colon p_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k\varphi_k(z), \quad d_k \in \mathbb{C}\right\}$$

— множество обобщенных полиномов;

$$E_{n-1}(f)_2 = \inf\left\{\|f - p_{n-1}\|_2\colon p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\right\}$$

— величина наилучшего среднеквадратического приближения функции $f \in L_2$ множеством $\mathcal{P}_{n-1}$. Известно (см., например, [1, с. 263]), что $E_{n-1}(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2 = \Big[\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}|a_k(f)|^2\Big]^{1/2}$, где $a_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f, определенные равенством (1.2).

С помощью ядра

$$T(\xi,\eta;h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)}h^k, \tag{1.3}$$

где $h \in (0,1)$, $(\xi,\eta) \in \mathcal{D}\times\mathcal{D}$, а равенство (1.3) понимается в смысле сходимости в $L_2(\mathcal{D}\times\mathcal{D})$, зададим в пространстве L_2 оператор обобщенного сдвига

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(\mathcal{D})} f(\zeta)T(z,\zeta;1-h)\,d\sigma. \tag{1.4}$$

Некоторые свойства оператора (1.4) приведены в [2; 4], в частности (см. [4, формула (1.6)]), оператор (1.4) представим в виде

$$F_h f(z) = \frac{1}{\pi} \iint\limits_{(\mathcal{D})} f(\zeta) T(z, \zeta; 1-h)\, d\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z) (1-h)^k.$$

На его основе определим, следуя работе [2], для функции $f \in L_2$ конечные разности первого и высших порядков с шагом $h \in (0,1)$ равенствами

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = (F_h - \mathbb{I}) f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (F_h - \mathbb{I})^m f(z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^k f(z),$$

где $F_h^0 f(z) = \mathbb{I} f(z) = f(z)$, $F_h^k f(z) = F_h(F_h^{k-1} f(z))$, $k = \overline{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве L_2. Имеем (см. [4, с. 619, 620])

$$\Delta_h^1 f(z) = F_h f(z) - f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k(z) ((1-h)^k - 1),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k [1 - (1-h)^k]^m a_k(f) \varphi_k(z), \quad h \in (0,1), \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\|\Delta_h^m f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1-h)^k]^{2m} |a_k(f)|^2,$$

$$\Omega_m(f;t)_2 = \sup\left\{\|\Delta_h^m f\|_2 \colon 0 < h \le t\right\} = \Big[\sum_{k=0}^{\infty} [1 - (1-t)^k]^{2m} |a_k(f)|^2\Big]^{1/2}. \tag{1.5}$$

Величина (1.5) называется [4] *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка функции* $f \in L_2$.

В данной работе будет рассматриваться лишь случай, когда $\mathcal{D}$ есть открытый единичный круг

$$U := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\},$$

а в качестве ортонормированной системы в $\mathcal{D} = U$ функций взята система

$$\big\{\varphi_k^*(z) = \sqrt{k+1} z^k\big\}_{k=0}^{\infty}. \tag{1.6}$$

Обозначим через $\mathcal{A}(U)$ множество аналитических в U функций f. В дальнейшем нам понадобятся известные соотношения (подробнее см. в [4, разд. 2]) в терминах коэффициентов $c_k(f)$ разложений функции $f \in \mathcal{A}(U)$ в ряд Маклорена

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k$$

и в терминах коэффициентов $a_k(f)$ ряда Фурье этой функции по системе (1.6)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f) \varphi_k^*(z),$$

а также аналогичные соотношения для производной $f^{(r)}$ порядка $r \in \mathbb{N}$. А именно,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1}, \quad E_{n-1}^2(f)_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1};$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(f)\varphi_k^*(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k;$$

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} c_k(f)k(k-1)\cdots(k-r+1)z^{k-r} := \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r},$$

где $\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+, \quad k \geq r.$

2. Вспомогательные утверждения

Через $L_2^{(r)} := L_2^{(r)}(U)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ L_2^{(0)} := L_2(U))$ обозначим класс функций $f \in L_2$, у которых $f^{(r)} \in L_2$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ f^{(0)} \equiv f)$. В [4] при любых $n, m \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+$ в предположении $n > r \geq s \geq 0$, $t \in (0,1)$ доказаны равенства

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1}, \tag{2.1}$$

$$E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}, \tag{2.2}$$

$$\Omega_m^2(f^{(r)};t)_2 = \sum_{k=r}^{\infty} [1-(1-t)^{k-r}]^{2m} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}. \tag{2.3}$$

Условимся далее в соотношениях общего характера при вычислении верхней грани по всем функциям $f \in L_2^{(r)}$ предполагать, что $f \notin \mathscr{P}_r$, где $\mathscr{P}_r$ — множество комплексных алгебраических полиномов степени не выше r. Имеет место следующая

Лемма 1. *Для любых $n \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+$, при условии $n > r \geq s$ справедливо равенство*

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} = \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\, \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, учитывая, что при любых $k, n \in \mathbb{N},\ k \geq n,\ r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, удовлетворяющих ограничению $k \geq n > r \geq s$, справедливо равенство

$$\max_{k \geq n} \left\{ \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{k-r+1}{k-s+1} \right\} = \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n-s+1},$$

