ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.444

К ВОПРОСУ О СОВПАДЕНИИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ С ВОСПРОИЗВОДЯЩИМИ ЯДРАМИ, СВЯЗАННЫХ СПЕЦИАЛЬНЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ[1]

В. В. Напалков, В. В. Напалков (мл.)

Рассматриваются два гильбертовых пространства H_1 и H_2 с воспроизводящими ядрами, состоящие из комплекснозначных функций, заданных на некоторых множествах точек $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$ соответственно. Нормы в пространствах H_1 и H_2 имеют интегральный вид

$$\|f\|^2_{H_1} = \int_{\Omega_1} |f(t)|^2 \, d\mu_1(t), \quad f \in H_1, \quad \|q\|^2_{H_2} = \int_{\Omega_2} |q(z)|^2 \, d\mu_2(z), \quad q \in H_2.$$

Пусть $\{E(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_2}$ — некоторая полная система функций в пространстве H_1. Обозначим

$$\widetilde{f}(z) \stackrel{\text{def}}{=} (E(\cdot, z), f)_{H_1} \ \forall z \in \Omega_2, \quad \widetilde{H}_1 = \{\widetilde{f}, \, f \in H_1\}, (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}_1} \stackrel{\text{def}}{=} (f_2, f_1)_{H_1}, \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}_1} = \|f_1\|_{H_1} \ \ \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}_1.$$

В работе изучается вопрос, когда гильбертовы пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 совпадают, т. е. состоят из одних и тех же функций, и нормы этих пространств равны. В работе получен критерий. Доказано, например, для того чтобы $\widetilde{H}_1$ совпадало с H_2, необходимо и достаточно существование линейного непрерывного взаимнооднозначного унитарного оператора $\mathcal{A}$, действующего из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2, который для любого $\xi \in \Omega_1$ переводит функцию $K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi)$ в функцию $E(\xi, \cdot)$. Здесь $\overline{H}_1$ — пространство, состоящее из функций комплексно-сопряженных к функциям из H_1, $K_{\overline{H}_1}(t, \xi)$, $t, \xi \in \Omega_1$, — воспроизводящее ядро пространства $\overline{H}_1$. Получены и другие, эквивалентные, утверждения. Также получено необходимое и достаточное условие, при выполнении которого пространства H_1 и H_2 совпадают.

Ключевые слова: системы разложения подобные ортогональным, гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, задача описания сопряженного пространства.

V. V. Napalkov, V. V. Napalkov, Jr. On the coincidence of reproducing kernel Hilbert spaces connected by a special transformation.

We consider two reproducing kernel Hilbert spaces H_1 and H_2 consisting of complex-valued functions given on some sets $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$ and $\Omega_2 \subset \mathbb{C}^m$, respectively. The norms in H_1 and H_2 have integral form:

$$\|f\|^2_{H_1} = \int_{\Omega_1} |f(z)|^2 \, d\mu(z), \quad f \in H_1; \qquad \|q\|^2_{H_2} = \int_{\Omega_2} |q(t)|^2 \, d\nu(t), \quad q \in H_2.$$

Let $\{E(\cdot, z)\}_{z\in\Omega_2}$ be some complete system of functions in the space H_1. Define

$$\widetilde{f}(z) \stackrel{\text{def}}{=} (E(\cdot, z), f)_{H_1} \ \forall z \in \Omega_2, \quad \widetilde{H}_1 = \{\widetilde{f}, \, f \in H_1\}, (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}_1} \stackrel{\text{def}}{=} (f_2, f_1)_{H_1}, \|\widetilde{f}_1\|_{\widetilde{H}_1} = \|f_1\|_{H_1} \ \ \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}_1.$$

We study the question of coincidence of the spaces $\widetilde{H}_1$ and H_2, i.e., the conditions under which these spaces consist of the same functions and have equal norms. The following criterion of coincidence is obtained: $\widetilde{H}_1 = H_2$ if and only if there exists a linear continuous one-to-one unitary operator $\mathcal{A}$ from $\overline{H}_1$ onto H_2 that for any $\xi \in \Omega_1$ takes the function $K_{\overline{H}_1}(\cdot, \xi)$ to the function $E(\xi, \cdot)$. Here $\overline{H}_1$ is the space consisting of the complex conjugates of functions from H_1 and $K_{\overline{H}_1}(t, \xi)$, $t, \xi \in \Omega_1$, is the reproducing kernel of the space $\overline{H}_1$. We also obtain some equivalent statements and a criterion for the coincidence of H_1 and H_2.

Keywords: Bargmann–Fock space, operator of multiplication by a function, expansion systems similar to orthogonal systems, reproducing kernel Hilbert space.

MSC: 46E22, 47B32, 30H05, 32A38

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-149-159

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-41-020070).

