ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.912 + 514.1

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЛОЖЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

В. А. Кыров

Для современной математики большое значение имеет изучение геометрий максимальной подвижности. Максимальная подвижность для n-мерной геометрии, задаваемой функцией f пары точек, означает существование $n(n+1)/2$-мерной группы преобразований, оставляющей эту функцию инвариантной. Известно много геометрий максимальной подвижности (геометрия Евклида, симплектическая, Лобачевского и т. д.), но полной классификации таких геометрий нет. В данной статье методом вложения решается одна из таких классификационных задач. Суть этого метода состоит в следующем: по функции пары точек g трехмерной геометрии находим все невырожденные функции f пары точек четырехмерных геометрий, являющиеся инвариантами группы Ли преобразований размерности 10. В этой статье g — это невырожденные функции пары точек трех симплициальных трехмерных геометрий:

$$g = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j, \quad g = \ln\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j, \quad g = \operatorname{arctg}\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j.$$

Данные геометрии локально максимально подвижны, т. е. их группы движений шестимерны. Задача этой работы сводится к решению аналитическими методами специальных функциональных уравнений, которые ищутся в виде рядов Тейлора. Для перебора различных вариантов применяется пакет математических программ Maple 15. В результате получаются только вырожденные функции пары точек, которые не задают геометрии максимальной подвижности.

Ключевые слова: функциональное уравнение, геометрия максимальной подвижности, группа движений, симплициальная геометрия.

V. A. Kyrov. Analytic embedding of three-dimensional simplicial geometries.

The study of maximum mobility geometries is of great importance for modern mathematics. The maximum mobility of an n-dimensional geometry defined by a function f of a pair of points means the existence of an $n(n+1)/2$-dimensional transformation group fixing this function. There are a number of known maximum mobility geometries (Euclidean, symplectic, Lobachevskian, etc.), but there is no complete classification of such geometries. In this paper, we solve one of such classification problems by the embedding method. The essence of the method is as follows: from the function g of a pair of points of a three-dimensional geometry, we find all nondegenerate functions f of a pair of points of four-dimensional geometries that are invariants of the Lie group of transformations of dimension 10. In this paper, g are nondegenerate functions of a pair of points of three simplicial three-dimensional geometries:

$$g = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j, \quad g = \ln\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j, \quad g = \arctan\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j.$$

These geometries are locally maximally mobile, which means that their groups of motions are six-dimensional. The problem solved in this paper is reduced to the solution of special functional equations by analytical methods. The solutions are sought in the form of Taylor series. The Maple 15 mathematical software package is used for the enumeration of various options. As a result, we obtain only degenerate functions of a pair of points, which do not define a maximum mobility geometry.

Keywords: functional equation, maximum mobility geometry, group of motions, simplicial geometry.

MSC: 53D05,39B22

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-125-136

Введение

Известны трехмерные геометрии, задаваемые функциями пары точек [1; 2]

$$g = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j; \tag{0.1}$$

$$g = \ln \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j; \tag{0.2}$$

$$g = \mathrm{arctg} \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + 2z_i + 2z_j, \tag{0.3}$$

где, например, (x_i, y_i, z_i) — координаты точки i. Геометрия с функцией (0.1) называется *симплициальной геометрией* I *типа*, с функцией (0.2) — *симплициальной геометрией* II *типа* и, наконец, с функцией (0.3) — *симплициальной геометрией* III *типа*. Иногда они обозначаются общим термином — *симплициальная геометрия*.

Геометрии с функциями (0.1)–(0.3) впервые появились при классификации феноменологически симметричных трехмерных геометрий [1–3] и являются геометриями локальной максимальной подвижности, поскольку группы их движений имеют размерность 6.

Цель работы. В статье решается задача, являющаяся частью глобальной задачи вложения для геометрий максимальной подвижности. Поясним ее суть в четырехмерном случае. Известна классификация трехмерных геометрий локальной максимальной подвижности, т. е. геометрий с шестимерными локальными группами движений. Эта классификация была получена в 80-е годы 20 века В. Х. Левом и недавно дополнена автором. Она содержит как хорошо известные геометрии (евклидова, псевдоевклидова, сферическая и т. д.), так и неизвестные, среди которых симплициальные геометрии (I, II и III типов), исследуемые в этой работе. Суть задачи вложения состоит в поиске всех четырехмерных геометрий локальной максимальной подвижности, т. е. в нахождении геометрий, задаваемых функциями пары точек $f = \chi(g, w_i, w_j)$ (g — функция пары точек известной трехмерной геометрии локальной максимальной подвижности), являющимися двухточечными инвариантами групп движений размерности 10. Вместо g можно взять, например, метрику евклидовой геометрии (эта задача решена автором). В данной статье вместо g берутся функции пары точек симплициальных геометрий. Эта задача не всегда имеет положительное решение. Так, для трехмерных симплициальных геометрий решениями получаются функции пары точек, не задающие геометрии локальной максимальной подвижности. Решение задачи вложения находится в классе аналитических функций. Отметим, что задачи с подобной постановкой решались в работах [4–6].

1. Точные определения и основные результаты

Рассмотрим четырехмерное аналитическое многообразие M, которое локально диффеоморфно прямому произведению трехмерного аналитического многообразия N и одномерного аналитического многообразия L. Локальный диффеоморфизм осуществляет аналитическое отображение $h : M \to N \times L$. Пусть $\pi_1 : N \times L \to N$ и $\pi_2 : N \times L \to L$ — проекции. Рассмотрим функции $g : N \times N \to \mathbb{R}$ с открытой и плотной областью определения S_g в N^2 и $\chi : \mathbb{R} \times L \times L \to \mathbb{R}$. Определим проекции $p_1 : M \times M \to M$ и $p_2 : M \times M \to M$, которые на точках действуют так: $p_1 : \langle i, j\rangle \mapsto i$ и $p_2 : \langle i, j\rangle \mapsto j$, где $\langle i, j\rangle$ — произвольная точка в $M \times M$. Построим функцию $f : M \times M \to \mathbb{R}$ по формуле

$$f = \chi\Big(g\big(\pi_1(h(p_1)), \pi_1(h(p_2))\big), \pi_2(h(p_1)), \pi_2(h(p_2))\Big),$$

область определения S_f которой открыта и плотна в M^2. На точках

$$f(i,j) = \chi\Big(g\big(\pi_1\big(h(p_1(\langle i,j\rangle))\big), \pi_1\big(h(p_2(\langle i,j\rangle))\big)\big), \pi_2\big(h(p_1(\langle i,j\rangle))\big), \pi_2\big(h(p_2(\langle i,j\rangle))\big)\Big), \tag{1.1}$$

где i, j — произвольные две точки из M, причем $\langle i, j\rangle \in S_f$.