из соотношения (2.2) получаем

$$E_{n-s-1}^2 f^{(s)})_2 = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,s}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{k-r+1}{k-s+1} \cdot \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}$$

$$\leq \max_{k \geq n} \left\{ \frac{\alpha_{k,s}^2}{\alpha_{k,r}^2} \cdot \frac{k-r+1}{k-s+1} \right\} \cdot \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 \frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1} = \frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2} \cdot \frac{n-r+1}{n-s+1} \cdot E_{n-r-1}^2(f^{(r)})_2,$$

откуда сразу следует оценка сверху величины, стоящей в левой части равенства (2.4):

$$\sup_{f \in L_2^{(r)}} \frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}. \tag{2.5}$$

Но так как для функции $f_0(z)=z^n\in L_2^{(r)},\ n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\geq s,$

$$E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2=\frac{\alpha_{n,s}}{\sqrt{n-s+1}},\quad E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_2=\frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+1}},\tag{2.6}$$

то, пользуясь равенствами (2.6), получаем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2}{E_{n-r-1}(f^{(r)})_2}\geq\frac{E_{n-s-1}(f_0^{(s)})_2}{E_{n-r-1}(f_0^{(r)})_2}=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}.\tag{2.7}$$

Равенство (2.4) вытекает из сопоставления неравенств (2.5) и (2.7). Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *При любых $k,m,n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ k\geq n>r\geq s$ и $t\in(0,1)$ имеет место равенство*

$$\inf_{k\geq n}\left\{\left[1-(1-t)^{k-r}\right]^{2m}\frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2}\cdot\frac{k-s+1}{k-r+1}\right\}=\left[1-(1-t)^{n-r}\right]^{2m}\frac{\alpha_{n,r}^2}{\alpha_{n,s}^2}\cdot\frac{n-s+1}{n-r+1}.\tag{2.8}$$

Доказательство. В самом деле, поскольку функция

$$y(k):=\left[1-(1-t)^{k-r}\right]^{2m}\frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2}\cdot\frac{k-s+1}{k-r+1}$$

$$=\left[1-(1-t)^{k-r}\right]^{2m}\left[\frac{k(k-1)\cdots(k-r+1)}{k(k-1)\cdots(k-s+1)}\right]^2\cdot\frac{k-s+1}{k-r+1}$$

$$=\left[1-(1-t)^{k-r}\right]^{2m}\cdot[(k-s)(k-s-1)\cdots(k-r+2)]^2\cdot(k-r+1)(k-s+1)$$

при фиксированных $r,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\geq s$, монотонно возрастает по $k\geq n$, то $\inf\limits_{k\geq n}y(k)=y(n)$ и имеет место соотношение (2.8). Лемма 2 доказана.

3. Неравенство типа Джексона — Стечкина

В этом разделе получены некоторые неулучшаемые неравенства типа Джексона — Стечкина для функций, принадлежащих классу $L_2^{(r)}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для произвольной функции $f\in L_2^{(r)}$ при любых $m,n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\geq s$ и $t\in(0,1)$ справедлива оценка*

$$E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_2\leq\frac{n-r+1}{n-s+1}\cdot\frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2}\cdot[1-(1-t)^{n-r}]^{-2m}\cdot\Omega_m^2(f^{(r)};t)_2,\tag{3.1}$$

причем при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\geq s$ константа в правой части неравенства (3.1) *уменьшена быть не может.*

Доказательство. Пользуясь равенством (2.3) для любых $m,n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\geq s$ с учетом равенств (2.1) и (2.8) будем иметь

$$\Omega_m^2(f^{(r)};t)_2=\sum_{k=r}^{\infty}[1-(1-t)^{k-r}]^{2m}\alpha_{k,r}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}\geq\sum_{k=n}^{\infty}[1-(1-t)^{k-r}]^{2m}\alpha_{k,r}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k-r+1}$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}[1-(1-t)^{k-r}]^{2m}\frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2}\cdot\frac{k-s+1}{k-r+1}\cdot\alpha_{k,s}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1}$$

$$\geq \inf_{k\geq n}\left\{\left[1-(1-t)^{k-r}\right]^{2m}\frac{\alpha_{k,r}^2}{\alpha_{k,s}^2}\cdot\frac{k-s+1}{k-r+1}\right\}\cdot\sum_{k=n}^{\infty}\alpha_{k,s}^2\frac{|c_k(f)|^2}{k-s+1}$$

$$=\left[1-(1-t)^{n-r}\right]^{2m}\frac{\alpha_{n,r}^2}{\alpha_{n,s}^2}\cdot\frac{n-s+1}{n-r+1}\cdot E_{n-s-1}^2(f^{(s)})_2,$$

