ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 514.174.3

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОКРЫТИЙ ВЫПУКЛЫХ ПЛОСКИХ ФИГУР КРУГАМИ РАЗЛИЧНОГО РАДИУСА[1]

П. Д. Лебедев, А. Л. Казаков

Рассматривается задача о построении оптимального покрытия плоской фигуры M объединением заданного числа кругов. Считается, что радиус каждого круга в общем случае различается и равен произведению индивидуального для него положительного коэффициента на общий для всех элементов покрытия параметр r. Критерием оптимальности выбрана минимизация величины r при условии, что множество M вложено в объединение кругов. Для набора точек S выписано значение величины r, определяющей минимальный радиус кругов с центрами в точках из S, реализующих покрытие M. Найдены выражения, позволяющие аналитически описать зоны влияния, так называемые обобщенные зоны Дирихле, точек из S, которые существенно отличаются от выражений для случая конгруэнтных кругов. Предложена процедура итерационной коррекции координат S на базе отыскания чебышевских центров областей влияния точек. Показано, что она не ухудшает свойства покрытия, при этом ее параметры можно менять в процессе запуска программного комплекса. Проведены численные эксперименты по построению оптимальных покрытий наборами кругов (при различных коэффициентах, задающих радиус каждого из них). В качестве фигур M взяты различные выпуклые многоугольники, выполнена визуализация результатов.

Ключевые слова: оптимальное покрытие, обобщенная зона Дирихле, чебышевский центр, итерационный алгоритм, минимизация.

P. D. Lebedev, A. L. Kazakov. Construction of optimal covers by disks of different radii for convex planar sets.

We consider the problem of constructing an optimal cover of a planar set M by the union of a given number of disks. In the general case, the radii of the disks are assumed to be different; each radius is the product of some positive factor specific for each disk and a parameter r, which is common for all elements of the cover. The optimality criterion is the minimum of r under the condition that M is a subset of the union of the disks. For a set of points S, we write the value of r that defines the minimum radius of the disks centered at the points of S and implementing a cover of M. Expressions are found that analytically describe the impact zones (the so-called generalized Dirichlet zones) of the points of S, which differ significantly from the expressions for the case of congruent circles. A procedure for the iterative correction of coordinates of S based on finding Chebyshev centers of impact zones of points is proposed. It is shown that the procedure does not degrade the properties of the cover, while its parameters can be changed in the process of starting the software complex. Numerical experiments on the construction of optimal covers by families of disks were carried out with different coefficients defining the radii of the disks. Various convex polygons were taken as the set M, and the results were visualized.

Keywords: optimal cover, generalized Dirichlet zone, Chebyshev center, iterative algorithm, minimization.

MSC: 52C15, 49K10

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-137-148

Введение

Статья посвящена исследованию задачи об оптимальном покрытии ограниченного множества M на плоскости набором неконгруэнтных кругов, радиусы которых пропорциональны некоторому заданному параметру r. При этом критерием оптимальности является минимизация r при условии, что M вложено в объединение кругов.

[1]Теоремы 1 и 2 доказаны П.Д. Лебедевым при поддержке грантов РФФИ, проекты 18-01-00221 и 18-31-00018 мол_а, и при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006. Вычислительный эксперимент выполнен А.Л. Казаковым при поддержке гранта РФФИ, проект 18-07-00604.

Задача построения покрытий плоских множеств кругами представляет большой интерес как с точки зрения “чистой” математики, так и приложений. В частности, она применяется в сфере экономики и инфраструктурной логистики для моделирования конкретных объектов [1], а также в рамках более общего инструментария для исследования логистических систем [2], поскольку позволяет учитывать специфику различных объектов и местности, в которой они расположены.

Отыскание оптимального покрытия относится к числу ключевых проблем вычислительной геометрии [3]. Обычно данная задача рассматривается в классической постановке, когда необходимо покрыть рассматриваемую область равными кругами [4], в том числе и в неевклидовых метриках [5]. Однако в связи с логистическими приложениями (необходимость размещения объектов различного класса, выполняющих аналогичные функции) возможны и другие, более сложные, постановки [6]. Одна из содержательных задач такого рода связана с построением покрытий заданного множества кругами различного радиуса. Их адекватным представлением могут служить задачи о построении оптимального покрытия кругами разного радиуса при фиксированном их количестве. Данная задача была представлена впервые знаменитым венгерским математиком Файешем Тотом [7], классическую монографию которого мы уже цитировали. Однако активное исследование указанной проблемы началось только около 25 лет назад, когда была доказана гипотеза о нижней границе плотности покрытия из [8]. Далее в работе [9] было получено достаточное условие того, чтобы покрытие было “твердым”. Последние из известных нам аналитических результатов для задачи покрытия неконгруэнтными кругами относятся к 2017 г. — в работе [10] получены конструктивные оценки верхней и нижней границ плотности покрытия.

Аналитические методы в задачах вычислительной геометрии обычно имеют ограниченный диапазон применимости, в связи с чем основным инструментом исследования становится численный эксперимент. Из значительного количества такого рода публикаций по теме настоящей статьи выделим недавнюю работу [11], в которой предложен алгоритм ветвей-границ, позволяющий проверить, покрывается ли многоугольник заданным набором кругов.

Настоящее исследование является продолжением большого цикла работ авторов, посвященных оптимальным покрытиям и упаковкам. Ранее (сошлемся только на работы последних двух лет) мы рассматривали задачи о нахождении оптимальных упаковок при различных размерах их элементов [12; 13] (см. также статью авторов “Итерационные методы построения упаковок из кругов различного радиуса на плоскости” (Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2018, Т. 24, № 2, С. 141–151)) и покрытий [13; 14], включая кратные и в неевклидовых метриках.

В данной статье рассматривается новая для авторов задача о покрытии плоского множества разными кругами, для решения которой предложена оригинальная модификация авторского вычислительного алгоритма, доказаны две теоремы. Выполнен численный эксперимент, который показал работоспособность предложенного подхода.

