ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 1 2019

УДК 512.542

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ПОЛУНОРМАЛЬНЫМИ ИЛИ СУБНОРМАЛЬНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА НЕКОТОРОЙ ЕЕ МАКСИМАЛЬНОЙ ПОДГРУППЫ

Е. В. Зубей

Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Группа с нильпотентной максимальной подгруппой, как известно, является разрешимой, если коммутант силовской 2-подгруппы из максимальной подгруппы содержится в центре силовской 2-подгруппы. Если максимальная подгруппа группы ненильпотентна, то в ней существует подгруппа Шмидта. От свойств подгрупп Шмидта из максимальной подгруппы зависит строение самой группы, в частности то, является ли она разрешимой. В данной работе устанавливается разрешимость конечной группы при условии, что некоторые подгруппы Шмидта из максимальной подгруппы группы полунормальны или субнормальны в группе.

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, подгруппа Шмидта, субнормальная подгруппа, полунормальная подгруппа, максимальная подгруппа.

E. V. Zubei. On the solvability of a finite group with seminormal or subnormal Schmidt subgroups of one of its maximal subgroups.

A Schmidt group is a finite non-nilpotent group all of whose proper subgroups are nilpotent. A group with a nilpotent maximal subgroup is known to be solvable if the derived subgroup of a Sylow 2-subgroup of a maximal subgroup is contained in the center of the Sylow 2-subgroup. If a maximal subgroup of a group is non-nilpotent, then it has a Schmidt subgroup. The structure of a group and, in particular, its solvability, depend on the properties of Schmidt subgroups of its maximal subgroup. In this paper, we establish the solvability of a finite group such that some Schmidt subgroups of its maximal subgroup are seminormal or subnormal in the group.

Keywords: finite group, solvable group, Schmidt subgroup, subnormal subgroup, seminormal subgroup, maximal subgroup.

MSC: MSC20D10, MSC20D20, MSC20D35, MSC20E28

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-55-61

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения стандартны, их можно найти в [1; 2].

Группа G с нильпотентной максимальной подгруппой M, как известно, является разрешимой, если коммутант силовской 2-подгруппы P из M содержится в центре подгруппы P [2, IV.7.4]. В частности, группа с нильпотентной максимальной подгруппой нечетного порядка разрешима [3]. Эти теоремы нашли отклик во многих работах (см., например, [4–8]).

Если максимальная подгруппа M группы G ненильпотентна, то в M существует подгруппа Шмидта (ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны). От свойств подгрупп Шмидта из M зависит строение группы G, в частности то, является ли группа G разрешимой.

Напомним, что подгруппа A группы G называется *полунормальной* в G, если существует подгруппа B в G такая, что $G = AB$ и AX — собственная в G подгруппа для каждой собственной подгруппы X из B. В этой ситуации подгруппу B называют *супердобавлением* к подгруппе A в G. Группы с некоторыми полунормальными подгруппами исследовались в работах многих авторов (см., например, литературу в [9; 10]). Группы с полунормальными подгруппами Шмидта изучены В. С. Монаховым и В. Н. Княгиной [11]. Рассматривались также группы, в которых некоторые их силовские или максимальные подгруппы перестановочны с некоторыми подгруппами Шмидта [12–15]. Группы с субнормальными подгруппами Шмидта исследовались в [16–18].

В настоящей работе устанавливается разрешимость группы G при условии, что некоторые подгруппы Шмидта из максимальной подгруппы M группы G полунормальны или субнормальны в G. А именно доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть M — максимальная подгруппа конечной группы G и P — силовская 2-подгруппа из M. Предположим, что $P' \leq Z(P)$ и M A_4-свободна. Если каждая подгруппа Шмидта из M полунормальна или субнормальна в G, то группа G разрешима.*

Теорема 2. *Пусть M — максимальная подгруппа нечетного индекса конечной группы G и P — силовская 2-подгруппа из M. Предположим, что подгруппа M A_4-свободна и каждая подгруппа Шмидта четного порядка из M полунормальна или субнормальна в G. Если $P' \leq Z(P)$ или $N_G(V) \leq M$ для каждой 2-подгруппы V из M, ненормальной в G, то G разрешима.*

1. Используемые обозначения и результаты

Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется *группой Шмидта*. Эти группы впервые рассматривались О. Ю. Шмидтом [19], который доказал их бипримарность, нормальность в них одной силовской подгруппы и цикличность другой. В работе [20] приведен обзор результатов о существовании подгрупп Шмидта в конечных группах и их некоторых приложениях в теории классов. Следуя [12; 15], условимся называть *$S_{\langle p,q\rangle}$-группой* группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и циклической силовской q-подгруппой. Подгруппа, являющаяся $S_{\langle p,q\rangle}$-группой, называется *$S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппой.*

Напомним, что $A^G = \langle A^g \mid g \in G\rangle$ — подгруппа, порожденная всеми сопряженными с A подгруппами группы G. Запись $N \lhd G$ означает, что N — нормальная подгруппа группы G. Через G', $Z(G)$ обозначаются коммутант и центр группы G соответственно. Нормализатор подгруппы A в группе G обозначается как $N_G(A)$. Полупрямое произведение нормальной в G подгруппы A и подгруппы B записывается так: $G = [A]B$. Группа называется *A_4-свободной*, если в ней нет секций, изоморфных A_4 — знакопеременной группе степени 4.