откуда и вытекает неравенство (3.1). Докажем неулучшаемость (3.1). Для этого вводим в рассмотрение функцию $f_0(z)=z^n\in L_2^{(r)}$, использованную нами при доказательстве леммы 1 и для которой, как следует из (2.3),

$$\Omega_m^2\big(f_0^{(r)};t\big)_2=[1-(1-t)^{n-r}]^{2m}\frac{\alpha_{n,r}^2}{n-r+1}. \tag{3.2}$$

Также, пользуясь первым из равенств (2.6) и соотношением (3.2), будем иметь

$$E_{n-s-1}^2\big(f_0^{(s)}\big)_2=\frac{\alpha_{n,s}^2}{n-s+1}=\frac{n-r+1}{n-s+1}\cdot\frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2}\cdot[1-(1-t)^{n-r}]^{-2m}\cdot\Omega_m^2(f_0^{(r)};t)_2, \tag{3.3}$$

откуда и следует утверждение теоремы 1.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 1 *имеет место равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\,E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Omega_m(f^{(r)};t)_2}=\frac{1}{\left[1-(1-t)^{n-r}\right]^m}. \tag{3.4}$$

В частности, из (3.4) *при любых* $n\in\mathbb{N},\ r\in\mathbb{Z}_+,\ n>r$ *вытекает соотношение*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\,E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Omega_m(f^{(r)};1/(n-r))_2}=(1-e^{-1})^{-m}. \tag{3.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, из (3.1) получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (3.4):

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\,E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Omega_m(f^{(r)};t)_2}\leq\frac{1}{\left[1-(1-t)^{n-r}\right]^m}, \tag{3.6}$$

а учитывая равенство (3.3), запишем оценку снизу

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\,E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Omega_m(f^{(r)};t)_2}$$

$$\geq\frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})\,E_{n-s-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2}{\Omega_m\big(f_0^{(r)};t\big)_2}=\frac{1}{\left[1-(1-t)^{n-r}\right]^m}. \tag{3.7}$$

Из сравнения неравенств (3.6) и (3.7) следует равенство (3.4) и, если полагать в обеих частях (3.4) $t=1/(n-r)$, $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$, и перейти к верхней грани по всем $n\in\mathbb{N}$, то приходим к равенству (3.5), чем и завершаем доказательство следствия 1.

4. Основные результаты

Далее условимся под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ понимать неотрицательную суммируемую функцию q, не эквивавалентную нулю на этом же отрезке. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $f\in L_2^{(r)}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$, $n>r\geq s$, $0<p\leq\infty$, $h\in(0,1)$, $q\in L_p$ *— весовая на интервале* $(0,h)$ *функция. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}}\frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\Big(\int_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,q(t)\,dt\Big)^{1/p}}$$

$$=\Bigg(\int\limits_0^h[1-(1-t)^{n-r}]^{mp}q(t)\,dt\Bigg)^{-1/p}. \tag{4.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего отметим, что в соотношении (4.1) для параметра p, удовлетворяющего условию $0<p\leq\infty$, функционал $\|\Omega_m\|_p$ определен соотношениями

$$\|\Omega_m\|_p=\Bigg(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)_2\,q(t)\,dt\Bigg)^{1/p},\quad 0<p<\infty,$$

$$\|\Omega_m\|_\infty=\lim_{p\to\infty}\Bigg(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)_2q(t)\,dt\Bigg)^{1/p}=\max\big\{\Omega_m(f^{(r)},t)_2\colon t\in(0,h],\ 0<h<1\big\}.$$

При этом указанный функционал лишь при $1\leq p\leq\infty$ является нормой. Переходим к доказательству (4.1). Для случая $0<p\leq 2$ при любых $m,\ n\in\mathbb{N},\ r,s\in\mathbb{Z}_+,\ n>r\geq s$ равенство (4.1) доказывается по схеме рассуждений из [4], поэтому приводим доказательство (4.1) в случае $2\leq p\leq\infty$. С этой целью неравенство (3.1) перепишем в виде

$$\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{2m}E_{n-s-1}^2\big(f^{(s)}\big)_2\leq\frac{n-r+1}{n-s+1}\cdot\frac{\alpha_{n,s}^2}{\alpha_{n,r}^2}\cdot\Omega_m^2(f^{(r)};t)_2$$

и, возведя обе стороны неравенства в степень $p/2$ $(2\leq p\leq\infty)$, умножив на весовую функцию $q(t)$ и интегрируя по переменной t от 0 до h, будем иметь

$$\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)};t)_2q(t)\,dt\geq\frac{\alpha_{n,r}^p}{\alpha_{n,s}^p}\left(\frac{n-s+1}{n-r+1}\right)^{p/2}\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp}q(t)\,dt\cdot E_{n-s-1}^p\big(f^{(s)}\big)_2,$$

откуда

$$\Bigg(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f^{(r)};t)_2q(t)\,dt\Bigg)^{1/p}$$

$$\geq\frac{\alpha_{n,r}}{\alpha_{n,s}}\sqrt{\frac{n-s+1}{n-r+1}}\Bigg(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp}q(t)\,dt\Bigg)^{1/p}E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2. \tag{4.2}$$