1. Постановка задачи

Пусть задано компактное множество $M \subset \mathbb{R}^2$ и набор из $n \in \mathbb{N}$ положительных чисел α_i, $i = \overline{1,n}$. Рассматривается задача об оптимальном покрытии множества M объединением n кругов $O(\mathbf{s}_i, \alpha_i r),\ i = \overline{1,n}$, центры которых образуют массив $S = \{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^n$, а радиусы пропорциональны числам $\alpha_i,\ i = \overline{1,n}$. Критерием оптимальности считаем минимизацию параметра r. В этой постановке задача может иметь различные интерпретации в геометрии, теории аппроксимаций и теории управления.

Определение 1. Покрытием Ξ_n компактного множества $M \subset X$ из n кругов радиуса r_i каждый называется объединение $O(\mathbf{x}_1, r_1) \cup O(\mathbf{x}_2, r_2) \cup \ldots \cup O(\mathbf{x}_n, r_n)$ из n кругов, для которых выполняется условие

$$M \subseteq \bigcup_{i=\overline{1,n}} O(\mathbf{x}_i, r_i).$$

З а д а ч а. Пусть задано ограниченное замкнутое выпуклое множество M, число $n \in \mathbb{N}$ и набор положительных чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$. Требуется найти покрытие $\Xi_n = O(\mathbf{x}_1, \alpha_1 r) \cup O(\mathbf{x}_2, \alpha_2 r) \cup \ldots \cup O(\mathbf{x}_n, \alpha_n r)$, для которого число r было бы минимальным.

Задача сводится к тому, чтобы найти такой набор из n точек S, при котором величина

$$R_M(S) = \max_{\mathbf{m} \in M} \min_{i=\overline{1,n}} \varphi^{(i)}(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

равная минимальному r, при котором множество M вложено в объединение кругов Ξ_n, будет минимальной среди всех возможных наборов. Здесь

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\|}{\alpha_i}, i = \overline{1,n}. \tag{1.2}$$

Данная задача является обобщением рассматриваемой ранее авторами задачи об отыскании наилучшей чебышевской n-сети множества [15], но она существенно сложнее, поскольку различные точки вносят разный вклад в покрытие.

2. Методы решения задачи

В рамках статьи авторы развивают применявшиеся ранее процедуры построения покрытий наборами конгруэнтных кругов. Их основу составляют конструкции разбиения множества M на зоны влияния точек из S, которые покрываются кругами с центрами в них, и последующий сдвиг точек с целью минимизации радиуса круга, в который может быть вложена эта зона. Однако поскольку в задаче 1 рассматриваются не равные круги, а имеющие различные радиусы, пропорциональные числам $\alpha_i, i = \overline{1,n}$, то структура областей влияния точек из S в ней будет существенно иной.

О п р е д е л е н и е 2. Будем называть областью доминирования точки $\mathbf{s}_i$ над $\mathbf{s}_j$ множество

$$D^{(i,j)}(S) \triangleq \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \varphi^{(i)}(\mathbf{x}) \leqslant \varphi^{(j)}(\mathbf{x})\right\}.$$

Считаем для удобства составления алгоритмов, что $D^{(i,i)}(S) = \mathbb{R}^2$.

Теорема 1 (О структуре области доминирования). *Пусть $\mathbf{s}_i$, $\mathbf{s}_j$ — несовпадающие точки из S. Тогда верны следующие утверждения.*

1) *если $\alpha_i < \alpha_j$, то $D^{(i,j)}(S)$ есть круг*

$$D^{(i,j)}(S) = O\big(\mathbf{v}, r^*(\alpha_i, \alpha_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)\big) \tag{2.1}$$

с центром в

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_i + \frac{\alpha_i^2}{\alpha_j^2 - \alpha_i^2}(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) \tag{2.2}$$

радиуса

$$r^*(\alpha_i, \alpha_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \frac{\alpha_i \alpha_j}{\left|\alpha_j^2 - \alpha_i^2\right|}\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\|; \tag{2.3}$$

2) *если $\alpha_i = \alpha_j$, то $D^{(i,j)}(S)$ есть полуплоскость*

$$D^{(i,j)}(S) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_i\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{s}_j\|\right\}; \tag{2.4}$$

3) *если* $\alpha_i > \alpha_j$, *то* $D^{(i,j)}(S)$ *есть неограниченное множество*

$$D^{(i,j)}(S) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \colon \|\mathbf{x} - \mathbf{w}\| \geqslant r^*(\alpha_i, \alpha_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)\}, \tag{2.5}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}_j + \frac{\alpha_i^2}{\alpha_i^2 - \alpha_j^2}(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i). \tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай 1). Без ограничения общности полагаем, что точка $\mathbf{s}_i$ имеет координаты $(0,0)$, а точка $\mathbf{s}_j$ — координаты $(0,d), d > 0$. Рассмотрим геометрическое множество $X = \{\mathbf{x}\} = \{(x,y)\}$ точек, для которых выполняется

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(j)}(\mathbf{x}). \tag{2.7}$$

Из формул (1.2) и принятого допущения о расположении точек сети следует

$$\varphi^{(i)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(i)}(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}/\alpha_i, \tag{2.8}$$

$$\varphi^{(j)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(j)}(x,y) = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}/\alpha_j. \tag{2.9}$$

Подставив в равенство (2.7) значения (2.8) и (2.9), получаем равенство $\sqrt{x^2 + y^2}/\alpha_i = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}/\alpha_j$, которое можно привести к виду канонического уравнения окружности

$$\Big(x + \frac{d\alpha_i^2}{\alpha_j^2 - \alpha_i^2}\Big)^2 + y^2 = \Big(\frac{d\alpha_i\alpha_j}{\alpha_j^2 - \alpha_i^2}\Big)^2. \tag{2.10}$$

Покажем, что окружность, заданная уравнением (2.10), совпадает с границей множества (2.1). Принятые допущения о выборе системы координат означают, что $\|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j\| = d$, и по формуле (2.2)

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_i + \frac{\alpha_i^2}{\alpha_j^2 - \alpha_i^2}(\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = \Big(-\frac{d\alpha_i^2}{\alpha_j^2 - \alpha_i^2}, 0\Big).$$

В то же время величина (2.3) равна $r^*(\alpha_i, \alpha_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j) = \dfrac{\alpha_i\alpha_j}{|\alpha_j^2 - \alpha_i^2|}d$. Таким образом, граница круга $O\big(\mathbf{v}, r^*(\alpha_i, \alpha_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)\big)$ совпадает с окружностью (2.10). Это означает, что множество $D^{(i,j)}(S)$ совпадает с той частью плоскости, которая ограничена этой окружностью $\partial O\big(\mathbf{v}, r^*(\alpha_i, \alpha_j, \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j)\big)$, и содержит точку $\mathbf{s}_i$, т. е. (2.1).