Для произвольной точки из M рассмотрим координатную окрестность $U \subset M$, в которой h является диффеоморфизмом и для любых точек $i, j \in U$, $\langle i, j\rangle \in S_f$, существуют окрестности $U(i) \subset U$, $U(j) \subset U$ такие, что $\langle i', j'\rangle \in S_f$ $\forall i' \in U(i)$, $\forall j' \in U(j)$. Из вышесказанного имеем диффеоморфизм окрестностей $h : U \to V \times W$, где V, W — некоторые координатные окрестности в N и L соответственно. Координаты в окрестности V обозначим через (x, y, z), а координату в окрестности W — через (w). Тогда в локальных координатах функция (1.1) принимает вид

$$f = f(i, j) = \chi(\theta, w_i, w_j), \tag{1.2}$$

где $g(\pi_1(h(i)), \pi_1(h(j))) = \theta = \theta(x_i, y_i, z_i, x_j, y_j, z_j)$ — одна из функций пары точек списка (0.1)–(0.3), $\pi_2(h(i)) = w_i$, $\pi_2(h(j)) = w_j$. Пусть выполняются следующие аксиомы.

Аксиома аналитичности. Функция $\chi : \mathbb{R} \times L \times L \to \mathbb{R}$ аналитическая во всех точках области определения.

Аксиома невырожденности. Для функции (1.2) в произвольной точке окрестности $U(i) \times U(j) \subset M^2$ справедливы неравенства

$$\frac{\partial \chi}{\partial \theta} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_i} \neq 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial w_j} \neq 0. \tag{1.3}$$

Пусть группа Ли G действует эффективно и аналитично в $U \subset M$ [3]. Это означает, что задано аналитическое инъективное отображение (эффективное действие) $\lambda : U \times G \to U'$, где $U' \subset M$ — открытая область, причем выполняются свойства

1) $\lambda(i, e) = i$, $e \in G$ — единица, $i \in U$;

2) $\lambda(\lambda(i, a), b) = \lambda(i, ab)$ для любых $a, b \in G$ и $i \in U$;

3) Для любого $i \in U$ $\lambda(i, a) = i$, только если $a = e$.

Действие λ_a, определяемое произвольным элементом $a \in G$, называется *движением*, если для любых точек $i, j \in U$ таких, что $\langle i, j \rangle \in S_f$, $\langle \lambda_a(i), \lambda_a(j) \rangle \in S_f$, выполняется равенство

$$f(\lambda_a(i), \lambda_a(j)) = f(i, j).$$

Действия группы G можно определить в окрестностях $U(i)$ и $U(j)$ точек i и j, причем если эти окрестности пересекаются, то действия в пересечении совпадают. Множество всех движений образует группу движений.

Аксиома максимальной подвижности. Размерность группы Ли G равна 10.

Алгебра Ли действия группы Ли G состоит из операторов

$$X = X_1 \partial_x + X_2 \partial_y + X_3 \partial_z + X_4 \partial_w, \tag{1.4}$$

где $X_\alpha = X_\alpha(x, y, z, w)$ — аналитическая функция в U, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ [3]. Через операторы (1.4) записывается условие локальной инвариантности [3; 7]

$$X(i) f(i, j) + X(j) f(i, j) = 0, \tag{1.5}$$

которое выполняется в окрестностях $U(i) \subset U$ и $U(j) \subset U$ точек i и j.

Ниже ищем все функции вида (1.2), являющиеся двухточечными инвариантами десятипараметрической группы движений, причем θ — функция из списка (0.1)–(0.3).

Пусть $k \in U \subset M$ — начало некоторой системы координат в U, в которой эта точка имеет нулевые координаты $(0, 0, 0, 0)$. В такой системе координат справедливы разложения в ряд Тейлора для компонент оператора (1.4) и функции (1.2) [8]:

$$\left\{ \begin{array}{c} X_1 = X_1(z,w) + D_1(X_1)(z,w)x + D_2(X_1)(z,w)y \\ + \dfrac{1}{2}D_{1,1}(X_1)(z,w)x^2 + \dfrac{1}{2}D_{2,2}(X_1)(z,w)y^2 + D_{1,2}(X_1)(z,w)xy + \cdots, \\ X_2 = X_2(z,w) + D_1(X_2)(z,w)x + D_2(X_2)(z,w)y \\ + \dfrac{1}{2}D_{1,1}(X_2)(z,w)x^2 + \dfrac{1}{2}D_{2,2}(X_2)(z,w)y^2 + D_{1,2}(X_2)(z,w)xy + \cdots, \\ X_3 = X_3(z,w) + D_1(X_3)(z,w)x + D_2(X_3)(z,w)y \\ + \dfrac{1}{2}D_{1,1}(X_3)(z,w)x^2 + \dfrac{1}{2}D_{2,2}(X_3)(z,w)y^2 + D_{1,2}(X_3)(z,w)xy + \cdots, \\ X_4 = X_4(z,w) + D_1(X_4)(z,w)x + D_2(X_4)(z,w)y \\ + \dfrac{1}{2}D_{1,1}(X_4)(z,w)x^2 + \dfrac{1}{2}D_{2,2}(X_4)(z,w)y^2 + D_{1,2}(X_4)(z,w)xy + \cdots, \end{array} \right. \tag{1.6}$$

$$f(\theta, w_i, w_j) = f(w_i, w_j) + D_1(f)(w_i, w_j)\theta + \frac{1}{2}D_{1,1}(f)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \tag{1.7}$$

где, например, $X_1(z,w) = X_1(0,0,z,w)$, $D_1(X_1)(z,w) = \dfrac{\partial X_1(x,y,z,w)}{\partial x}|_{x=y=0}$, $D_2(X_1)(z,w) = \dfrac{\partial X_1(x,y,z,w)}{\partial y}|_{x=y=0}$, $D_{1,2}(X_2)(z,w) = \dfrac{\partial^2 X_2(x,y,z,w)}{\partial x \partial y}|_{x=y=0}$, $f(w_i,w_j) = \chi(0,w_i,w_j)$, $D_1(f)(w_i,w_j) = \dfrac{\partial \chi(\theta,w_i,w_j)}{\partial \theta}|_{\theta=0}$.