Пусть Ω_1 — некоторое подмножество точек из n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geq 1$. Например, в качестве Ω_1 можно взять область в $\mathbb{C}^n$. Пусть на Ω_1 задана некоторая счетно-аддитивная мера μ_1. Мы предполагаем, что пространство Ω_1 счетно-конечно, т. е. может быть представлено в виде счетного объединения подмножеств конечной меры. Пусть H_1 — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из комплекснозначных измеримых функций, заданных на множестве Ω_1. Термин "гильбертово пространство с воспроизводящим ядром" означает, что функционал δ_ξ, который любой функции $f \in H_1$ ставит в соответствие значение функции f в точке $\xi \in \Omega_1$, является линейным и непрерывным функционалом для произвольной точки $\xi \in \Omega_1$. Более подробно о гильбертовых пространствах с воспроизводящим ядром см. работы [1; 2]. Примерами гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром являются гильбертовы пространства аналитических функций, например, пространства Бергмана, пространство Баргмана — Фока. Пространство H_1 имеет воспроизводящее ядро, т. е. функцию $K_{H_1}(t,\xi)$, $(t,\xi) \in \Omega_1 \times \Omega_1$ такую, что для любого $\xi \in \Omega_1$, $K_{H_1}(\cdot,\xi) \in H_1$, и для любой $f \in H_1$ выполнено соотношение

$$(f, K_{H_1}(\cdot,\xi))_{H_1} = f(\xi).$$

Предположим, что норма в пространстве H_1 имеет интегральный вид

$$\|f\|_{H_1} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_{\Omega_1} |f(t)|^2 \, d\mu_1(t)}, \quad f \in H_1. \tag{1}$$

Пусть $\{E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2} \subset H_1$ — полная система функций в пространстве H_1. Каждому линейному непрерывному функционалу над H_1, порождаемому элементом $f \in H_1$, поставим в соответствие функцию

$$\widetilde{f}(z) \stackrel{\text{def}}{=} (E(\cdot,z), f)_{H_1}, \quad z \in \Omega_2. \tag{2}$$

Совокупность $\{\widetilde{f},\ f \in H_1\} \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{H}_1$ образует образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)_{\widetilde{H}_1} \stackrel{\text{def}}{=} (f_2, f_1)_{H_1} \quad \forall \widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2 \in \widetilde{H}_1 \tag{3}$$

и нормой $\|\widetilde{f}\|_{\widetilde{H}_1} = \|f\|_{H_1}$, $\widetilde{f} \in \widetilde{H}_1$.

Возникает вопрос, из каких функций состоит пространство $\widetilde{H}_1$, и также необходимо выяснить, существует ли мера μ_2 на Ω_2 такая, что для любой $\widetilde{f} \in \widetilde{H}_1$

$$\|\widetilde{f}\|^2_{\widetilde{H}_1} = \int\limits_{\Omega_2} |\widetilde{f}(z)|^2 \, d\mu_2(z).$$

При решении многих задач комплексного анализа, например, задач интерполяции, проблем уравнений свертки и других, необходимо получить ответ на данный вопрос для конкретных гильбертовых пространств аналитических функций.

Для пространства Баргмана — Фока и преобразования Лапласа подобные вопросы изучались в [3]. Отметим также здесь работы [4–6], в которых исследуются близкие задачи.

Пусть Ω_2 — некоторое подмножество точек m-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^m$, $m \geq 1$ (Ω_2 — пространство со счетно-аддитивной мерой μ_2, также предполагаем, что пространство Ω_2 счетно-конечно). Пусть H_2 — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из комплекснозначных измеримых функций, заданных на множестве Ω_2. Также предполагаем, что норма в пространстве H_2 имеет интегральный вид

$$\|q\|_{H_2} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_{\Omega_2} |q(z)|^2 \, d\mu_2(z)}, \quad q \in H_2. \tag{4}$$

Всюду далее считаем, что гильбертовы пространства H_1 и H_2 сепарабельные.

Цель данной статьи — найти необходимые и достаточные условия, при выполнении которых пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 совпадают. Как будет показано ниже, с этой задачей связана следующая задача.

Предположим, что система функций $\{E(t,z)\}_{t\in\Omega_1}$ от переменной $z\in\Omega_2$ принадлежит пространству H_2 и полна там. Каждому линейному непрерывному функционалу, порождаемому функцией $q\in H_2$, поставим в соответствие функцию

$$\check{q}(t) \overset{\text{def}}{=} (E(t,\cdot),q)_{H_2}, \quad t\in\Omega_1.$$

Совокупность функций $\{\check{q},\ q\in H_2\}$ образует гильбертово пространство $\check{H}_2$ со скалярным произведением

$$(\check{q},\check{h})_{\check{H}_2} \overset{\text{def}}{=} (h,q)_{H_2}, \quad h,q\in H_2,$$

и нормой $\|\check{q}\|_{\check{H}_2} = \|q\|_{H_2}$, $\check{q}\in\check{H}_2$.

Возникает вопрос: при каких условиях пространство $\check{H}_2$ совпадает с пространством H_1.

Через $\overline{H}_k, k=1,2$, обозначим гильбертовы пространства комплексно-сопряженных функций к функциям из пространств $H_k, k=1,2$, т. е.

$$\overline{H}_1 = \Big\{g,\ \overline{g}\in H_1,\ \|g\|_{\overline{H}_1} = \sqrt{\int_{\Omega_1}|g(t)|^2\,d\mu_1(t)}\Big\}, \tag{5}$$

$$\overline{H}_2 = \Big\{h,\ \overline{h}\in H_2,\ \|h\|_{\overline{H}_2} = \sqrt{\int_{\Omega_2}|h(z)|^2\,d\mu_2(z)}\Big\}.$$

Пространства $\overline{H}_k$, $k=1,2$, можно интерпретировать как пространства преобразований линейных непрерывных функционалов из H_k, $k=1,2$. Известно (см., например, [1]), что система функций $\{K_{H_1}(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$ полна в пространстве H_1. Любой элемент g пространства $\overline{H}_1$, очевидно, можно представить в виде

$$g(\xi) = (K_{H_1}(\cdot,\xi),\overline{g})_{H_1} \quad \forall\xi\in\Omega_1.$$