Поскольку неравенство (4.2) верно для любого $f \in L_2^{(r)}$, то из него получаем оценку сверху величины, расположенной в левой части (4.1),

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_2 q(t)\,dt\right)^{1/p}} \le \left(\int\limits_0^h [1-(1-t)^{n-r}]^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p}. \tag{4.3}$$

Для получения оценки снизу той же величины введем в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in L_2^{(r)}$, использованную нами при доказательстве леммы 1. Учитывая первое из равенств (2.6) и соотношение (3.2), запишем

$$\sup_{f\in L_2^{(r)}} \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_2 q(t)\,dt\right)^{1/p}}$$

$$\ge \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})E_{n-s-1}\big(f_0^{(s)}\big)_2}{\left(\int_0^h \Omega_m^p(f_0^{(r)},t)_2 q(t)\,dt\right)^{1/p}}$$

$$= \frac{\sqrt{(n-s+1)/(n-r+1)}\,(\alpha_{n,r}/\alpha_{n,s})(\alpha_{n,s}/\sqrt{n-s+1})}{\left((\alpha_{n,r}/\sqrt{n-r+1})\int_0^h [1-(1-t)^{n-r}]^{mp} q(t)\,dt\right)^{1/p}}$$

$$= \left(\int\limits_0^h [1-(1-t)^{n-r}]^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p}. \tag{4.4}$$

Сопоставляя оценку сверху (4.3) с оценкой снизу (4.4), получаем требуемое равенство (4.1). Тот факт, что в (4.1) функция $f_0(z) = z^n \in L_2^{(r)}$ реализует верхнюю грань, следует из трех последних равенств в соотношении (4.4). Теорема 2 доказана.

Неубывающая на $[0,\infty)$ функция Φ называется *k-мажорантой* [5, с. 25], если функция $t^{-k}\Phi(t)$ не возрастает на $[0,\infty)$, $\Phi(0) = 0$ и $\Phi(t) \to 0$ при $t \to 0$. При $k = 1$ функцию Φ называют *просто мажорантой*. Через $W_p^{(r)}(\Omega_m; q, \Phi)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ 0 < p \le \infty)$ обозначим множество функций $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные r-го порядка $f^{(r)}$ при любом $h \in (0,1)$ удовлетворяют условию

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f^{(r)},t)_2 q(t)\,dt\right)^{1/p} \le \Phi(h).$$

Отметим, что из теоремы 2 работы [4] несложным вычислением в качестве следствия можно получить равенство

$$E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m; q,\Phi)\big)_2 := \sup\big\{E_{n-1}(f)_2\colon f \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q,\Phi)\big\}$$

$$= \frac{1}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\left(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p}\Phi(h), \tag{4.5}$$

которым далее воспользуемся. Поскольку для функции $f \in L_2^{(r)}$ $(r \in \mathbb{N},\ r \ge 2)$ ее промежуточные производные $f^{(s)}$ $(1 \le s \le r-1)$ также принадлежат пространству L_2, то определенный интерес представляет изучение поведения величины $E_{n-s-1}(f^{(s)})_2$ на некотором классе $\mathfrak{M}^{(r)} \subset L_2^{(r)}$ при $n > r \ge s,\ n \in \mathbb{N},\ r,\ s \in \mathbb{Z}_+$. Точнее, требуется найти величину

$$\mathscr{A}_{n,s}\big(\mathfrak{M}^{(r)}\big) := \sup\big\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2\colon f \in \mathfrak{M}^{(r)}\big\}. \tag{4.6}$$

В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* Φ *— мажоранта, определяющая класс функций* $W_p^{(r)}(\Omega_m;q,\Phi)$, *где* $0<p\le\infty$, $m,r\in\mathbb{N}$, $r\ge 1$. *Тогда для любого* $n\in\mathbb{N}$, $n>r$ *и произвольного* s $(0\le s\le r)$ *имеет место равенство*

$$\mathscr{A}_{n,s}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m;q,\Phi)\big):=\sup\big\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2\colon f\in W_p^{(r)}(\Omega_m;q,\Phi)\big\}$$

$$=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\bigg(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp}q(t)\,dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h),\quad h\in(0,1). \tag{4.7}$$

Существует функция $g_0\in W_p^{(r)}(\Omega_m;q,\Phi)$, *которая реализует в* (4.7) *верхнюю грань.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего заметим, что из соотношения (4.2) для любой функции $f\in L_2^{(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2\le\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\,\frac{\Big(\int_0^h\Omega_m^p(f^{(r)},t)_2q(t)\,dt\Big)^{1/p}}{\Big(\int_0^h\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp}q(t)\,dt\Big)^{1/p}}. \tag{4.8}$$

Если в неравенстве (4.8) предполагать, что $f\in W_p^{(r)}(\Omega_m;q,\Phi)$, то получим

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2\le\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\bigg(\int\limits_0^h\Big[1-(1-t)^{n-r}\Big]^{mp}q(t)\,dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h). \tag{4.9}$$

Из неравенства (4.9) вытекает оценка сверху величины, стоящей в левой части (4.7),

$$\mathscr{A}_{n,s}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m;q,\Phi)\big)\le\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\bigg(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp}q(t)\,dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h). \tag{4.10}$$