Основной результат работы сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Рассмотрим произвольную точку $k \in M$ и ее координатную окрестность U. Возьмем также две точки $i, j \in U$ с окрестностями $U(i)$ и $U(j)$ такие, что*

$$U(i) \cup U(j) \subset U, \ \ \textit{причем} \ \langle i,j\rangle, \langle i',j'\rangle \in S_f \ \ \forall i' \in U(i), \ \ \forall j' \in U(j).$$

Тогда функция пары точек (1.2) *в аналитическом многообразии M вырождена, т. е. не задает геометрию локальной максимальной подвижности.*

Как сказано выше, функция (1.2) является двухточечным инвариантом действия десятимерной группы Ли G, поэтому условие локальной инвариантности (1.5) в явном виде для различных значений аргумента θ из списка (0.2)–(0.4) записывается так:

$$\left\{ \begin{array}{c} \big[-v(X_1(i)-X_1(j)) + u(X_2(i)-X_2(j)) + 2u^2(X_3(i)+X_3(j))\big]\dfrac{\partial\chi}{\partial\theta} \\ + u^2\Big(X_4(i)\dfrac{\partial\chi}{\partial w_i} + X_4(j)\dfrac{\partial\chi}{\partial w_j}\Big) = 0; \end{array} \right. \tag{1.8}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \big[-v(X_1(i)-X_1(j)) + u(X_2(i)-X_2(j)) + 2uv(X_3(i)+X_3(j))\big]\dfrac{\partial\chi}{\partial\theta} \\ + uv\Big(X_4(i)\dfrac{\partial\chi}{\partial w_i} + X_4(j)\dfrac{\partial\chi}{\partial w_j}\Big) = 0; \end{array} \right. \tag{1.9}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \big[-v(X_1(i)-X_1(j)) + u(X_2(i)-X_2(j)) + 2(u^2+v^2)(X_3(i)+X_3(j))\big]\dfrac{\partial\chi}{\partial\theta} \\ + (u^2+v^2)\Big(X_4(i)\dfrac{\partial\chi}{\partial w_i} + X_4(j)\dfrac{\partial\chi}{\partial w_j}\Big) = 0, \end{array} \right. \tag{1.10}$$

где X_1, X_2, X_3, X_4 — компоненты оператора (1.4). Здесь и везде ниже введены сокращающие обозначения: $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$. Заметим, что выражения (1.8)–(1.10) выполняются тождественно по координатам точек i и j из некоторых окрестностей $U(i)$ и $U(j)$.

2. Вспомогательные утверждения

Утверждения, доказываемые в этом разделе, справедливы не только в классе аналитических функций, но также и для функций класса C^2.

Лемма 1. *В некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ произвольной точки $\langle i,j\rangle \in M \times M$ для тождеств* (1.8)–(1.10) *выполняются неравенства*

$$-v(X_1(i)-X_1(j)) + u(X_2(i)-X_2(j)) + 2u^2(X_3(i)+X_3(j)) \neq 0;$$

$$-v(X_1(i)-X_1(j)) + u(X_2(i)-X_2(j)) + 2uv(X_3(i)+X_3(j)) \neq 0;$$

$$-v(X_1(i)-X_1(j)) + u(X_2(i)-X_2(j)) + 2(u^2+v^2)(X_3(i)+X_3(j)) \neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по схеме, указанной в работах [4; 5, лемма 1].

Лемма 2. *В некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ произвольной точки $\langle i,j\rangle \in M \times M$ для тождеств* (1.8)–(1.10) *справедливо неравенство $X_4 \neq 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится по схеме, указанной в работах [4; 5, лемма 2].

Лемма 3. *В некоторой окрестности* $U(i) \times U(j)$ *произвольной точки* $\langle i, j\rangle \in M \times M$ *функция* $X_4(x, y, z, w)$*, входящая в тождества* (1.8)–(1.10)*, существенно зависит либо от* x*, либо от* y*, т. е.* $(X'_{4x}(x, y, z, w))^2 + \big(X'_{4y}(x, y, z, w)\big)^2 \neq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эта лемма сформулирована сразу для трех тождеств. Подробное доказательство проводим для случая (1.10), а остальные случаи проверяются аналогично. Предположим противное, пусть в некоторой окрестности $U(i) \times U(j)$ произвольной точки $\langle i, j\rangle \in M \times M$ $X_4 = X_4(z, w) \neq 0$.

Тождество (1.10) в окрестности $U(i) \times U(j)$ представим в виде

$$-v(X_1(i) - X_1(j)) + u(X_2(i) - X_2(j)) + 2(u^2 + v^2)(X_3(i) + X_3(j)) = -(u^2 + v^2)F = \overline{F}, \quad (2.1)$$

где введены обозначения

$$F = F\,(\vartheta, z_i, z_j, w_i, w_j) = \Big(X_4(z_i, w_i)\frac{\partial\chi}{\partial w_i} + X_4(z_j, w_j)\frac{\partial\chi}{\partial w_j}\Big)/\frac{\partial\chi}{\partial\theta},$$