Рассмотрим случай 2). Он элементарный, поскольку в этом случае разность функций $\varphi^{(i)}(\mathbf{x})$ и $\varphi^{(j)}(\mathbf{x})$ совпадает с разностью расстояний в евклидовой метрике от $\mathbf{x}$ до точек $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{s}_j$, умноженной на положительное число α_i^{-1}. Поэтому граница областей доминирования совпадает со срединным перпендикуляром к отрезку $[\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j]$, а множество $D^{(i,j)}(S)$ есть та полуплоскость из двух, которая содержит точку $\mathbf{s}_i$. Формула (2.4) доказана.

Рассмотрим случай 3). Он аналогичен случаю 1, если в нем поменять точки $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{s}_j$ местами. Поэтому для него полностью аналогично можно доказать, что геометрическое место точек, для которых выполняется (2.7), есть окружность радиуса (2.3) с центром в точке (2.6). Однако, поскольку в случае 3) точка $\mathbf{s}_i$ расположена не внутри круга, ограниченного этой окружностью, а вне его, то $D^{(i,j)}(S)$ совпадает не с кругом, а с его дополнением до плоскости $\mathbb{R}^2$, т. е. с (2.5). □

О п р е д е л е н и е 3. Будем называть

$$D^{(i)}(S, M) \triangleq \{\mathbf{m} \in M \colon \varphi^{(i)}(\mathbf{m}) = \min_{j=\overline{1,n}} \varphi^{(j)}(\mathbf{m})\} \tag{2.11}$$

обобщенной зоной Дирихле точки $\mathbf{s}_i$ в множестве M при заданных числах $\alpha_i, i = \overline{1,n}$.

Области $D^{(i)}(S, M)$ являются обобщением понятия зон Дирихле [16, с. 305], которые введены в задаче о покрытии кругами равного радиуса, и представляют собой геометрические места точек, лежащих от одного из элементов $\mathbf{s}_i$ n-сети S_n не дальше, чем от других. При этом обобщенные зоны Дирихле имеют гораздо более сложную геометрию. В частности, их граница может содержать дуги окружности. Кроме того они могут быть невыпуклыми и даже несвязными. Из формулы (2.11) следует, что обобщенные зоны Дирихле можно находить как пересечение областей доминирования точки с компактом M

$$D^{(i)}(S,M) = M \cap \bigcap_{j=\overline{1,n}} D^{(i,j)}(S). \tag{2.12}$$

Границы $D^{(i)}(S,M)$ могут содержать как отрезки, так и дуги окружностей различного радиуса. Однако в дальнейшем удобно перейти к их аппроксимациям, например, многоугольниками.

О п р е д е л е н и е 4. Чебышевским центром замкнутого ограниченного множества $M \in \mathbb{R}^2$ называется точка $\mathbf{c}(M)$, удовлетворяющая равенству

$$h(M,\{\mathbf{c}(M)\}) = \min\big\{h(M,\{\mathbf{x}\})\colon \mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\big\}, \tag{2.13}$$

где $h(A,B) \triangleq \max\limits_{\mathbf{a}\in A}\min\limits_{\mathbf{b}\in B}\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|$ — хаусдорфово полуотклонение компакта A от компакта B.

Подробнее о свойствах чебышевского центра см. работы А.Л. Гаркави, например [17]. Для любого компакта M чебышевский центр $\mathbf{c}(M)$ существует, является единственным и принадлежит выпуклой оболочке $\operatorname{co} M$ множества M. Величина (2.13) называется *чебышевским радиусом $r(M)$ множества M.*

Основу построения нового массива $\widehat{S} = \{\widehat{\mathbf{s}}_i\}_{i=1}^n$ центров кругов покрытия при заданном на текущем шаге значении S составляет формула

$$\widehat{\mathbf{s}}_i = \begin{cases} k_c\mathbf{c}\big(D^{(i)}(M,S)\big) + (1-k_c)\mathbf{s}_i,\ D^{(i)}(M,S)\neq\varnothing, \\ \mathbf{s}_i,\ D^{(i)}(M,S)=\varnothing, \end{cases} \quad i=\overline{1,n}. \tag{2.14}$$

где $k_c \in (0,-1]$ — настраиваемый параметр. Смысл коэффициента k_c в том, насколько быстро изменяются на каждом шаге координаты кругов покрытия. Увеличение k_c дает возможность повысить скорость работы алгоритма, но снижает его устойчивость.

Теорема 2 (О свойствах итерационного алгоритма). *Для любого компакта M, набора положительных чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, параметра $k_c \in (0,-1]$ и набора из n точек S справедлива оценка*

$$R_M(\widehat{S}) \leqslant R_M(S), \tag{2.15}$$

где $\widehat{S}$ определяется по формуле (2.14).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для произвольного номера i, $1 \leqslant i \leqslant n$, при котором $D^{(i)}(M,S)\neq\varnothing$, выполняется оценка

$$\max\big\{\widehat{\varphi}^{(i)}(\mathbf{x})\colon \mathbf{x}\in D^{(i)}(S,M)\big\} \leqslant \max\big\{\varphi^{(i)}(\mathbf{x})\colon \mathbf{x}\in D^{(i)}(S,M)\big\}, \tag{2.16}$$

где $\widehat{\varphi}^{(i)}(\mathbf{x}) \triangleq \alpha_i^{-1}\|\mathbf{x}-\widehat{\mathbf{s}}_i\|$.