Пространство $\overline{H}_1$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(g_1,g_2)_{\overline{H}_1} = (\overline{g}_2,\overline{g}_1)_{H_1} \quad \forall g_1,g_2\in\overline{H}_1 \tag{6}$$

и нормой $\|g\|_{\overline{H}_1} = \|\overline{g}\|_{H_1}$, $g\in\overline{H}_1$. При этом норма в пространстве $\overline{H}_1$ имеет интегральный вид (5). Можно сказать, что сопряженное пространство к пространству H_1 описывается в терминах преобразования относительно системы функций $\{K_{H_1}(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega_1}$. Пространство $\overline{H}_1$, очевидно, является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Пусть $K_{\overline{H}_1}(t,\xi)$, $(t,\xi)\in\Omega_1\times\Omega_1$, — воспроизводящее ядро пространства H_1. Соотношение (6) влечет выполнение соотношения

$$K_{\overline{H}_1}(t,\xi) = \overline{K_{H_1}(t,\xi)} = K_{H_1}(\xi,t), \quad t,\xi\in\Omega_1. \tag{7}$$

Действительно, система функций $\{\overline{K_{H_1}(\cdot,\xi)}\}_{\xi\in\Omega_1}$ принадлежит пространству $\overline{H}_1$ и согласно (6) для любого элемента $g\in H_1$

$$(g,\overline{K_{H_1}(\cdot,\xi)})_{\overline{H}_1} = (K_{H_1}(\cdot,\xi),\overline{g})_{H_1} = \overline{g(\xi)} \quad \forall\xi\in\Omega_1.$$

Поэтому система функций $\{\overline{K_{H_1}(\cdot,\xi)}\}_{\xi\in\Omega_1}$ обладает воспроизводящим свойством в пространстве $\overline{H}_1$. Из свойства единственности воспроизводящего ядра (см., например, [1]) получаем

$$K_{\overline{H}_1}(t,\xi) = \overline{K_{H_1}(t,\xi)} \quad \forall t,\xi\in\Omega_1.$$

Используя известное свойство $\overline{K_{H_1}(t,\xi)} = K_{H_1}(\xi,t)\ \ \forall t,\xi\in\Omega_1$ (см. [1]), получим равенство (7). Все сказанное, очевидно, верно и для пространства H_2.

О п р е д е л е н и е 1. Оператор $\mathcal{M}\colon H_1\to H_2$ называется антилинейным оператором, если выполнено соотношение

$$\mathcal{M}(\alpha f_1+\beta f_2)=\overline{\alpha}\mathcal{M}(f_1)+\overline{\beta}\mathcal{M}(f_2)\ \ \forall f_1,f_2\in H_1,\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}.$$

О п р е д е л е н и е 2. Оператор $\mathcal{M}\colon H_1\to H_2$ называется антиунитарным оператором, если выполнено соотношение

$$(\mathcal{M}f_1,\mathcal{M}f_2)_{H_2}=(f_2,f_1)_{H_1}\ \ \forall f_1,f_2\in H_1.$$

Оператор инверсии Inv: $f\mapsto\overline{f}$, $f\in H_1$, действует из пространства H_1 на пространство $\overline{H}_1$ и является антилинейным, антиунитарным оператором (см. [7, с. 41]). В дальнейшем тем же символом Inv мы будем обозначать инверсию $q\to\overline{q}$, $q\in H_2$, действующую из пространства H_2 на пространство $\overline{H}_2$.

Определим оператор $\mathcal{B}$ следующим равенством

$$\mathcal{B}(f)\stackrel{\text{def}}{=}\widetilde{f}\ \ \forall f\in H_1.$$

Лемма. *Оператор $\mathcal{B}$ является антилинейным антиунитарным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства H_1 на пространство $\widetilde{H}_1$. При этом*

$$\mathcal{B}f(z)=\int\limits_{\Omega_1}\overline{(f,K_{H_1}(\cdot,t))}_{H_1}E(t,z)\,d\mu_1(t)\ \ \forall f\in H_1,\ \ \forall z\in\Omega_2. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, поскольку система $\{E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$ полна в пространстве H_1, оператор $\mathcal{B}$ является взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства H_1 на пространство $\widetilde{H}_1$. В силу (2) оператор $\mathcal{B}$ является антилинейным оператором, который действует из H_1 на $\widetilde{H}_1$. Соотношение (3) означает, что $\mathcal{B}$ — антиунитарный оператор. Так как норма в пространстве H_1 имеет вид (1), то

$$(f_1,f_2)_{H_1}=\int\limits_{\Omega_1}f_1(t)\overline{f_2(t)}\,d\mu_1(t)\ \ \forall f_1,f_2\in H_1.$$

Поэтому для любой $f\in H_1$

$$\mathcal{B}f(z)=\widetilde{f}(z)=(E(\cdot,z),f)_{H_1}=\int\limits_{\Omega_1}\overline{f(t)}E(t,z)\,d\mu_1(t)=\int\limits_{\Omega_1}\overline{(f,K_{H_1}(\cdot,t))}_{H_1}E(t,z)\,d\mu_1(t)\ \ \forall z\in\Omega_2.$$

Лемма доказана.