причем, как и выше, $u = x_i - x_j$, $v = y_i - y_j$, аргумент θ имеет вид (0.3), $\vartheta = \mathrm{arctg}\dfrac{v}{u}$. Согласно лемме 1 $F \neq 0$. Продифференцируем равенство (2.1) по переменным x_i, x_j, y_i, y_j:

$$X_2(i) - X_2(j) - vX'_{1x}(i) + uX'_{2x}(i) + 2(u^2 + v^2)X'_{3x}(i) + 4u(X_3(i) + X_3(j)) = \overline{F}'_u,$$

$$-X_2(i) + X_2(j) + vX'_{1x}(j) - uX'_{2x}(j) + 2(u^2 + v^2)X'_{3x}(j) - 4u(X_3(i) + X_3(j)) = -\overline{F}'_u,$$

$$-X_1(i) + X_1(j) - vX'_{1y}(i) + uX'_{2y}(i) + 2(u^2 + v^2)X'_{3y}(i) + 4v(X_3(i) + X_3(j)) = \overline{F}'_v,$$

$$X_1(i) - X_1(j) + vX'_{1y}(j) - uX'_{2y}(j) + 2(u^2 + v^2)X'_{3y}(j) - 4v(X_3(i) + X_3(j)) = -\overline{F}'_v.$$

Далее складываем первое и второе, а также третье и четвертое равенства:

$$\begin{cases} -v(X'_{1x}(i) - X'_{1x}(j)) + u(X'_{2x}(i) - X'_{2x}(j)) + 2(u^2 + v^2)(X'_{3x}(i) + X'_{3x}(j)) = 0, \\ -v(X'_{1y}(i) - X'_{1y}(j)) + u(X'_{2y}(i) - X'_{2y}(j)) + 2(u^2 + v^2)(X'_{3y}(i) + X'_{3y}(j)) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Дифференцируя по z_i и по w_i, а затем по x_j и y_j, получаем $X'_{1x}(x, y)$, $X'_{1y}(x, y)$, $X'_{2x}(x, y)$, $X'_{2y}(x, y)$, $X'_{3x}(x, y)$, $X'_{3y}(x, y)$. Тогда $X_1 = X_1(x, y) + p(z, w)$, $X_2 = X_2(x, y) + q(z, w)$, $X_3 = X_3(x, y) + r(z, w)$.

Далее уравнения в системе (2.2) дифференцируем по x_i и x_j; по x_i и y_j; по y_i и y_j:

$$-V'_x(i) - V'_x(j) - 4uW'_x(i) + 4uW'_x(j) - 4W(i) - 4W(j) = 0,$$

$$U'_x(i) - V'_y(j) - 4vW'_x(i) + 4uW'_y(j) = 0,$$

$$U'_y(i) + U'_y(j) - 4vW'_y(i) + 4vW'_y(j) - 4W(i) - 4W(j) = 0,$$

где $U = X'_{1x}$ или X'_{1y}, $V = X'_{2x}$ или X'_{2y}, $W = X'_{3x}$ или X'_{3y}. Дифференцируя в последней системе по координатам точек i и j, имеем $W'_{xx} = W'_{xy} = W'_{yy} = 0$, следовательно, $W = ax + by + c$, $a, b, c = \mathrm{const}$, поэтому получаем систему

$$-V'_x(i) - V'_x(j) - 4W(i) - 4W(j) = 0,$$

$$U'_x(i) - V'_y(j) - 4av + 4bu = 0,$$

$$U'_y(i) + U'_y(j) - 4W(i) - 4W(j) = 0,$$

после чего производим разделение переменных

$$U'_x = 4ay - 4bx + d, \quad U'_y = 4ax + 4by + 4c,$$

$$V'_x = -4ax - 4by - 4c, \quad V'_y = 4ay - 4bx + d, \quad W = ax + by + c, \quad d = \mathrm{const}.$$

После интегрирования имеем

$$U = 4axy + 2b(y^2 - x^2) + dx + 4cy + p, \quad V = 2a(y^2 - x^2) - 4bxy + dy - 4cx + q, \quad W = ax + by + c.$$

Следовательно,

$$X'_{1x} = 4a_1xy + 2b_1(y^2 - x^2) + d_1x + 4c_1y + p_1, \quad X'_{1y} = 4a_2xy + 2b_2(y^2 - x^2) + d_2x + 4c_2y + p_2,$$

$$X'_{2x} = 2a_1(y^2 - x^2) - 4b_1xy + d_1y - 4c_1x + q_1, \quad X'_{3x} = a_1x + b_1y + c_1,$$
$$X'_{2y} = 2a_2(y^2 - x^2) - 4b_2xy + d_2y - 4c_2x + q_2, \quad X'_{3y} = a_2x + b_2y + c_2,$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, p_1, p_2, q_1, q_2 = \mathrm{const}$. Из совместности частных производных вытекает $b_2 = -a_1$, $b_1 = a_2$, $d_1 = -4c_2$, $d_2 = 4c_1$. Тогда

$$X'_{1x} = 4a_1xy + 2a_2(y^2 - x^2) - 4c_2x + 4c_1y + p_1, \quad X'_{1y} = 4a_2xy - 2a_1(y^2 - x^2) + 4c_1x + 4c_2y + p_2,$$

$$X'_{2x} = 2a_1(y^2 - x^2) - 4a_2xy - 4c_2y - 4c_1x + q_1, \quad X'_{3x} = a_1x + a_2y + c_1,$$
$$X'_{2y} = 2a_2(y^2 - x^2) + 4a_1xy + 4c_1y - 4c_2x + q_2, \quad X'_{3y} = a_2x - a_1y + c_2.$$

Интегрируя, получаем явные выражения для X_1, X_2 и X_3:

$$X_1 = 2a_1x^2y - 2a_1y^3/3 + 2a_2y^2x - 2a_2x^3/3 + 4c_1xy + 2c_2(y^2 - x^2) + p_1x + p_2y + p(z, w),$$

$$X_2 = -2a_2x^2y + 2a_2y^3/3 + 2a_1y^2x - 2a_1x^3/3 - 4c_2xy + 2c_1(y^2 - x^2) + q_1x + q_2y + q(z, w),$$
$$X_3 = a_1(x^2 - y^2)/2 + a_2xy + c_1x + c_2y + r(z, w).$$