Обозначим через $F(\mathbf{s}) \triangleq h(D^{(i)}(S,M),\{\mathbf{s}\})$ функцию, равную хаусдорфовому полуотклонению компакта $D^{(i)}(M,S)$ от одноточечного множества, содержащего один элемент $\mathbf{s}$. Из определения 4 следует оценка

$$F(\mathbf{s}_i) \geqslant r\big(D^{(i)}(S,M)\big) = F\big(\mathbf{c}\big(D^{(i)}(M,S)\big)\big). \tag{2.17}$$

Функцию $F(\mathbf{s})$ можно представить как максимум $F(\mathbf{s}) = \max\{f_{\mathbf{g}}(\mathbf{s})\colon \mathbf{g}\in D^{(i)}(S,M)\}$ из набора функций, равных евклидовому расстоянию $f_{\mathbf{g}}(\mathbf{s}) = \|\mathbf{s}-\mathbf{g}\|$ до точек из компакта $D^{(i)}(M,S)$. По построению все функции $f_{\mathbf{g}}(\cdot)$ являются выпуклыми на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, а значит, и их максимум $F(\mathbf{s})$ тоже есть выпуклая функция (подробнее см. [18, гл. II, § 1]). Из формулы (2.14) следует, что точка $\widehat{\mathbf{s}}_i$ является выпуклой комбинацией точек $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{c}\big(D^{(i)}(M,S)\big)$, а значит, для выпуклой функции $F(\cdot)$ в ней справедлива оценка

$$F(\widehat{\mathbf{s}}_i) \leqslant k_c F\big(\mathbf{c}\big(D^{(i)}(M,S)\big)\big) + (1-k_c)F(\mathbf{s}_i). \tag{2.18}$$

Из (2.17) и (2.18) следует неравенство $F(\widehat{\mathbf{s}}_i) \leqslant F(\mathbf{s}_i)$, умножив части которого которого на α_i^{-1}, можно получить оценку (2.16).

Из определения 3 и формул (1.1), (1.2) следуют равенство

$$R_M(S) = \max_{i=\overline{1,n}} \max\big\{\varphi^{(i)}(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in D^{(i)}(S,M)\big\} \tag{2.19}$$

и оценка

$$R_M(\widehat{S}) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \max\big\{\widehat{\varphi}^{(i)}(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in D^{(i)}(S,M)\big\}. \tag{2.20}$$

В формулах (2.19) и (2.20) могут присутствовать пустые обобщенные зоны Дирихле $D^{(i)}(S,M)$, но, поскольку значения правых частей получены как максимум из выражений $\max\{\varphi^{(i)}(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in D^{(i)}(S,M)\}$ и $\max\{\widehat{\varphi}^{(i)}(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in D^{(i)}(S,M)\}$, то они определяются только непустыми компактами $D^{(i)}(S,M), i=\overline{1,n}$.

Если подставить в неравенство (2.20) оценки (2.16) при всех $i=\overline{1,n}$, для которых $D^{(i)}(M,S) \neq \varnothing$, то получается, что

$$R_M(\widehat{S}) \leqslant \max_{i=\overline{1,n}} \max\big\{\varphi^{(i)}(\mathbf{x})\colon \mathbf{x} \in D^{(i)}(S,M)\big\}.$$

Из данного неравенства и (2.19) следует оценка (2.15). □

При построении аппроксимаций обобщенных зон Дирихле $D^{(i)}(M,S), i=\overline{1,n}$, авторы прибегли к их аппроксимации наборами точек $P^{(i)}$. В целом качество работы комплекса тем лучше, чем больше точек берется. Однако рост числа точек приводит к увеличению затрат машинного времени. В множество $P^{(i)}$ в случае, когда M есть выпуклый многоугольник, включаются следующие характеристические точки:

I. Вершины многоугольника M, принадлежащие $D^{(i)}(M,S)$.

II. Точки пересечения границы $\partial D^{(i)}(M,S)$ обобщенной зоны Дирихле и границы ∂M множества M.

III. Точки пересечения границы $\partial D^{(i)}(M,S)$ обобщенной зоны Дирихле с границами $\partial D^{(j)}(M,S)$ и $\partial D^{(k)}(M,S)$ двух несовпадающих зон Дирихле $i \neq j, i \neq k, j \neq k$.

IV. Точки пересечения границы $\partial D^{(i,j)}(M,S)$ области доминирования при $i \neq j$ с прямой λ, содержащей отрезок $[\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_j]$, если эти точки принадлежат $\partial D^{(i)}(M,S)$.

В качестве приближения чебышевского центра множества $D^{(i)}(M,S)$ в формуле (2.14) берется $\mathbf{c}(P^{(i)})$. Затем проверяется условие о том, чтобы выполнялось вложение $D^{(i)}(M,S) \subseteq O\big(\mathbf{c}(P^{(i)}), r(P^{(i)})\big)$.

Заметим, что для отыскания наборов характеристических точек нужно перебрать порядка n^3 элементов (в случае если число кругов покрытия существенно больше, чем число вершин многоугольника). Это обусловлено тем, что для произвольные три обобщенные зоны Дирихле могут иметь одну или две общие точки, каждую из них надо рассмотреть. Их координаты находятся как пересечения границ областей доминирования точек из S.