Для доказательства результатов статьи мы также используем теорию систем разложения, подобных ортогональным (см. статью Т. П. Лукашенко [8]).

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны.*

1. *Пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 совпадают.*

2. *Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор $\mathcal{A}$, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2 и такой, что*

$$\mathcal{A}\colon K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi)\mapsto E(\xi,\cdot)\ \ \forall\xi\in\Omega_1. \tag{9}$$

3. *Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор* $\mathcal{A}_1$, *действующий из пространства* $\overline{H}_1$ *на пространство* H_2 *и такой, что*

$$\mathcal{A}_1\colon \overline{E(\cdot,z)} \mapsto K_{H_2}(\cdot,z) \quad \forall z\in\Omega_2. \tag{10}$$

4. *Существует антилинейный антиунитарный взаимно-однозначный оператор* B, *действующий из пространства* H_1 *на пространство* H_2 *и обладающий свойствами*

$$\mathcal{B}\colon K_{H_1}(\cdot,\xi) \mapsto E(\xi,\cdot) \quad \forall \xi\in\Omega_1; \qquad \mathcal{B}\colon E(\cdot,z) \mapsto K_{H_2}(\cdot,z) \quad \forall z\in\Omega_2. \tag{11}$$

5. *Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор* $\mathcal{C}$, *действующий из пространства* $\overline{H}_2$ *на пространство* H_1 *и такой, что*

$$\mathcal{C}\colon K_{\overline{H}_2}(\cdot,z) \mapsto E(\cdot,z) \quad \forall z\in\Omega_2.$$

6. *Существует линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор* $\mathcal{C}_1$, *действующий из пространства* $\overline{H}_2$ *на пространство* H_1 *и такой, что*

$$\mathcal{C}_1\colon \overline{E(\xi,\cdot)} \mapsto K_{H_1}(\cdot,\xi) \quad \forall \xi\in\Omega_1.$$

7. *Пространства* $\check{H}_2$ *и* H_1 *совпадают.*

При выполнении хотя бы одного из перечисленных условий 1–7 *можно утверждать, что операторы* $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ *с описанными свойствами существуют и имеют следующий вид*:

$$\mathcal{A}_1=\mathcal{A}, \quad \mathcal{A}h(z)=\int\limits_{\Omega_1}(h,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\tau))_{\overline{H}_1}E(\tau,z)\,d\mu_1(\tau) \quad \forall z\in\Omega_2; \tag{12}$$

$$\mathcal{B}=\mathcal{A}\circ Inv; \tag{13}$$

$$\mathcal{C}_1=\mathcal{C}, \quad \mathcal{C}q(\xi)=\int\limits_{\Omega_2}(q,K_{\overline{H}_2}(\cdot,\eta))_{\overline{H}_2}E(\xi,\eta)\,d\mu_2(\eta) \quad \forall \xi\in\Omega_1; \tag{14}$$

$$\mathcal{B}^{-1}=\mathcal{C}\circ Inv. \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что из условия 1 следует условие 2. Пусть пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 совпадают. На элементах пространства $\overline{H}_1$ определим оператор $\mathcal{A}$. Если $g\in\overline{H}_1$, то

$$\mathcal{A}g(z)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_{\Omega_1}(g,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\tau))_{\overline{H}_1}E(\tau,z)\,d\mu_1(\tau) \quad \forall z\in\Omega_2. \tag{16}$$

Заметим, что если $g\in\overline{H}_1$, то $\overline{g}\in H_1$, и (см. лемму)

$$\mathcal{B}\overline{g}(z)=\widetilde{\overline{g}(z)}=(E(\cdot,z),\overline{g})_{H_1}=\int\limits_{\Omega_1}g(\tau)E(\tau,z)\,d\mu_1(\tau)$$

$$=\int\limits_{\Omega_1}(g,K_{\overline{H}_1}(\cdot,\tau))_{\overline{H}_1}E(\tau,z)\,d\mu_1(\tau)=\mathcal{A}g(z) \quad \forall z\in\Omega_2. \tag{17}$$

Очевидно, что $\mathcal{A}$ — линейный оператор. Оператор $\mathcal{B}\colon h\to\widetilde{h}$, $h\in H_1$, действует взаимно-однозначно из пространства H_1 на пространство $\widetilde{H}_1$ (см. лемму). Поэтому $\mathcal{A}$ также взаимно-однозначный оператор. Покажем, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывен, как оператор, действующий из $\overline{H}_1$ на пространство H_2. В силу равенства (17), леммы и того, что пространства H_2 и $\widetilde{H}_1$ совпадают,

$$\|\mathcal{A}g\|_{H_2}=\|\mathcal{A}g\|_{\widetilde{H}_1}=\|\mathcal{B}\overline{g}\|_{\widetilde{H}_1}=\|\overline{g}\|_{H_1}=\|g\|_{\overline{H}_1} \quad \forall g\in\overline{H}_1.$$

Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ — линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2. Проверим теперь, что выполнено соотношение (9). Действительно, согласно (16), при произвольном $\xi \in \Omega_1$

$$(\mathcal{A}K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi))(\eta) = \int\limits_{\Omega_1} (K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi), K_{\overline{H}_1}(\cdot,\tau))_{\overline{H}_1} E(\tau,\eta)\,d\mu_1(\tau)$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} K_{\overline{H}_1}(\tau,\xi)E(\tau,\eta)\,d\mu_1(\tau) = \int\limits_{\Omega_1} \overline{K_{H_1}(\tau,\xi)}E(\tau,\eta)\,d\mu_1(\tau) = E(\xi,\eta) \quad \forall \eta \in \Omega_2.$$

Таким образом, доказано, что из условия 1 вытекает условие 2.