Продифференцируем равенство (2.1) дважды: по x_i и x_j, по x_i и y_j, а также по y_i, y_j:

$$-X'_{2x}(i) - X'_{2x}(j) - 4uX'_{3x}(i) + 4uX'_{3x}(j) - 4(X_3(i) + X_3(j)) = 2F - \frac{2uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta + \frac{v^2}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta},$$

$$X'_{1x}(i) - X'_{2y}(j) - 4vX'_{3x}(i) + 4uX'_{3y}(j) = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}F'_\vartheta - \frac{uv}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta},$$

$$X'_{1y}(j) + X'_{1y}(i) - 4vX'_{3y}(i) + 4vX'_{3y}(j) - 4(X_3(i) + X_3(j)) = 2F + \frac{2uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta + \frac{u^2}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta}.$$

Подставляем в данную систему явные выражения для X_1, X_2 и X_3:

$$-2q_1 - 4a_1u^2 - 4a_2uv - 4r(z_i, w_i) - 4r(z_j, w_j) = 2F - \frac{2uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta + \frac{v^2}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta},$$

$$-2a_2u^2 - 2a_2v^2 + p_1 - q_2 = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}F'_\vartheta - \frac{uv}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta},$$

$$2p_2 - 4a_2uv + 4a_1v^2 - 4r(z_i, w_i) - 4r(z_j, w_j) = 2F + \frac{2uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta + \frac{u^2}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta}.$$

Поскольку правые части полученной системы зависят от $\vartheta, z_i, z_j, w_i, w_j$, получаем $a_1 = a_2 = 0$. Комбинируя в таком случае уравнения полученной системы, имеем

$$2q_1 + 2p_2 = \frac{4uv}{u^2 + v^2}F'_\vartheta + \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta}, \quad -p_1 + q_2 = -\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}F'_\vartheta + \frac{uv}{u^2 + v^2}F''_{\vartheta\vartheta}.$$

Нетрудно установить, что $p_1 = q_2$, $q_1 = -p_2$,

$$F = -2r(z_i, w_i) - 2r(z_j, w_j) + p_2, \quad X_1 = 4c_1xy + 2c_2(y^2 - x^2) + q_2x + p_2y + p(z, w),$$

$$X_2 = -4c_2xy + 2c_1(y^2 - x^2) - p_2x + q_2y + q(z, w), \quad X_3 = c_1x + c_2y + r(z, w).$$

Полученное подставляем в (2.1), имеем $p = p(z, w) = \mathrm{const}$, $q = q(z, w) = \mathrm{const}$. Тогда приходим к алгебре Ли с произвольным оператором

$$X = (4c_1xy + 2c_2(y^2 - x^2) + q_2x + p_2y + p)\partial_x$$

$$+ (-4c_2xy + 2c_1(y^2 - x^2) - p_2x + q_2y + q)\partial_y + (c_1x + c_2y + r(z, w))\partial_z + X_4(z, w)\partial_w.$$

Придавая постоянным значения 0 и 1, выделяем базис

$$X_1 = 4xy\partial_x + 2(y^2 - x^2)\partial_y + x\partial_z, \quad X_2 = 2(y^2 - x^2)\partial_x - 4xy\partial_y + y\partial_z, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y,$$

$$X_4 = y\partial_x - x\partial_y, \quad X_5 = \partial_x,\ X_6 = \partial_y, \quad X' = r(z, w)\partial_z + X_4(z, w)\partial_w,$$

причем $X' = \alpha X_7 + \alpha_2 X_8 + \cdots$. Алгебра Ли должна быть замкнута относительно операции коммутирования, поэтому $[X_1, X'] = xr'_z\partial_z + xX'_{4z}\partial_w = \alpha X' + \beta X_1 + \gamma X_2$, следовательно, $r'_z = X'_{4z} = 0$, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Тогда $r = r(w)$, $X_4 = X_4(w) \neq 0$. Далее вводится замена координат: $\overline{z} = z - \displaystyle\int \frac{r(w)dw}{X_4(w)}$, $\overline{w} = \displaystyle\int \frac{dw}{X_4(w)}$, поэтому $X' = \partial_{\overline{w}}$. Значит, размерность алгебры Ли меньше 10. Противоречие. Аналогично доказываются и остальные случаи. □

3. Доказательство теоремы

Функциональные уравнения (1.8)–(1.10) в окрестности $U(i) \times U(j)$ удобно переписать в виде

$$\left\{\begin{array}{c} -v(X_1(i) - X_1(j)) + u(X_2(i) - X_2(j)) \\ +\ 2u^2(X_3(i) + X_3(j)) + u^2\,(X_4(i)F_1 + X_4(j)F_2) = 0; \end{array}\right. \tag{3.1}$$

$$\left\{\begin{array}{c} -v(X_1(i) - X_1(j)) + u(X_2(i) - X_2(j)) \\ +\ 2uv(X_3(i) + X_3(j)) + uv\,(X_4(i)F_1 + X_4(j)F_2) = 0; \end{array}\right. \tag{3.2}$$

$$\left\{\begin{array}{c} -v(X_1(i) - X_1(j)) + u(X_2(i) - X_2(j)) \\ +\ 2(u^2 + v^2)(X_3(i) + X_3(j)) + (u^2 + v^2)\,(X_4(i)F_1 + X_4(j)F_2) = 0, \end{array}\right. \tag{3.3}$$

где введены обозначения

$$F_1(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial\chi}{\partial w_i} / \frac{\partial\chi}{\partial\theta}, \quad F_2(\theta, w_i, w_j) = \frac{\partial\chi}{\partial w_j} / \frac{\partial\chi}{\partial\theta}. \tag{3.4}$$

Из аксиом аналитичности и невырожденности, очевидно, следуют аналитичность функций (3.4) в окрестности $U(i) \times U(j)$ и справедливость неравенств $F_1 \neq 0$, $F_2 \neq 0$. Тогда, учитывая (1.7), имеем разложения в ряд Тейлора [8]

$$\left\{\begin{array}{l} F_1 = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots, \\ F_2 = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta + 1/2D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j)\theta^2 + \cdots. \end{array}\right. \tag{3.5}$$

Далее разложения (1.6) и (3.5) подставим в тождества (3.1)–(3.3).