3. Примеры решения задач

Авторами модернизирован программный комплекс [19] построения покрытий компакта M для задачи с кругами различного радиуса. Основу его работы составляют методы вычислительной геометрии: отыскание пересечения и объединения многоугольников и чебышевского центра многоугольника [3]. Первым этапом его работы является построение стохастическими методами начального положения $S^{(0)}$ центров кругов, для которого выполняется вложение $S^{(0)} \subset M$. Затем применяются итерационные изменения координат точек по формуле (2.14) с целью минимизации значения для текущего массива S величины (1.1). При этом обобщенные области Дирихле в соответствии с теоремой 1 строились по формуле (2.12) как пересечения M с полуплоскостями, кругами и дополнениями до кругов плоскости. Критерием остановки работы программного комплекса служит то, что для новой построенной сети $\widehat{S}$ и старой S выполняется условие достаточной близости в метрике Хаусдорфа $h(\widehat{S}, S) \leqslant h_0$, параметры h_0 и k_c задаются пользователем. В рамках статьи авторы ограничились рассмотрением в качестве компактов M выпуклых многоугольников.

Косвенным показателем $\sigma(\Xi_n)$ приближения качества покрытия к оптимальному служит отношение

$$\sigma(\Xi_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu\big(O(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)\big)}{\mu(M)} \tag{3.1}$$

площади $\mu(M)$ фигуры M к сумме площадей кругов, входящих в Ξ_n. Его можно выразить через параметр r как

$$\sigma(\Xi_n) = \frac{\pi r^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}{\mu(M)}.$$

Чем меньше $\sigma(\Xi_n)$, тем ближе покрытие к оптимальному. Для любого покрытия (кроме случая когда M — круг, а количество элементов покрытия $n = 1$) выполняется оценка $\sigma(\Xi_n) > 1$. Выбор показателя качества (3.1) обусловлен тем, что он может легко вычисляться для фигур различной геометрии и инвариантен относительно преобразований сжатия/растяжения и плоского движения.

Во всех представленных ниже примерах решение строится путем многократного запуска программного комплекса. Массивы центров, соответствующие минимальному параметру r, используются для повторного запуска вычислительной схемы при внесении случайных возмущений в их координаты.

П р и м е р 1. Пусть задано множество

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\right\}, \tag{3.2}$$

квадрат со сторонами, параллельными осям координат и равными 2. Требуется построить оптимальное покрытие Ξ_8 квадрата M объединением 8 кругов, радиусы которых пропорциональны числам $\alpha_i = 1.5$ при $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\alpha_i = 1$ при $4 \leqslant i \leqslant 8$.

Полученный набор центров кругов покрытия

$$S = \{(-0.6398, 0.4583), (0.7081, 0.1851), (0.3601, 0.8828), (0.6887, -0.6981),$$

$$(-0.5989, -0.8795), (-0.1079, -0.0789), (0.0796, -0.6847), (-0.7279, -0.4212)\}.$$

Значение параметра, задающего радиусы кругов, $r \approx 0.4338$. Показатель качества (3.1) равен $\sigma(\Xi_8) \approx 1.7366$. Точки из массива S в виде маркеров-кружков, покрытие Ξ_8 кругами $O(\mathbf{s}_i, \alpha_i r), i = \overline{1,8}$ (их границы обозначены тонкими линиями) и граница ∂M компакта M (жирная линиия) представлены на рис. 1.

П р и м е р 2. Пусть множество M такое же, как в примере 1 (см. (3.2)). Требуется построить оптимальное покрытие Ξ_9 квадрата M объединением 9 кругов, радиусы которых пропорциональны числам $\alpha_i = 2$ при $1 \leqslant i \leqslant 2$, $\alpha_i = 1$ при $3 \leqslant i \leqslant 9$.

Полученный набор центров кругов покрытия

$$S = \{(0.6921, -0.3292), (-0.5051, 0.4411), (-0.6540, -0.8713), (0.8301, 0.6708),$$

$$(0.0381, -0.8713), (-0.2267, -0.3980), (0.2888, 0.3859), (-0.8379, -0.4551), (0.2837, 1)\}.$$

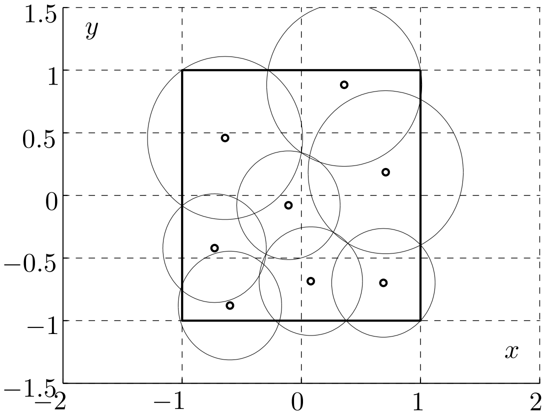

Рис. 1. Покрытие квадрата (3.2) набором из 8 кругов в примере 1.

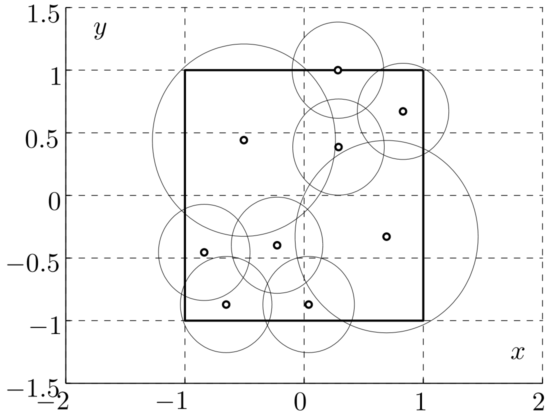

Рис. 2. Покрытие квадрата (3.2) набором из 9 кругов в примере 2.

Значение параметра, задающего радиусы кругов, $r \approx 0.3839$. Показатель качества (3.1) равен $\sigma(\Xi_9) \approx 1.7363$. Покрытие Ξ_9 квадрата M представлено на рис. 2.

П р и м е р 3. Пусть задано множество

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geqslant 0, x + y \leqslant 1, -x + y \leqslant 1\right\}, \tag{3.3}$$

прямоугольный треугольник с вершинами $(-1, 0), (0, 1), (1, 0)$. Требуется оптимальное покрытие Ξ_{10} треугольника M объединением 10 кругов, радиусы которых пропорциональны числам $\alpha_i = 1.5$ при $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\alpha_i = 1$ при $4 \leqslant i \leqslant 10$.