Для получения оценки снизу указанной величины вводим в рассмотрение функцию

$$g_0(z)=\frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}}\bigg(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp}q(t)\,dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h)z^n \tag{4.11}$$

и покажем, что g_0 принадлежит классу $W_p^{(r)}(\Omega_m;q,\Phi)$. Дифференцируя r раз функцию g_0, будем иметь

$$g_0^{(r)}(z)=\sqrt{n-r+1}\bigg(\int\limits_0^h\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp}q(t)\,dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h)z^{n-r}.$$

Пользуясь этим равенством, в силу формулы (2.3) получаем

$$\Omega_m\big(g_0^{(r)},t\big)_2=\frac{\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^m\Phi(h)}{\Big(\int_0^h\big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp}q(t)\,dt\Big)^{1/p}}.$$

Возведя обе части последнего равенства в степень p $(0 < p \le \infty)$, умножив на вес $q(t)$ и интегрируя в пределах от $t = 0$ до $t = h$, будем иметь

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p\big(g_0^{(r)}, t\big)_2 q(t)\, dt = \Phi^p(h)$$

или, что то же, $\Big(\int_0^h \Omega_m^p\big(g_0^{(r)}, t\big)_2 q(t)\, dt\Big)^{1/p} = \Phi(h)$, и, таким образом, включение $g_0 \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q, \Phi)$ доказано.

Поскольку для всех $0 \le s \le r < n,\ n \in \mathbb{N},\ r,\ s \in \mathbb{Z}_+$, имеет место соотношение

$$g_0^{(s)}(z) = \sqrt{n-r+1}\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\bigg(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp} q(t)\, dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h) z^{n-s},$$

то в силу формулы (2.2) имеем

$$E_{n-s-1}\big(g_0^{(s)}\big)_2 = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\bigg(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp} q(t)\, dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h).$$

Пользуясь последним равенством, получаем оценку снизу

$$\sup\big\{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \colon f \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q, \Phi)\big\} \ge E_{n-s-1}\big(g_0^{(s)}\big)_2$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\bigg(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp} q(t)\, dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h). \tag{4.12}$$

Очевидно, что требуемое равенство (4.7) вытекает из сопоставления оценки сверху (4.10) и оценки снизу (4.12). Теорема 3 доказана. □

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3. *Положим*

$$q(t) := q^*(t) = (n-r)(1-t)^{n-r-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad r \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда для любого $h \in (0,1)$ *справедливо равенство*

$$\sup\big\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 \colon f \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q^*, \Phi)\big\} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\,\Big[\frac{mp+1}{[1-(1-h)^{n-r}]^{mp+1}}\Big]^{1/p}\Phi(h).$$

Во многих работах по экстремальным задачам теории приближения рассматривается задача вычисления точных верхних граней модулей коэффициентов Фурье на различных классах 2π-периодических функций (см., например, [6–9]). Аналогичные задачи рассматриваются также для коэффициентов Тейлора аналитических в единичном круге функций [10; 11]. Представляет интерес получить решение указанной задачи для рассматриваемых в этой работе функциональных классов.

Теорема 4. *Пусть* $n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}_+,\ n \ge r,\ 0 < p \le \infty$ *и* $h \in (0,1)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\sup\big\{|c_n(f)| \colon f \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q, \Phi)\big\}$$

$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\bigg(\int\limits_0^h \big[1-(1-t)^{n-r}\big]^{mp} q(t)\, dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h). \tag{4.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая ортонормированность системы функций $\varphi_k(z) = \sqrt{k+1}z^k$ $(k \in \mathbb{Z}_+)$ в единичном круге U для произвольной функции $f \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q, \Phi)$ запишем

$$|c_n(f)| = \frac{\sqrt{n+1}}{\pi}\left|\iint\limits_{(U)} f(z)\bar{z}^n\,d\sigma\right| = \frac{\sqrt{n+1}}{\pi}\left|\iint\limits_{(U)}\big[f(z) - S_{n-1}(f,z)\big]\,\bar{z}^k\,d\sigma\right|$$

$$\leq \frac{\sqrt{n+1}}{\pi}\iint\limits_{(U)}|f(z) - S_{n-1}(f,z)|\cdot|\bar{z}^n|\,d\sigma, \tag{4.14}$$

где $S_{n-1}(f,z)$ — частная сумма n-го порядка ряда Маклорена функции $f \in \mathcal{A}(U)$. Применяя неравенство Коши — Буняковского к интегралу в правой части неравенства (4.14), будем иметь

$$|c_n(f)| \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\pi}\|f - S_{n-1}(f)\|_2\|\bar{z}^n\|_2 = \|f - S_{n-1}(f)\|_2. \tag{4.15}$$

Учитывая соотношение (4.5) и равенство (4.7) (при $s = 0$) из (4.15), получаем

$$\sup\big\{|c_n(f)|\colon f \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q, \Phi)\big\} \leq E_{n-1}\big(W_p^{(r)}(\Omega_m; q, \Phi)\big)$$