Докажем, что из условия 2 следует условие 3. В качестве оператора $\mathcal{A}_1$ возьмем линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор $\mathcal{A}$. Достаточно показать, что выполнено соотношение (10). Оператор $\mathcal{A}$ действует из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2. Покажем, что функция $\mathcal{A}\overline{E(\cdot,z)} \in H_2$ обладает вопроизводящим свойством, т. е. для любой $q \in H_2$

$$(q, \mathcal{A}\overline{E(\cdot,z)})_{H_2} = q(z) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Действительно, так как $\mathcal{A}$ — унитарный оператор, то $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$ и

$$(q, \mathcal{A}\overline{E(\cdot,z)})_{H_2} = (\mathcal{A}^*q, \overline{E(\cdot,z)})_{\overline{H}_1} = \int\limits_{\Omega_1} \mathcal{A}^*q(\tau)E(\tau,z)\,d\mu_1(\tau)$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} (\mathcal{A}^*q, K_{\overline{H}_1}(\cdot,\tau))_{\overline{H}_1} E(\tau,z)\,d\mu_1(\tau) = \mathcal{A}\circ\mathcal{A}^*q(z) = q(z) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

В силу единственности воспроизводящего ядра (см, например, [1]) отсюда следует, что

$$\mathcal{A}\overline{E(\cdot,z)} = K_{H_2}(\cdot,z) \quad \forall z \in \Omega_2,$$

т. е. для оператора $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ выполнено соотношение (10), и тем самым это означает, что выполнено условие 3.

Далее докажем, что из условия 3 вытекает условие 1. Действительно, пусть существует линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор $\mathcal{A}_1$, действующий из пространства $\overline{H}_1$ на пространство H_2, и такой, что выполнено соотношение (10). Докажем, что

$$\mathcal{A}_1\colon K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi) \mapsto E(\xi,\cdot) \quad \forall \xi \in \Omega_1. \tag{18}$$

Поскольку норма в пространстве H_2 имеет вид (4), то система функций $\{K_{H_2}(\cdot,\eta)\}_{\eta\in\Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2 в пространстве H_2 (см. теорему 2 из работы [9]). Поэтому любая функция $q \in H_2$ представляется в виде

$$q(z) = \int\limits_{\Omega_2} (q, K_{H_2}(\cdot,\eta))_{H_2} K_{H_2}(z,\eta)\,d\mu_2(\eta) \quad \forall z \in \Omega_2. \tag{19}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{F}$, являющийся обратным оператором к оператору $\mathcal{A}_1$, т. е. $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}_1^{-1}$. В силу (10) справедливо соотношение

$$\mathcal{F}\colon K_{H_2}(\cdot,\eta) \mapsto \overline{E(\cdot,\eta)} \quad \forall \eta \in \Omega_2. \tag{20}$$

Подействуем на обе равенства (19) оператором $\mathcal{F}$. Применим теорему из [10, с. 128]. Воспользовавшись соотношением (20), получим следующее представление функции: $\mathcal{F}q \in \overline{H}_1$,

$$\mathcal{F}q(\xi) = \int\limits_{\Omega_2} (q, K_{H_2}(\cdot,\eta))_{H_2} \overline{E(\xi,\eta)}\,d\mu_2(\eta) \quad \forall \xi \in \Omega_1.$$

Оператор $\mathcal{F}$ действует из пространства H_2 на пространство $\overline{H}_1$. Покажем, что семейство функций $\{\mathcal{F}E(\xi,\cdot)\}_{\xi\in\Omega_1}\in\overline{H}_1$ обладает вопроизводящим свойством, т. е. для любой $g\in\overline{H}_1$

$$(g,\mathcal{F}E(\xi,\cdot))_{\overline{H}_1}=g(\xi)\quad\forall\xi\in\Omega_1.$$

Поскольку $\mathcal{F}$ — унитарный оператор, $\mathcal{F}^*=\mathcal{F}^{-1}$ и для любой $g\in\overline{H}_1$, имеем

$$(g,\mathcal{F}E(\xi,\cdot))_{\overline{H}_1}=(\mathcal{F}^*g,E(\xi,\cdot))_{H_2}=\int\limits_{\Omega_2}\mathcal{F}^*g(\eta)\overline{E(\xi,\eta)}\,d\mu_2(\eta)$$

$$=\int\limits_{\Omega_2}(\mathcal{F}^*g,K_{H_2}(\cdot,\eta))_{H_2}\overline{E(\xi,\cdot)}\,d\mu_2(\eta)=\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^*g(\xi)=g(\xi)\quad\forall\xi\in\Omega_1.$$

В силу единственности воспроизводящего ядра отсюда следует, что

$$\mathcal{F}E(\xi,\cdot)=K_{\overline{H}_1}(\cdot,\xi)\quad\forall\xi\in\Omega_1,\tag{21}$$