Полученный набор центров кругов покрытия

$$S = \{(-0.7163, 0.1091), (0.1228, 0.2159), (-0.3235, 0.5020),$$

$$(0.5067, 0.0922), (-0.0120, 0.7977), (0.8417, 0.1270),$$

$$(-0.2618, 0.1091), (0.5257, 0.3586), (0.2635, 0.6208), (-0.0061, 0.5049)\}.$$

Значение параметра, задающего радиусы кругов, $r \approx 0.2029$. Показатель качества (3.1) $\sigma(\Xi_{10}) \approx 1.7783$. Покрытие Ξ_{10} треугольника M представлено на рис. 3.

П р и м е р 4. Пусть множество M такое же, как в примере 3 (см. (3.3)). Требуется построить оптимальное покрытие Ξ_{11} треугольника M объединением 11 кругов, радиусы которых пропорциональны числам $\alpha_i = 2$ при $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\alpha_i = 1$ при $4 \leqslant i \leqslant 11$.

Полученный набор центров кругов покрытия

$$S = \{(0.2784, 0.2691), (-0.2280, 0.4938), (-0.7252, 0.1745),$$

$$(0.8655, 0.0919), (-0.0223, 0.8387), (0.5965, 0.0919), (-0.3131, 0.0868),$$

$$(-0.0389, 0.0868), (0.6392, 0.3183), (0.3862, 0.6107), (0.1169, 0.6996)\}.$$

Значение параметра, задающего радиусы кругов, $r \approx 0.1629$. Показатель качества (3.1) $\sigma(\Xi_{11}) \approx 1.6673$. Покрытие Ξ_{11} треугольника M представлено на рис. 4.

П р и м е р 5. Пусть задано множество

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geqslant -1, |x| \leqslant 1, y + |x| \leqslant 1\right\}, \tag{3.4}$$

пятиугольник с вершинами $(-1, 0), (0, 1), (1, 0), (1, -1), (-1, -1)$. Требуется построить оптимальное покрытие Ξ_7 пятиугольника M объединением 7 кругов, радиусы которых пропорциональны числам $\alpha_i = 1.5$ при $1 \leqslant i \leqslant 2$, $\alpha_i = 1$ при $3 \leqslant i \leqslant 7$.

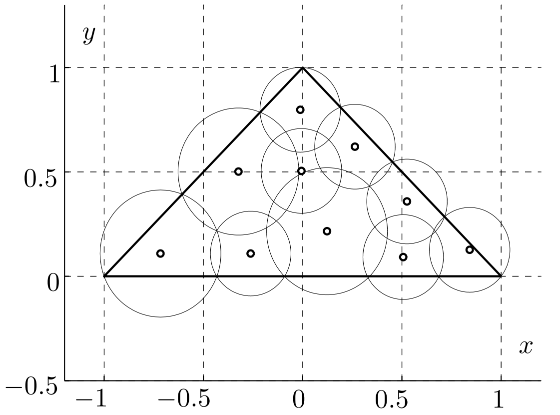

Рис. 3. Покрытие треугольника (3.3) набором из 10 кругов в примере 3.

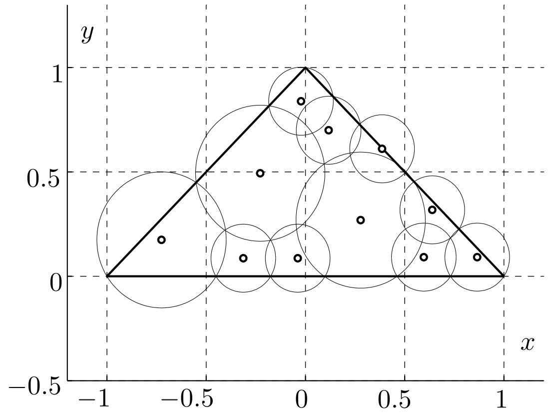

Рис. 4. Покрытие квадрата (3.3) набором из 11 кругов в примере 4.

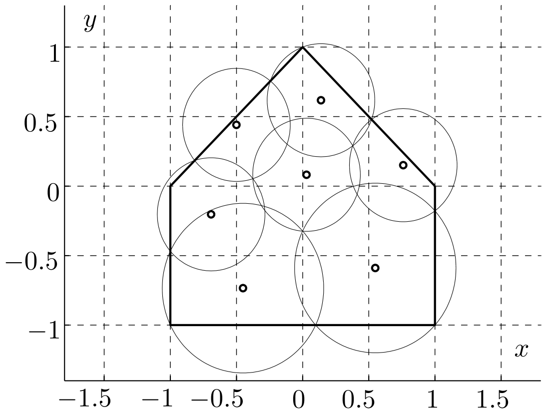

Рис. 5. Покрытие пятиугольника (3.4) набором из 7 кругов в примере 5.

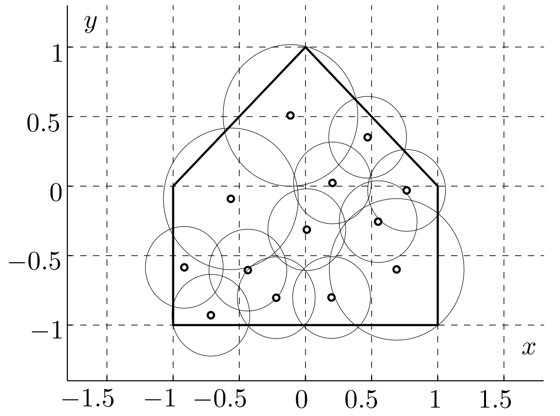

Рис. 6. Покрытие пятиугольника (3.4) набором из 13 кругов в примере 6.

Полученный набор центров кругов покрытия

$$S = \{(-0.4510, -0.7341), (0.5490, -0.5891), (0.7604, 0.1505),$$

$$(-0.5004, 0.4404), (0.1384, 0.6176), (-0.6917, -0.2032), (0.0294, 0.0815)\}.$$

Значение параметра, задающего радиусы кругов, $r \approx 0.4067$. Показатель качества (3.1) $\sigma(\Xi_7) \approx 1.6455$. Покрытие Ξ_7 пятиугольника M представлено на рис. 5.