I. Разложения (1.6) и (3.5) подставляем в тождество (3.1), в котором аргумент θ имеет вид (0.1), затем сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j, а также перед отрицательными степенями $(x_i - x_j)^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Отметим, что отрицательные степени $(x_i - x_j)^{-n}$, входящие в тождество (3.1), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [9].

Сравнивая коэффициенты перед отрицательными степенями $(x_i - x_j)^{-n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, имеем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_i, w_i)\overline{F_1}(w_i, w_j) = 0, \quad D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_j, w_j)\overline{F_2}(w_i, w_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$,

$$\overline{F_1} = (D_{1,1,1}(f_1), D_{1,1,1,1}(f_1), \ldots), \quad \overline{F_2} = (D_{1,1,1}(f_2), D_{1,1,1,1}(f_2), \ldots).$$

Поэтому из леммы 3 следует $\overline{F_1} = \overline{F_2} = 0$. Значит,

$$F_1 = f_1(w_i, w_j) + D_1(f_1)(w_i, w_j)\theta + 1/2 D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j)\theta^2 \neq 0,$$

$$F_2 = f_2(w_i, w_j) + D_1(f_2)(w_i, w_j)\theta + 1/2 D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j)\theta^2 \neq 0,$$

следовательно,

$$\begin{cases} (f_1(w_i, w_j))^2 + (D_1(f_1)(w_i, w_j))^2 + (D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j))^2 \neq 0, \\ (f_2(w_i, w_j))^2 + (D_1(f_2)(w_i, w_j))^2 + (D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j))^2 \neq 0. \end{cases}$$

Далее сравниваем все коэффициенты со степенями выше 4 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, получаем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_i, w_i) f_1(w_i, w_j) = -2D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i, w_i),$$

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_j, w_j) f_2(w_i, w_j) = -2D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j, w_j),$$

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_i, w_i) D_1(f_1)(w_i, w_j) = 0, \quad D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_j, w_j) D_1(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_i, w_i) D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j) = 0, \quad D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_j, w_j) D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 3, 4, 5, \ldots$. Обозначим через $\widehat{X_4}$ последовательность коэффициентов в последней системе. Тогда ее можно переписать в виде

$$\widehat{X_4}(z_i, w_i) f_1(w_i, w_j) = -2D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_i, w_i), \quad \widehat{X_4}(z_j, w_j) f_2(w_i, w_j) = -2D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z_j, w_j),$$

$$\widehat{X_4}(z_i, w_i) D_1(f_1)(w_i, w_j) = 0, \quad \widehat{X_4}(z_j, w_j) D_1(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

$$\widehat{X_4}(z_i, w_i) D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j) = 0, \quad \widehat{X_4}(z_j, w_j) D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

причем $\alpha_n = 1, 2$, $n = 3, 4, 5, \ldots$.

Пусть сначала $\widehat{X_4} \neq 0$, тогда

$$D_1(f_1)(w_i, w_j) = D_1(f_2)(w_i, w_j) = D_{1,1}(f_1)(w_i, w_j) = D_{1,1}(f_2)(w_i, w_j) = 0,$$

а $f_1(w_i, w_j) = \psi(w_i) \neq 0$, $f_2(w_i, w_j) = \psi(w_j) \neq 0$. Значит, система (3.4) сводится к следующей:

$$\psi(w_i)\frac{\partial \chi}{\partial \theta} = \frac{\partial \chi}{\partial w_i}, \quad \psi(w_j)\frac{\partial \chi}{\partial \theta} = \frac{\partial \chi}{\partial w_j}.$$

Интегрируя, получаем функцию пары точек [10]

$$f(i, j) = \chi(\theta + K(w_i) + K(w_j)) = \chi\Big(\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + \overline{z}_i + \overline{z}_j\Big),$$

где $K(w) = \int \psi(w)dw$, $\overline{z} = z + K(w)$. Эта функция вырождена, т. е. не удовлетворяет аксиоме невырожденности (выпадает четвертая координата точки).

Пусть теперь $\widehat{X_4} = 0$, тогда

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_3)(z,w) = 0, \quad D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_1)(z,w) = 0, \quad D_{\beta_1,\beta_2,\ldots}(X_2)(z,w) = 0,$$

где $\alpha_n = 1, 2$, $n = 3, 4, 5, \ldots$, $\beta_m = 1, 2$, $m = 4, 5, 6, \ldots$.

Затем сравниваем все коэффициенты со степенями 4 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, получаем

$$D_{1,1}(X_4)(z_i,w_i)D_{1,1}(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_{1,1}(X_4)(z_j,w_j)D_{1,1}(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$D_{1,2}(X_4)(z_i,w_i)D_{1,1}(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_{1,2}(X_4)(z_j,w_j)D_{1,1}(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$D_{2,2}(X_4)(z_i,w_i)D_{1,1}(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_{2,2}(X_4)(z_j,w_j)D_{1,1}(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

причем $D_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(X_1)(z,w) = 0$, $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3$,

$$D_{1,1}(X_4)(z_i,w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_{1,1}(X_4)(z_j,w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$D_{1,2}(X_4)(z_i,w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_{1,2}(X_4)(z_j,w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$D_{2,2}(X_4)(z_i,w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_{2,2}(X_4)(z_j,w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$D_{1,1}(X_4)(z_i,w_i)f_1(w_i,w_j) = -2D_{1,1}(X_3)(z_i,w_i), \ D_{1,1}(X_4)(z_j,w_j)f_2(w_i,w_j) = -2D_{1,1}(X_3)(z_j,w_j),$$

$$D_{1,2}(X_4)(z_i,w_i)f_1(w_i,w_j) = -2D_{1,2}(X_3)(z_i,w_i), \ D_{1,2}(X_4)(z_j,w_j)f_2(w_i,w_j) = -2D_{1,2}(X_3)(z_j,w_j),$$

$$D_{2,2}(X_4)(z_i,w_i)f_1(w_i,w_j) = -2D_{2,2}(X_3)(z_i,w_i), \ D_{2,2}(X_4)(z_j,w_j)f_2(w_i,w_j) = -2D_{2,2}(X_3)(z_j,w_j),$$

а также $D_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3}(X_2)(z,w) = 0$, $\alpha_n = 1, 2$, $n = 1, 2, 3$. Если $(D_{1,1}(X_4))^2 + (D_{1,2}(X_4))^2 + (D_{2,2}(X_4))^2 \neq 0$, то, как и выше, получаем вырожденную функцию пары точек. Тогда имеем $D_{1,1}(X_4) = D_{1,2}(X_4) = D_{2,2}(X_4) = 0$ и $D_{1,1}(X_3) = D_{1,2}(X_3) = D_{2,2}(X_3) = 0$.