Поскольку $\mathcal{A}_1$ — обратный оператор к оператору $\mathcal{F}$, то из (21) следует (18). Далее, любая функция $q\in H_2$ может быть записана в виде

$$q(z)=(q,K_{H_2}(\cdot,z))_{H_2}=(q,\mathcal{A}_1\overline{E(\cdot,z)})_{H_2}=(\mathcal{A}_1^*q,\overline{E(\cdot,z)})_{\overline{H}_1}=\int\limits_{\Omega_1}\mathcal{A}_1^*q(t)E(t,z)\,d\mu_1(t)$$

$$=\int\limits_{\Omega_1}(\mathcal{A}_1^*q,K_{\overline{H}_1}(\cdot,t))_{\overline{H}_1}E(t,z)\,d\mu_1(t)=\int\limits_{\Omega_1}(\mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_1^*q,\mathcal{A}_1K_{\overline{H}_1}(\cdot,t))_{H_2}E(t,z)\,d\mu_1(t)$$

$$=\int\limits_{\Omega_1}(\mathcal{A}_1\circ\mathcal{A}_1^*q,E(t,\cdot))_{H_2}E(t,z)\,d\mu_1(t)=\int\limits_{\Omega_1}(q,E(t,\cdot))_{H_2}E(t,z)\,d\mu_1(t)\quad\forall z\in\Omega_2.$$

Мы воспользовались здесь соотношениями (10), (18), а также тем, что, поскольку $\mathcal{A}_1$ — унитарный оператор, то $\mathcal{A}_1^*\circ\mathcal{A}_1=I$ — единичный оператор. Последнее равенство означает, что система функций $\{E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1 на Ω_1 в пространстве H_2. Согласно теореме 1 из работы [9] отсюда следует, что пространство H_2 совпадает с пространством $\widetilde{H}_1$.

Покажем теперь, что условие 1 эквивалентно условию 4. Действительно, пусть выполнено условие 1, т. е. пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 совпадают. Тогда, согласно лемме оператор $\mathcal{B}$ является антилинейным антиунитарным взаимно-однозначным оператором, действующим из пространства H_1 на пространство H_2. При этом справедливо выражение (8). Проверим, что выполнены соотношения (11).

$$\mathcal{B}K_{H_1}(\cdot,\xi)(\eta)=\int\limits_{\Omega_1}\overline{(K_{H_1}(\cdot,\xi),K_{H_1}(\cdot,\tau))}_{H_1}E(\tau,\eta)\,d\mu_1(\tau)$$

$$=\int\limits_{\Omega_1}\overline{K_{H_1}(\tau,\xi)}E(\tau,\eta)\,d\mu_1(\tau)=(E(\cdot,\eta),K_{H_1}(\cdot,\xi))_{H_1}=E(\xi,\eta)\quad\forall\xi\in\Omega_1,\quad\eta\in\Omega_2.\tag{22}$$

Далее, известно (см. теорему 1 из [9]), что

$$K_{\widetilde{H}_1}(z,\eta)=\int\limits_{\Omega_1}E(\tau,z)\overline{E(\tau,\eta)}\,d\mu_1(\tau)\quad\forall z,\eta\in\Omega_2.$$

Тогда, поскольку пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 совпадают, воспроизводящие ядра этих пространств также совпадают. Значит,

$$\mathcal{B}E(\cdot,z)(\eta) = \int\limits_{\Omega_1} \overline{(E(\cdot,z),K_{H_1}(\cdot,\tau))}_{H_1} E(\tau,\eta)\,d\mu_1(\tau)$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} E(\tau,\eta)\overline{E(\tau,z)}\,d\mu_1(\tau) = K_{\widetilde{H}_1}(\eta,z) = K_{H_2}(\eta,z) \quad \forall \eta, z \in \Omega_2. \tag{23}$$

Выражения (22), (23) означают справедливость соотношений (11), и тем самым условие 1 влечет условие 4.

Докажем теперь, что из условия 4 следует условие 1. Действительно, согласно теореме 1 работы [9] в пространстве $\widetilde{H}_1$ система функций $\{E(\tau,\cdot)\}_{\tau\in\Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1, при этом

$$K_{\widetilde{H}_1}(\eta,z) = \int\limits_{\Omega_1} E(\tau,\eta)\overline{E(\tau,z)}\,d\mu_1(\tau) \quad \forall \eta, z \in \Omega_2.$$

Используя свойство антиунитарности оператора $\mathcal{B}$ и соотношения (11), получаем

$$K_{\widetilde{H}_1}(\eta,z) = \int\limits_{\Omega_1} E(\tau,\eta)\overline{E(\tau,z)}\,d\mu_1(\tau) = (E(\cdot,\eta),E(\cdot,z))_{H_1} = \overline{(\mathcal{B}E(\cdot,\eta),\mathcal{B}E(\cdot,z))}_{H_2}$$

$$= \overline{(K_{H_2}(\cdot,\eta),K_{H_2}(\cdot,z))}_{H_2} = \overline{K_{H_2}(z,\eta)} = K_{H_2}(\eta,z) \quad \forall \eta, z \in \Omega_2.$$

Значит, воспроизводящие ядра пространств $\widetilde{H}_1$ и H_2 совпадают. Поэтому пространства $\widetilde{H}_1$ и H_2 совпадают, т. е. выполнено условие 1.

Доказательство того, что условия 5–7 эквивалентны, аналогично доказательству того, что условия 1–3 эквивалентны.

Доказательство того, что условия 4 и 7 эквивалентны, аналогично доказательству того, что условия 1 и 4 эквивалентны.

Операторы $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_1$ имеют вид (12)–(15); это следует из того, что в доказательстве каждого пункта теоремы указывается явный вид операторов. Например, из соотношений (10), (18), (11), (7) вытекает (13).