П р и м е р 6. Пусть множество M равно (3.4). Требуется построить оптимальное покрытие Ξ_{13} пятиугольника M объединением 13 кругов, радиусы которых пропорциональны числам $\alpha_i = \sqrt{3}$ при $1 \leqslant i \leqslant 3$, $\alpha_i = 1$ при $4 \leqslant i \leqslant 13$.

Полученный набор центров кругов покрытия

$$S = \{(-0.1134, 0.5084), (0.6895, -0.5992), (-0.5639, -0.0916),$$

$$(0.2042, 0.0227), (-0.7148, -0.9288), (-0.9157, -0.5845),$$

$$(0.0101, -0.3132), (0.4702, 0.3513), (-0.4351, -0.6044),$$

$$(0.5498, -0.2557), (-0.2203, -0.8029), (0.7649, -0.0311), (0.1972, -0.8015)\}.$$

Значение параметра, задающего радиусы кругов, $r \approx 0.2939$. Показатель качества (3.1) $\sigma(\Xi_{13}) \approx 1.7186$. Покрытие Ξ_{13} пятиугольника M представлено на рис. 6.

При отыскании решений примеров 1–6 выполнялось в среднем по $10 \div 15$ запусков программного комплекса на каждый из них. Время работы комплекса составляло $3 \div 5$ минут, включая перерасчет начального положения центров элементов покрытия при впадении в вырожденный режим, например, если две точки практически совпадали.

Заключение

Авторами изучена задача о покрытии плоского множества M наборами заданного числа кругов различного радиуса. Доказана теорема 1 о структуре зоны влияния каждой точки $\mathbf{s}_i$, которую покрывает круг с центром в $\mathbf{s}_i$. Предложен итерационный алгоритм минимизации величины r, определяющей радиусы кругов покрытия, на основе формулы (2.14). Доказана теорема 2 о том, что алгоритм, по крайней мере, не увеличивает величину r. Реализован программный комплекс, и рассмотрены примеры построения оптимального покрытия выпуклых многоугольников при различных массивах $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ положительных чисел, определяющих радиусы $\alpha_i r$ кругов из набора $O(\mathbf{s}_i, \alpha_i r)$, $i = \overline{1,n}$, осуществляющего покрытие фигуры M. Выполнена визуализация расчетов.

Дальнейшее развитие полученных результатов может быть связано, с одной стороны, с совершенствованием программно-алгоритмического аппарата, включая многопоточную реализацию, что позволит работать с множествами более сложной геометрии, включая невыпуклые. С другой стороны, традиционное для авторов направление исследований связано с использованием неевклидовых метрик. Рассмотрение задачи о покрытии множества неконгруэнтными кругами в такой постановке представляет интерес с точки зрения приложений в логистике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lempert A.A., Kazakov A.L., Bukharov D.S.** Mathematical model and program system for solving a problem of logistic objects placement // Autom. Remote Control. 2015. Vol. 76, no. 8. P. 1463–1470. doi: 10.1134/S0005117915080111 .
2. **Bychkov I.V., Kazakov A.L., Lempert A.A., Bukharov D.S., Stolbov A.B.** An intelligent management system for the development of a regional transport logistics infrastructure // Autom. Remote Control. 2016. Vol. 77, no. 2. P. 332–343. doi: 10.1134/S0005117916020090 .
3. **Preparata F.P., Shamos M.I.** Computational geometry: An introduction. N Y: Springer-Verlag, 1985. 398 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1098-6 .
4. **Тот Л.Ф.** Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. Москва: Физматлит, 1958. 364 с.
5. **Казаков А.Л., Лебедев П.Д.** Алгоритмы построения наилучших n-сетей в метрических пространствах// Автоматика и телемеханика. 2017. №7. С. 141–155. doi: 10.1134/S0005117917070104 .
6. **Lempert, A., Le, Q.M.** Multiple covering of a closed set on a plane with non-Euclidean metrics // IFAC-PapersOnLine. 2018. Vol. 51, no. 32. P. 850–854. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.439 .
7. **Toth L.F.** Solid circle-packings and circle-coverings // Studia Sci. Math. Hungar. 1968. Vol. 3. P. 401–409.
8. **Tóth F. G.**, Covering the plane with two kinds of circles // Discrete Comput. Geom. 1995. Vol. 13, no. 3-4. P. 445–457. doi: 10.1007/BF02574055 .
9. **Florian A., Heppes A.** Solid coverings of the Euclidean plane with incongruent circles// Discrete Comput. Geom. 2000. Vol. 23, no. 2. P. 225–245. doi: 10.1007/PL00009497 .
10. **Dorninger D.** Thinnest covering of the Euclidean plane with incongruent circles // Anal. Geom. Metr. Spaces. 2017. Vol. 5, no. 1. P. 40–46. doi: 10.1515/agms-2017-0002 .
11. **Bánhelyi B., Palatinus E, Lévai B.L.** Optimal circle covering problems and their applications // Central Europ. J. Oper. Research. 2015. Vol. 23, no. 4. P. 815–832. doi: 10.1007/s10100-014-0362-7 .
12. **Kazakov A.L., Lempert A.A., Le Q.M.** An algorithm for packing circles of two types in a fixed size container with non-Euclidean metric // CEUR-WS. 2017. Vol. 1975. P. 286–297.
13. **Kazakov A., Lempert A., Lebedev P.** Congruent circles packing and covering problems for multi-connected domains with non-euclidean metric, and their applications to logistics // CEUR-WS. 2017. Vol. 1839. P. 334–343.
14. **Lempert A., Kazakov A., Le Q.M.** On reserve and double covering problems for the sets with non-Euclidean metrics // Yugoslav J. Oper. Research. 2019. Vol. 29, no. 1. P. 69–79. doi: 10.2298/YJOR171112010L .
15. **Лебедев П.Д.** Итерационные методы построения аппроксимаций оптимальных покрытий невыпуклых плоских множеств // Челяб. физ.-матем. журн. 2019. Т. 4, вып. 1. С. 5–17. doi: 10.24411/2500-0101-2019-14101 .