Сравниваем теперь все коэффициенты со степенями 3 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j:

$$D_1(X_4)(z_i,w_i)D_{1,1}(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_1(X_4)(z_j,w_j)D_{1,1}(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$D_2(X_4)(z_i,w_i)D_{1,1}(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_2(X_4)(z_j,w_j)D_{1,1}(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$D_1(X_4)(z_i,w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_1(X_4)(z_j,w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$D_2(X_4)(z_i,w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j) = 0, \quad D_2(X_4)(z_j,w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$D_1(X_4)(z_i,w_i)f_1(w_i,w_j) = p_1(z_i,w_i), \quad D_1(X_4)(z_j,w_j)f_2(w_i,w_j) = p_1(z_j,w_j),$$

$$D_2(X_4)(z_i,w_i)f_1(w_i,w_j) = p_2(z_i,w_i), \quad D_2(X_4)(z_j,w_j)f_2(w_i,w_j) = p_2(z_j,w_j).$$

Если $(D_1(X_4))^2 + (D_2(X_4))^2 \neq 0$, то, как и выше, получаем вырожденную функцию пары точек. Тогда $D_1(X_4) = D_2(X_4) = 0$. Из лемм 2 и 3 получаем $X_4(z,w) \neq 0$ и $(X_4(z,w))'_z \neq 0$.

Сравниваем теперь все коэффициенты со степенями 2 при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j:

$$X_4(z_i,w_i)D_{1,1}(f_1)(w_i,w_j) + X_4(z_j,w_j)D_{1,1}(f_2)(w_i,w_j) = 0,$$

$$X_4(z_i,w_i)D_1(f_1)(w_i,w_j) + X_4(z_j,w_j)D_1(f_2)(w_i,w_j) = 0.$$

В полученных равенствах, дифференцируя по переменным z_i и z_j, имеем $D_{1,1}(f_1)(w_i,w_j) = D_{1,1}(f_2)(w_i,w_j) = D_1(f_1)(w_i,w_j) = D_1(f_2)(w_i,w_j) = 0$. Поэтому $f_1(w_i,w_j) \neq 0$, $f_2(w_i,w_j) \neq 0$. Далее

$$2X_3(z_j,w_j) + 2X_3(z_i,w_i) + X_4(z_i,w_i)f_1(w_i,w_j) + X_4(z_j,w_j)f_2(w_i,w_j) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по z_i и w_j, а также по z_j и w_i, затем возвращаемся и разделяем переменные, получаем $f_1(w_i,w_j)=\varphi(w_i)$, $f_2(w_i,w_j)=\varphi(w_j)$. Найденное подставляем в формулы (3.5):

$$F_1=\varphi(w_i),\quad F_2=\varphi(w_j).$$

Затем идем в (3.4):

$$\varphi(w_i)=\frac{\partial\chi}{\partial w_i}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta},\quad \varphi(w_j)=\frac{\partial\chi}{\partial w_j}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta}.$$

Из полученных соотношений вытекает система дифференциальных уравнений

$$\varphi(w_i)\frac{\partial\chi}{\partial\theta}-\frac{\partial\chi}{\partial w_i}=0,\quad \varphi(w_j)\frac{\partial\chi}{\partial\theta}-\frac{\partial\chi}{\partial w_j}=0.$$

Полученная система имеет решение [10]

$$f=\overline{\psi}(\theta+\overline{w}_i+\overline{w}_j),\quad \overline{w}=\int\varphi(w)dw.$$

Учитывая явное выражение для θ, убеждаемся в вырожденности этой функции пары точек.

II. Разложения (1.6) и (3.5) подставляем в тождество (3.2), в котором аргумент θ имеет вид (0.2), затем сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j, а также перед степенями $\ln\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}$. Отметим, что степени $\ln\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}$, входящие в тождество (3.2), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [9].

Сравнивая коэффициенты перед степенями $\ln\dfrac{y_i-y_j}{x_i-x_j}$, имеем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_i,w_i)\overline{F_1}(w_i,w_j)=0,\quad D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(X_4)(z_j,w_j)\overline{F_2}(w_i,w_j)=0,$$

причем $\alpha_n=1,2$, $n=1,2,3,4,\ldots$,

$$\overline{F_1}=(D_1(f_1),D_{1,1}(f_1),D_{1,1,1}(f_1),\ldots),\quad \overline{F_2}=(D_1(f_2),D_{1,1}(f_2),D_{1,1,1}(f_2),\ldots).$$

Поэтому из леммы 3 следует $\overline{F_1}=\overline{F_2}=0$. Значит $F_1=f_1(w_i,w_j)\neq 0$, $\quad F_2=f_2(w_i,w_j)\neq 0$.

Сравниваем коэффициенты со степенями 3 и выше при произведениях переменных x_i, y_i, x_j, y_j, получаем

$$D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}X_4(z_i,w_i)f_1(w_i,w_j)=\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(z_i,w_i),\quad D_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}X_4(z_j,w_j)f_2(w_i,w_j)=\varphi_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots}(z_j,w_j),$$

причем $\alpha_n=1,2$, $n=1,2,3,\ldots$. Воспользовавшись леммой 3, имеем $f_1(w_i,w_j)=\phi(w_i)$, $f_2(w_i,w_j)=\phi(w_j)$. Найденное подставляем в формулы (3.5): $F_1=\phi(w_i)$, $\quad F_2=\phi(w_j)$. Затем идем в (3.4):

$$\phi(w_i)=\frac{\partial\chi}{\partial w_i}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta},\quad \phi(w_j)=\frac{\partial\chi}{\partial w_j}/\frac{\partial\chi}{\partial\theta}.$$

Из полученных соотношений вытекает система дифференциальных уравнений

$$\phi(w_i)\frac{\partial\chi}{\partial\theta}-\frac{\partial\chi}{\partial w_i}=0,\quad \phi(w_j)\frac{\partial\chi}{\partial\theta}-\frac{\partial\chi}{\partial w_j}=0.$$

Полученная система имеет решение [10]

$$f=\overline{\psi}(\theta+\overline{w}_i+\overline{w}_j),\quad \overline{w}=\int\phi(w)dw.$$

Учитывая явное выражение для θ, убеждаемся в вырожденности этой функции пары точек.