$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n,r}}\bigg(\int\limits_0^h \big[1 - (1-t)^{n-r}\big]^{mp} q(t)\,dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h). \tag{4.16}$$

Для получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (4.16), рассмотрим снова функцию $g_0(z) \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q, \Phi)$, определенную равенством (4.11) и для которой

$$\sup\big\{|c_n(f)|\colon f \in W_p^{(r)}(\Omega_m; q, \Phi)\big\} \geq |c_n(g_0)|$$

$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n,r}}\bigg(\int\limits_0^h \big[1 - (1-t)^{n-r}\big]^{mp} q(t)\,dt\bigg)^{-1/p}\Phi(h). \tag{4.17}$$

Равенство (4.13) получаем из сопоставления соотношений (4.16) и (4.17). Теорема 4 доказана.

В последнее время при решении задач аппроксимации используют $\mathscr{K}$-функционал Петре [12–14]. Отметим, что наиболее важное применение $\mathscr{K}$-функционалы нашли при точном решении ряда экстремальных задач теории аппроксимации функций (см., например, [15–17]). В этом разделе, пользуясь результатами работ [4; 17], приводим решение экстремальной задачи (4.6) на одном классе функций, задаваемом $\mathscr{K}$-функционалом.

Определим $\mathscr{K}$-функционал, построенный по пространствам L_2 и $L_2^{(m)}$:

$$\mathscr{K}_m(f; t^m) := \mathscr{K}\big(f; t^m; L_2, L_2^{(m)}\big) = \inf\big\{\|f - g\|_2 + t^m\big\|g^{(m)}\big\|_2\colon g \in L_2^{(m)}\big\}, \quad f \in L_2.$$

Обозначим через $W_2^{(r)}(\mathscr{K}, \Psi)$ $(r \in \mathbb{Z}_+,\ m \in \mathbb{N})$ класс функций, состоящих из элементов $f \in L_2^{(r)}$, у которых производные $f^{(r)}$ удовлетворяют условию

$$\mathscr{K}_m(f^{(r)}; t^m) \leq \Psi(t^m), \quad 0 < t < 1,$$

где Ψ — некоторая возрастающая мажоранта, для которой $\Psi(0) = 0$. В работе [17], в частности, доказано, что при $n \geq m + r$

$$E_{n-1}\big(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\big)_2 := \sup\big\{E_{n-1}(f)_2\colon f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\big\}$$

$$= \sqrt{\frac{n-r+1}{n+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\Psi\bigg(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\bigg). \tag{4.18}$$

Здесь приводим обобщение данного результата, т. е. вычислим значение величины (4.6), когда в качестве $\mathfrak{M}^{(r)}$ выступает класс $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$. Имеет место

Теорема 5. *При любых* $n, m \in \mathbb{N},\ r, s \in \mathbb{Z}_+,\ n \geq m + r$ *и произвольном* $s \in [0, r]$ *справедливо равенство*

$$\sup\left\{E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2\colon f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\right\} = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big). \tag{4.19}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В [18] для произвольных n, $m \in \mathbb{N}$, r, $s \in \mathbb{Z}_+$ в предположении $n > r \geq s$ доказано неравенство типа Колмогорова, которое в нашем случае имеет вид

$$E_{n-s-1}\big(f^{(s)}\big)_2 \leq \frac{\alpha_{n,s}(n-r+1)^{s/(2r)}(n+1)^{(1-s/r)/2}}{\alpha_{n,r}^{s/r}(n-s+1)^{1/2}}\,\big(E_{n-1}(f)_2\big)^{1-s/r}\big(E_{n-r-1}\big(f^{(r)}\big)_2\big)^{s/r}. \tag{4.20}$$

Теперь заметим, что если $f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$, то $f^{(r)} \in W_2(\mathscr{K}_m, \Psi)$, и из равенства (4.18) вытекает, что

$$E_{n-r-1}\big(W_2(\mathscr{K}_m, \Psi)\big)_2 = \Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big). \tag{4.21}$$

Таким образом, в двух крайних случаях $s = 0$ и $s = r$ (4.19) следует из (4.18) и (4.21). Рассмотрим случай $1 \leq s \leq r-1,\ r \geq 2,\ r \in \mathbb{N}$. В этом случае, используя равенства (4.18) и (4.21), из неравенства (4.20) получаем

$$E_{n-s-1}(f^{(s)})_2 \leq \frac{\alpha_{n,s}(n-r+1)^{s/(2r)}\,(n+1)^{(1-s/r)/2}}{\alpha_{n,r}^{s/r}(n-s+1)^{1/2}}$$

$$\times\big[E_{n-1}(W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi))_2\big]^{1-s/r}\,\big[E_{n-r-1}(W_2(\mathscr{K}_m, \Psi))_2\big]^{s/r}$$

$$\leq \frac{\alpha_{n,s}(n-r+1)^{s/(2r)}\,(n+1)^{(1-s/r)/2}}{\alpha_{n,r}^{s/r}(n-s+1)^{1/2}}\cdot\Big[\Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big)\Big]^{s/r}$$

$$\times\Big[\Big(\frac{n-r+1}{n+1}\Big)^{1/2}\frac{1}{\alpha_{n,r}}\cdot\Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big)\Big]^{1-s/r}$$

$$= \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big).$$

Так как последнее неравенство справедливо для произвольной функции $f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$, то запишем

$$\sup\left\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2\colon f \in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)\right\} \leq \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big). \tag{4.22}$$