16. **Брусов В.С., Пиявский С.А.** Вычислительный алгоритм оптимального покрытия областей плоскости // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, no. 2. С. 304–312.
17. **Гаркави А.Л.** О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, №6 (120). С. 139–145.
18. **Пшеничный Б. Н.** Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М., Наука, 1980. 320 с.
19. **Лебедев П.Д.** Программа вычисления оптимального покрытия полусферы набором сферических сегментов. Свидетельство о государственной регистрации №2015661543 от 29.10.2015.

Поступила 2.04.2019
После доработки 14.05.2019
Принята к публикации 20.05.2019

Лебедев Павел Дмитриевич
канд. физ.-мат. наук,
старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: pleb@yandex.ru

Казаков Александр Леонидович
д-р физ.-мат. наук
главный науч. сотрудник
Ин-т динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН
г. Иркутск
e-mail: kazakov@icc.ru

REFERENCES

1. Lempert A.A., Kazakov A.L., Bukharov D.S. Mathematical model and program system for solving a problem of logistic objects placement. *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 8, pp. 1463–1470. doi: 10.1134/S0005117915080111 .
2. Bychkov I.V., Kazakov A.L., Lempert A.A., Bukharov D.S., Stolbov A.B. An intelligent management system for the development of a regional transport logistics infrastructure. Autom. Remote Control, 2016, vol. 77, no. 2, pp. 332–343. doi: 10.1134/S0005117916020090 .
3. Preparata F.P., Shamos M.I. *Computational geometry: An introduction.* N Y: Springer-Verlag, 1985. 398 p. doi: 10.1007/978-1-4612-1098-6 .
4. Toth L.F. *Regular figures.* N Y: A Pergamon Press Book The Macmillan Co., 1964, 339 p. ISBN: 9780080100586 . Translated to Russian under the title *Raspolozheniya na ploskosti, na sfere i v prostranstve.* Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1958, 364 p.
5. Kazakov A.L., Lebedev P.D. Algorithms for constructing optimal n-networks in metric spaces. *Autom. Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 7, pp. 1290–1301. doi: 10.1134/S0005117917070104 .
6. Lempert, A., Le, Q.M. Multiple covering of a closed set on a plane with non-Euclidean metrics. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 850–854. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.439 .
7. Toth L.F. Solid circle-packings and circle-coverings. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 1968, vol. 3, pp. 401–409.
8. Tóth F.G. Covering the plane with two kinds of circles. *Discrete Comput. Geom.*, 1995, vol. 13, no. 3-4, pp. 445–457. doi: 10.1007/BF02574055 .
9. Florian A., Heppes A. Solid Coverings of the Euclidean Plane with Incongruent Circles. *Discrete Comput. Geom.*, 2000, vol. 23, no. 2, pp. 225–245. doi: 10.1007/PL00009497 .
10. Dorninger D. Thinnest covering of the Euclidean plane with incongruent circles. *Anal. Geom. Metr. Spaces*, 2017, vol. 5, no. 1, pp. 40–46. doi: 10.1515/agms-2017-0002 .
11. Bánhelyi B., Palatinus E, Lévai B.L. Optimal circle covering problems and their applications. *Central Europ. J. Oper. Research*, 2015, vol. 23, no. 4, pp. 815–832. doi: 10.1007/s10100-014-0362-7 .
12. Kazakov A.L., Lempert A.A., Le Q.M. An algorithm for packing circles of two types in a fixed size container with non-Euclidean metric. *CEUR-WS*, 2017, vol. 1975, pp. 286–297.

13. Kazakov A., Lempert A., Lebedev P. Congruent circles packing and covering problems for multi-connected domains with non-euclidean metric, and their applications to logistics. *CEUR-WS*, 2017, vol. 1839, pp. 334–343.
14. Lempert A., Kazakov A., Le Q.M. On reserve and double covering problems for the sets with non-Euclidean metrics. *Yugoslav J. Oper. Research.*, 2019, vol. 29, no. 1, pp. 69–79. doi: 10.2298/YJOR171112010L .
15. Lebedev P.D. Iterative methods for approximations constructing of optimal covering for nonconvex plane sets. *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2019, vol. 4, no. 1, pp. 5–17 (in Russian). doi: 10.24411/2500-0101-2019-14101 .
16. Brusov V.S., Piyavskii S.A., A computational algorithm for optimally covering a plane region. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1971, vol. 11, no. 2, pp. 17–27. doi: 10.1016/0041-5553(71)90161-3 .
17. Garkavi A.L. On the Chebyshev center and convex hull of a set. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1964, vol. 19, no. 6(120), pp. 139–145 (in Russian).
18. Pshenichnyi B.N. *Vypuklyi analiz i ekstremal'nye zadachi* [Convex analysis and extremal problems]. Moscow: Nauka Publ., 1980, 320 p.
19. Lebedev P. *Program for calculating the optimal hemisphere coverage by a set of spherical segments.* Registered Rospatent Certificate No. 2015661543 dated 10.29.2015 (in Russian).

Received April 2, 2019
Revised May 14, 2019
Accepted May 20, 2019

Funding Agency:Theorems 1 and 2 were proved by Lebedev with support from the Russian Foundation for Basic Research (project nos. 18-01-00221 and 18-31-00018 mol_a) and from the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University). The computational experiment was carried out by Kazakov with support from the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-07-00604).

Pavel Dmitrievich Lebedev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia, e-mail: pleb@yandex.ru .

Aleksandr Leonidovich Kazakov, Dr. Phys.-Math. Sci., Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia, e-mail: kazakov@icc.ru .

Cite this article as: P. D. Lebedev, A. L. Kazakov. Construction of optimal covers by disks of different radii for convex planar sets, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 137–148 .