III. Разложения (1.6) и (3.5) подставляем в тождество (3.3), в котором аргумент θ имеет вид (0.3), затем сравниваем коэффициенты слева и справа перед одинаковыми степенями произведений переменных x_i, y_i, x_j, y_j, а также перед степенями $\operatorname{arctg}\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$. Отметим, что степени $\operatorname{arctg}\dfrac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$, входящие в тождество (3.3), в окрестности нуля в ряд Тейлора не разлагаются, поэтому коэффициенты перед ними обращаются в нуль. Эта задача существенно упрощается с применением математического пакета программ MAPLE 15 [9]. Далее, рассуждая как в случае II, приходим к вырожденной функции пары точек.

Теорема полностью доказана.

Заключение

Итак, поставленная выше задача об аналитическом вложении трехмерных симплициальных геометрий с функциями пары точек (0.1)–(0.3) полностью решена. В результате получены четырехмерные геометрии с вырожденными функциями пары точек, которые не являются геометриями максимальной подвижности.

Выражаю благодарность профессору Геннадию Григорьевичу Михайличенко за поддержку и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лев В.Х.** Трехмерные геометрии в теории физических структур // Вычисл. системы. 1988. № 125. С. 90–103.
2. **Кыров В.А., Богданова Р.А.** Группы движений некоторых трехмерных геометрий максимальной подвижности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 412–421. doi: 10.17377/smzh.2018.59.215 .
3. **Mikhailichenko G.G.** The mathematical basics and results of the theory of physical structures / Gorno-Altaisk State University. Gorno-Altaisk, 2012. 140 p. (Available at: https://arxiv.org/pdf/1602.02795 .)
4. **Кыров В.А., Михайличенко Г.Г.** Аналитический метод вложения симплектической геометрии // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 657–672. doi: 10.17377/semi.2017.14.057 .
5. **Кыров В.А.** Аналитический метод вложения многомерных псевдоевклидовых геометрий // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 741–758. doi: 10.17377/semi.2018.15.060 .
6. **Кыров В.А.** Вложение многомерных особых расширений псевдоевклидовых геометрий // Челяб. физ.-мат. журн. 2018. Т 4, № 3. С. 408-420. doi: 10.24411/2500-0101-2018-13403 .
7. **Овсянников Л.В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 400 с.
8. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматгис, 1963. 540 с.
9. **Дьяконов В.** Maple 10/11/12/13/14 в математических вычислениях. М.: ДМС, 2014. 603 с.
10. **Эльсгольц Л.Е.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

Поступила 11.01.2019
После доработки 21.03.2019
Принята к публикации 25.03.2019

Кыров Владимир Александрович
канд. физ.-мат. наук, доцент
кафедра математики, физики и информатики
Горно-Алтайский государственный университет
г. Горно-Алтайск
e-mail: kyrovVA@yandex.ru

REFERENCES

1. Lev V.C. Three-dimensional geometry in the theory of physical structures. *Computational systems*, 1988, no. 125, pp. 90–103 (in Russian).
2. Kyrov V.A., Bogdanova R.A. The groups of motions of three-dimensional maximal mobility geometries. *Sib. Math. J.*, 2018, vol. 59, no. 2, pp. 323–331. https://doi.org/10.1134/S0037446618020155 .
3. Mikhailichenko G.G. The mathematical basics and results of the theory of physical structures. Gorno-Altaisk: Gorno-Altaisk State University Publ., 2012, 140 p. ISBN: 978-5-91425-079-6 . (Available at: https://arxiv.org/pdf/1602.02795 .)
4. Kyrov V.A., Mikhailichenko G.G. Analytical method of embedding symplectic geometry. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2017, vol. 14, pp. 657–672 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2017.14.057 .
5. Kyrov V.A. The analytical method for embedding multidimensional pseudo-Euclidean geometries. *Sib. Electron. Math. Reports*, 2018, vol. 15, pp. 741–758 (in Russian). doi: 10.17377/semi.2018.15.060 .
6. Kyrov V.A. Embedding of multidimensional singular extensions of pseudo-Euclidean geometries. *Chelyab. Phys.-Math. J.*, 2018, vol. 4, no 3, pp. 408–420 (in Russian). doi: 10.24411/2500-0101-2018-13403 .
7. Ovsyannikov L.V. *Group analysis of differential equations.* N Y: Acad. Press, 1982, 416 p. ISBN: 0125316801 . Original Russian text published in Ovsyannikov L.V. *Gruppovoi analiz differentsial'nykh uravnenii.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 400 p.
8. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya. T.* 2 [A course of differential and integral calculus. Vol. 2]. Moscow: Fizmatgis Publ., 1963, 540 p.
9. Dyakonov V. *Maple* 10/11/12/13/14 v matematicheskikh vychisleniyakh [Maple 10/11/12/13/14 in mathematical calculations]. Moscow: DMS Publ., 2014, 603 p. ISBN: 978-5940747512 .
10. Ehl'sgol'ts L.E. *Differential equations and the calculus of variations.* Moscow: Mir Publ., 1970, 440 p. ISBN: 978-1410210678 . Original Russian text published in El'sgol'ts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie.* Moscow: Nauka Publ., 1969, 424 p.

Received January 11, 2019
Revised March 21, 2019
Accepted March 25, 2019

Vladimir Aleksandrovich Kyrov, Cand. Phys.-Math. Sci., Gorno-Altaisk State University, Gorno-Altaisk, 649000 Russia, e-mail: kyrovVA@yandex.ru .

Cite this article as: V. A. Kyrov. Analytic embedding of three-dimensional simplicial geometries, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 125–136 .