Теорема 1 доказана.

Как следствие теоремы 1 докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть H_1 — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, состоящее из измеримых функций, заданных на некотором множестве $\Omega_1 \subset \mathbb{C}^n$. Норма в пространстве H_1 имеет интегральный вид*

$$\|f\|_{H_1} = \sqrt{\int_{\Omega_1} |f(t)|^2\,d\mu_1(t)}.$$

Допустим, что система функций $\{E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$ полна в пространстве H_1. Предположим, что при любом фиксированном $t \in \Omega_1$ функция $E(t,\omega)$, $\omega \in \Omega_2$, измерима как функция от переменной $\omega \in \Omega_2$.

Тогда следующие условия эквивалентны.

1. *Система функций $\{E(\cdot,\eta)\}_{\eta\in\Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с некоторой мерой μ_2, заданной на Ω_2 в пространстве H_1, т. е. любая функция f из пространства H_1 может быть представлена в виде*

$$f(\xi) = \int\limits_{\Omega_2} (f,E(\cdot,\eta))_{H_1} E(\xi,\eta)\,d\mu_2(\eta) \quad \forall \xi \in \Omega_1.$$

2. *Система функций* $\{E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$ *обладает свойством*

$$\int\limits_{\Omega_2} |E(t,\eta)|^2\, d\mu_2(\eta) < \infty \quad \forall t \in \Omega_1.$$

Замыкание по норме

$$\|q\|_{H_2} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_{\Omega_2} |q(\eta)|^2\, d\mu_2(\eta)} \tag{24}$$

линейной оболочки системы функций $\{E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$ *образует гильбертово пространство с воспоизводящим ядром* H_2*, состоящее из функций, заданных на множестве* Ω_2*. В пространстве* H_2 *система функций* $\{E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$ *является ортоподобной системой разложения с мерой* μ_1 *на* Ω_1*, т. е. любая функция* q *из пространства* H_2 *представляется в виде*

$$q(z) = \int\limits_{\Omega_1} (q, E(t,\cdot))_{H_2} E(t,z)\, d\mu_1(t) \quad \forall z \in \Omega_2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что из условия 1 вытекает условие 2. Воспользуемся теоремой 1 из работы [9]. Если в гильбертовом пространстве H_1 система функций $\{E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2, то по теореме 1 работы [9] пространство H_2, определяемое как замыкание по норме (24) линейной оболочки системы функций $\{E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$, является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром. Кроме того, согласно этой же теореме пространство H_2 совпадает с пространством $\widetilde{H}_1$. Мы можем определить пространство $\check{H}_2$. Каждому линейному непрерывному функционалу над H_2, порождаемому функцией $q \in H_2$, поставим в соответствие функцию $\check{q}(t) = (E(t,\cdot), q)_{H_2}$, $t \in \Omega_1$. Совокупность $\{\check{q},\, q \in H_2\}$ образует пространство $\check{H}_2$ со скалярным произведением

$$(\check{q}_1, \check{q}_2)_{\check{H}_2} \stackrel{\text{def}}{=} (q_2, q_1)_{H_2} \quad \forall \check{q}_1, \check{q}_2 \in \check{H}_2$$

и нормой $\|\check{q}\|_{\check{H}_2} = \|q\|_{H_2}$, $\check{q} \in \check{H}_2$.

Так как пространство H_2 совпадает с пространством $\widetilde{H}_1$, то по теореме 1 пространство $\check{H}_2$ совпадает с пространством H_1. Отсюда, применяя теорему 1 из работы [9], мы получаем, что в пространстве H_2 система функций $\{E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega_1}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1.

Доказательство того, что из условия 2 следует условие 1 проводится аналогично. Необходимо только заметить, что так как система $\{E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$ полна в пространстве H_1, то пространство H_1 можно определить как пополнение линейной оболочки системы функций $\{E(\cdot,z)\}_{z\in\Omega_2}$ относительно нормы

$$\|q\|_{H_1} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\int_{\Omega_1} |q(t)|^2\, d\mu_1(t)}.$$

Теорема 2 доказана.

Предположим далее, что выполнены условия теоремы 1. Мы найдем условия, при выполнении которых пространства H_1 и H_2 совпадают.

Теорема 3. *Предположим, что* $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$*. Пространства* H_1 *и* H_2 *совпадают тогда и только тогда, когда найдется линейный непрерывный взаимно-однозначный унитарный оператор* $\mathcal{E}$*, действующий из пространства* H_1 *на пространство* H_2 *и такой, что*

$$\mathcal{E}\colon E(\cdot,\xi) \mapsto E(\xi,\cdot) \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из теоремы 1 следует, что $\widetilde{H}_1 = H_2$, $\check{H}_2 = H_1$. Поэтому пространства H_1 и H_2 совпадают тогда и только тогда, когда совпадают пространства $\widetilde{H}_1$ и $\check{H}_2$. В пространстве H_1 система функций $\{E(\cdot,\xi)\}_{\xi\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_2. В пространстве H_2 система функций $\{E(t,\cdot)\}_{t\in\Omega}$ является ортоподобной системой разложения с мерой μ_1. Применим теорему 1 из работы [11]. Согласно этой теореме пространства $\widetilde{H}_1$ и $\check{H}_2$ совпадают тогда и только тогда, когда найдется линейный непрерывный взаимнооднозначный унитарный оператор $\mathcal{E}$, действующий из пространства H_1 на пространство H_2 и такой, что