С целью получения оценки снизу величины, стоящей в левой части неравенства (4.22), вводим в рассмотрение функцию

$$g_0(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}}{\alpha_{n,r}}\cdot\Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big)\,z^n,$$

которая, как легко проверить, принадлежит классу $W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m, \Psi)$ и для которой

$$g_0^{(s)}(z) = \frac{\sqrt{n-r+1}\,\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\cdot\Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big)z^{n-s},$$

$$E_{n-s-1}\big(g_0^{(s)}\big) = \frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big). \tag{4.23}$$

Воспользовавшись равенством (4.23), получаем оценку снизу

$$\sup\left\{E_{n-s-1}(f^{(s)})_2\colon f\in W_2^{(r)}(\mathscr{K}_m,\Psi)\right\}\geq E_{n-s-1}(g_0^{(s)})_2$$

$$=\frac{\alpha_{n,s}}{\alpha_{n,r}}\sqrt{\frac{n-r+1}{n-s+1}}\cdot\Psi\Big(\sqrt{\frac{n-r-m+1}{n-r+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n-r,m}}\Big). \qquad (4.24)$$

Требуемое равенство (4.19) получаем из сопоставления оценки сверху (4.22) и оценки снизу (4.24). Теорема 5 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Смирнов В.И., Лебедев Н.А.** Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Наука, 1964, 440 с.
2. **Абилов В.А., Абилова Ф.В., Керимов М.К.** Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D,p(z))$ // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 6. С. 999–1004.
3. **Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.** Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавк. мат. журн. 2018. Т. 20, № 1. С. 86–97. doi: 10.23671/VNC.2018.1.11400 .
4. **Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.** Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников // Мат. заметки. 2018. Т. 103, вып. 4. С. 617–631.
5. **Шевчук И.А.** Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. Киев: Наукова думка, 1992. 227 с.
6. **Вакарчук С.Б.** Точные константы в неравенствах типа Джексона и точные значения поперечников функциональных классов из L_2 // Мат. заметки. 2005. Т. 78, вып. 5. С. 792–796.
7. **Вакарчук С.Б.** Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. 2006. Т. 80, вып. 1. С. 11–19.
8. **Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами и точных значениях поперечников функциональных классов в L_2 // Analysis Math. 2012. Т. 38, No. 2. С. 147–159.
9. **Shabozov M.Sh., Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I.** Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes // J. Math. Sci. 2015. Vol. 206, no. 1. P. 97–114.
10. **Вакарчук С.Б., Шабозов М.Ш.** О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сборник. 2010. Т. 201, № 8. С. 3–22.
11. **Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А.** Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_{q,\rho}$, $1\leq q\leq\infty$, $0<\rho\leq 1$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2 (336). С. 469–480.
12. **Берг Й., Лефстрем Й.** Интерполяционные пространства. Введение. Москва: Мир, 1980. 264 с.
13. **Mhaskar N.H.** Weighted polynomial approximation // J. Approx. Theory. 1986. Vol. 46, no. 1. P. 100–110.
14. **Ditzian Z., Totik V.** $\mathscr{K}$-functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$ // J. Approx. Theory. 1986. Vol. 46, no. 1. P. 38–41.
15. **Вакарчук С.Б.** Приближение функций в среднем на вещественной оси алгебраическими полиномами с весом Чебышева — Эрмита и поперечники функциональных классов // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 5. С. 666–684.
16. **Шабозов М.Ш., Тухлиев К.** $\mathscr{K}$-функционалы и точные значения n-поперечников некоторых классов из $L_2\big((\sqrt{1-x^2})^{-1},[-1,1]\big)$ // Изв. ТулГУ. Естественные науки. 2014. № 1-1. С. 83–97.
17. **Saidusaynov M.S.** $\mathscr{K}$-functionals and exact values of n-widths in the Bergman space // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, № 2(5). P. 74–81. doi: 10.15826/umj.2017.2.010 .

18. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций // Віснік Дніпропетровского університету. Сер.: Математика. 2012. Т. 20, № 6/1. С. 82–88.