$$\mathcal{E}\colon E(\cdot,\xi)\mapsto E(\xi,\cdot)\quad \forall\xi\in\Omega.$$

Теорема 3 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Aronszajn N.** Theory of reproducing kernels // Transactions of the AMS. 1950. Vol. 68, no. 3. P. 337–404. doi: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7.
2. **Berlinet A., Thomas–Agnan C.** Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics. N Y: Kluwer Acad. Publ., 2001. 355 p.
3. **Bargmann V.** On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform // Comm. Pure Appl. Math. 1961. Vol. 1, no. 14. C. 187–214. doi: 10.1002/cpa.3160140303.
4. **Напалков В.В. (мл.), Юлмухаметов Р.С.** . Весовые преобразования Фурье — Лапласа аналитических функционалов в круге // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 11. С. 139–144.
5. **Напалков В.В. (мл.), Юлмухаметов Р.С.** О преобразовании Гильберта в пространстве Бергмана // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 1. С. 68–78.
6. **Исаев К.П., Юлмухаметов Р.С.** Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68, №1. С. 5–42.
7. **Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.** Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1977. 616 с.
8. **Лукашенко Т.П.** О свойствах систем разложения подобных ортогональным // Изв. РАН. Сер. математическая. 1998. Т. 62, № 5. С. 187–206.
9. **Напалков В.В. (мл.)** Ортоподобные системы разложения в пространствах с воспроизводящим ядром// Уфим. мат. журн. 2013. Т. 5, № 4. С. 91–104.
10. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. Москва: ИЛ, 1962. 896 с.
11. **Напалков В.В., Напалков В.В. (мл.)**. Об изоморфизме гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром // Докл. АН. 2017. Т. 474, № 6. С. 665–667.

Поступила 31.01.2019
После доработки 27.03.2019
Принята к публикации 29.04.2019

Напалков Валентин Васильевич
д-р физ.-мат. наук, профессор
чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
г. Уфа
e-mail: vnap@matem.anrb.ru

Напалков Валерий Валентинович
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН,
г. Уфа
e-mail: vnap@mail.ru

REFERENCES

1. Aronszajn N. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the AMS*, vol. 68, no. 3, pp. 337–404. doi: 10.1090/S0002-9947-1950-0051437-7 .
2. Berlinet A., Thomas–Agnan C. *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics.* N Y: Kluwer Acad. Publ., 2004, 355 p. ISBN: 1-4020-7679-7 .
3. Bargmann V. On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform. *Comm. Pure Appl. Math.*, 1961, vol. 1, no. 14, pp. 187–214. doi: 10.1002/cpa.3160140303 .
4. Napalkov (Jr.) V.V., Yulmukhametov R. S. Weighted Fourier–Laplace transforms of analytic functionals on the disk. *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 194, vol. 77, no. 2, pp. 385–390. doi: 10.1070/SM1994v077n02ABEH003447 .
5. Napalkov (Jr.) V.V., Yulmukhametov R.S. On the Hilbert Transform in Bergman Space. *Math. Notes*, 2001, vol. 70, no. 1, pp. 61–70. doi: 10.1023/A:1010221901553 .
6. Isaev K.P., Yulmukhametov R.S. Laplace transforms of functionals on Bergman spaces. *Izv. Math.*, 2004, vol. 68, no. 1, pp. 3–41. doi: 10.1070/IM2004v068n01ABEH000465 .
7. Bogoliubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., Todorov I.T. *General principles of quantum field theory.* Dordrecht; Boston: Kluwer Acad. Publ., 1990, 695 p. ISBN: 978-0-7923-0540-8 . Original Russian text published in Bogolyubov N.N., Logunov A.A., Oksak A.I., Todorov I.T. *Obshchie printsipy kvantovoi teorii polya*, Moscow: Nauka Publ., 1977, 616 p.
8. Lukashenko T.P. Properties of expansion systems similar to orthogonal ones. *Izvestiya: Mathematics*, 1998, vol. 62, no. 5, pp. 1035–1054. doi: 10.1070/IM1998v062n05ABEH000215 .
9. Napalkov V.V. (Jr.) Orthosimilar expansion systems in space with reproducing kernel. *Ufa Math. J.*, vol. 5, no. 4, pp. 88–100. doi: 10.13108/2013-5-4-88 .
10. Dunford N.J, Schwartz J.T. Linear operators. I. General theory. Ser. Pure Appl. Math. 1958, Vol. 7, N Y; London: Interscience Publ., 858 p. Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya*, Mockow, Inostrannaya Literatura Publ., 1962, 896 p.
11. Napalkov V.V., Napalkov V.V. (Jr.) On isomorphism of reproducing kernel Hilbert spaces. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 95, no. 3, pp. 270–272. doi: 10.1134/S1064562417030243 .

Received January 31, 2019
Revised March 27, 2019
Accepted April 29, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-41-020070).

Valentin Vasilievich Napalkov Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450077 Russia, e-mail: napalkov@matem.anrb.ru .

Valerii Valentinovich Napalkov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Institute of Mathematics, Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, 450077 Russia, e-mail: vnap@mail.ru .

Cite this article as: V. V. Napalkov, V. V. Napalkov (Jr.). On the coincidence of reproducing kernel Hilbert spaces connected by a special transformation, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 149–159 .