Поступила 28.02.2019
После доработки 24.05.2019
Принята к публикации 27.05.2019

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Таджикский национальный университет;
Университет Центральной Азии
г. Душанбе, Республика Таджикистан
e-mail: shabozov@mail.ru

Саидусайнов Муким Саидусайнович
канд. физ.-мат. наук
Таджикский национальный университет;
Университет Центральной Азии,
г. Душанбе, Республика Таджикистан
e-mail: smuqim@gmail.com

REFERENCES

1. Smirnov V.I., Lebedev N., A. *Functions of a complex variable. Constructive theory.* London: Iliffe Books Ltd., 1968, 488 p. Original Russian text published in Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Konstruktivnaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo.* Moscow; Leningrad: Nauka Publ., 1964, 440 p.
2. Abilov V.A., Abilova F.V., Kerimov M.K. Sharp estimates for the convergence rate of Fourier series of complex variable functions in $L_2(D, p(z))$. *Comput. Math. Math. Physics*, 2010, vol. 50, no. 6, pp. 946–950. doi: 10.1134/S0965542510060023.
3. Shabozov M.Sh., Saidusaynov M.S. Mean-square approximation of complex variable functions by Fourier series in the weighted Bergman space. *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2018, vol. 20, no. 1, pp. 86–97 (in Russian). doi: 10.23671/VNC.2018.1.11400.
4. Shabozov M.Sh., Saidusaynov M.S. Upper bounds for the approximation of certain classes of functions of a complex variable by Fourier series in the space L_2 and n-widths. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 3-4, pp. 656–668. doi: 10.1134/S00014346180303343.
5. Shevchuk A.I. *Priblizhenie mnogochlenami i sledy nepreryvnykh na otrezke funktsii* [Approximation by polynomials and tracks of continuous functions on the segment]. Kiev: Naukova Dumka Publ., 1992, 255 p.
6. Vakarchuk S.B. Exact constants in Jackson-type inequalities and exact values of widths. *Math. Notes*, 2005, vol. 78, no. 5, pp. 735–739. doi 10.1007/s11006-005-0176-y.
7. Vakarchuk S.B. Jackson-type inequalities and widths of function classes in L_2. *Math. Notes*, 2006, vol. 80, no. 1, pp. 11–18. doi: 10.1007/s11006-006-0102-y.
8. Shabozov M.Sh., Vakarchuk S.B. On the best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials and the exact values of widths of function classes in L_2. *Anal. Math.*, 2012, vol. 38, no. 2, pp. 147–159 (in Russian).
9. Shabozov M.Sh., Vakarchuk S.B., Zabutnaya V.I. Structural characteristics of functions from L_2 and the exact values of widths of some functional classes. *J. Math. Sci.*, 2015, vol. 206, no. 1, pp. 97–114. doi: 10.1007/s10958-015-2296-6.
10. Vakarchuk S.B., Shabozov M.Sh. The widths of classes of analytic functions in a disc. *Sb. Math.*, 2010, vol. 201, no. 8, pp. 1091–1110. doi: 10.1070/SM2010v201n08ABEH004104.
11. Shabozov M.Sh., Yusupov G.A. Best approximation methods and widths for some classes of functions in $H_{q,\rho}$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \rho \le 1$. *Siberian Math. J.*, 2016, vol. 57, no. 2, pp. 369–376. doi: 10.1134/S0037446616020191.
12. Bergh J., Lofstrom J. *Interpolation spaces. An introduction.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1976, 220 p. doi: 10.1007/978-3-642-66451-9. Translated to Russian under the title *Interpolyatsionnye prostranstva. Vvedenie.* Moscow: Mir Publ., 1980. 264 p.

13. Mhaskar N.H. Weighted polynomial approximation. *J. Approx. Theory*, 1986, vol. 46, no. 1, pp. 100–110. doi: 10.1016/0021-9045(86)90089-4 .
14. Ditzian Z., Totik V. $\mathscr{K}$-functionals and best polynomial approximation in weighted $L^p(\mathbb{R})$. *J. Approx. Theory*, 1986, vol. 46, no. 1, pp. 38–41. doi: 10.1016/0021-9045(86)90084-5 .
15. Vakarchuk S.B. Mean approximation of functions on the real axis by algebraic polynomials with Chebyshev–Hermite weight and widths of function classes. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, no. 5, pp. 599–614. doi: 10.1134/S0001434614050046 .
16. Shabozov M.Sh., Tukhliev K. $\mathscr{K}$-functionals and exact values of n-widths of certain classes of functions in $L_2\left((\sqrt{1-x^2})^{-1},[-1,1]\right)$ space. *Izv. Tul. Gos. Univ. Estestv. Nauki*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 83–97.
17. Saidusaynov M.S. $\mathscr{K}$-functionals and exact values of n-widths in the Bergman space. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2(5), pp. 74–81. doi: 10.15826/umj.2017.2.010 .
18. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On inequalities of Kolmogorov type for analytic functions in a disk. *Dnipr. Univ. Math. Bull.*, 2012, vol. 17, no. 6/1, pp. 82–88 (in Russian).

Received February 28, 2019
Revised May 24, 2019
Accepted May 27, 2019

Mirgand Shabozovich Shabozov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan; University of Central Asia, Dushanbe, SPCE, 734013 Republic of Tajikistan, e-mail: shabozov@mail.ru .

Mukim Saidusaynovich Saidusaynov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikista; University of Central Asia, Dushanbe, SPCE, 734013 Republic of Tajikistan, e-mail: smuqim@gmail.com .

Cite this article as: M. Sh. Shabozov, M. S. Saidusainov. Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier sums in orthogonal systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 258–272 .