Лемма 1. (1) *Каждая не p-нильпотентная группа G содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$* [2, IV.5.4].

(2) *Каждая не 2-замкнутая группа G содержит $S_{\langle q,2\rangle}$-подгруппу для некоторого $q \in \pi(G)$* [21, с. 34; 22, следствие 3.1.1].

Лемма 2 [2, теорема IV.7.4]. *Пусть H — максимальная подгруппа группы G и P силовская 2-подгруппа из H. Если H нильпотентна и $P' \leq Z(P)$, то группа G разрешима.*

Лемма 3 [5]. *Пусть P — силовская 2-подгруппа группы G. Если $P' \leq Z(P)$ и подгруппа P является прямым множителем некоторой максимальной подгруппы группы G, то группа G разрешима.*

Напомним, что подгруппа U называется *субнормальной подгруппой* группы G, если существуют подгруппы U_0, U_1, $\cdots$, U_s такие, что $U = U_0 \lhd U_1 \lhd \cdots \lhd U_{s-1} \lhd U_s = G$.

Лемма 4. *Пусть U — субнормальная подгруппа группы G. Тогда*

(1) *если $V \leq G$, то $V \cap U$ субнормальна в V* [1, лемма 2.41];

(2) *если $N \lhd G$, то подгруппа UN/N субнормальна в G* [1, лемма 2.41];

(3) *если $\{U_i \mid i \in I\}$ — некоторое множество субнормальных подгрупп группы G, то подгруппа $U = \langle U_i \mid i \in I\rangle$ субнормальна в G* [1, теорема 2.43].

Лемма 5. *Если S — субнормальная $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа группы G, то подгруппа S^G является p-замкнутой $\{p,q\}$-подгруппой.*

Доказательство. Пусть $\pi = \{p,q\}$. По [23, следствие 7.7.2(1)] $S \le O_\pi(G)$. Поэтому S^G является $\{p,q\}$-подгруппой. Так как S — q-нильпотентная подгруппа, то по [23, следствие 7.7.2(3)] $S \le F_q(G)$. Следовательно, $S^G \le F_q(G)$. Теперь $S^G \le O_\pi(G) \cap F_q(G)$. Поэтому S^G является p-замкнутой $\{p,q\}$-подгруппой.

Здесь $O_\pi(G)$ — наибольшая нормальная в G π-подгруппа, а $F_q(G)$ — наибольшая нормальная в G q-нильпотентная подгруппа.

Лемма доказана.

Лемма 6. *Если в группе G каждая 2-нильпотентная подгруппа Шмидта четного порядка полунормальна или субнормальна, то G разрешима.*

Доказательство. Если в группе G нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то G 2-замкнута по п. (2) леммы 1, а значит и разрешима. Пусть A — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта. Если A полунормальна в G, то A^G разрешима [11, теорема 1]. Если A субнормальна в G, то A^G разрешима по лемме 5.

Пусть $B = \langle A^G \mid A$ — 2-нильпотентная подгруппа Шмидта$\rangle$. Тогда B разрешима и нормальна в G. Если в фактор-группе G/B нет 2-нильпотентных подгрупп Шмидта четного порядка, то G/B 2-замкнута по п. (2) леммы 1 и группа G разрешима.

Пусть K/B — $S_{\langle r,2\rangle}$-подгруппа в G/B для некоторого простого r и L — минимальное добавление к подгруппе B в K. По [11, лемма 1] подгруппа L содержит $S_{\langle r,2\rangle}$-подгруппу A такую, что $A^L = L$. Так как $K = LB = A^L B \le A^G B \le B$, то получили противоречие.

Лемма доказана.

2. Признаки разрешимости группы с ограничением на некоторые подгруппы Шмидта

Теорема 1. *Пусть M — максимальная подгруппа конечной группы G и P — силовская 2-подгруппа из M. Предположим, что $P' \le Z(P)$ и M A_4-свободна. Если каждая подгруппа Шмидта из M полунормальна или субнормальна в G, то группа G разрешима.*

Доказательство. Если в M нет подгрупп Шмидта, то M нильпотентна и G разрешима по лемме 2. Поэтому M ненильпотентна и в ней есть подгруппы Шмидта. Пусть A — подгруппа Шмидта из M. Предположим, что A^G неразрешима. Тогда по лемме 5 подгруппа A не субнормальна в G. По условию подгруппа A полунормальна в G. Тогда по [11, теорема 1] A является 2-замкнутой $\{2,3\}$-подгруппой Шмидта. По свойствам групп Шмидта [22, теорема 1.22] $A/Z(A) \simeq A_4$ и подгруппа M не A_4-свободна; противоречие. Поэтому предположение неверно и A^G разрешима. Так как A — произвольная подгруппа Шмидта из M, то подгруппа $B = \langle A^G \mid A$ — подгруппа Шмидта из $M\rangle$ нормальна в G и разрешима.

Предположим, что MB/B ненильпотентна. Так как $MB/B \simeq M/M \cap B$, то $M/M \cap B$ ненильпотентна. Пусть $S/M \cap B$ — подгруппа Шмидта из $M/M \cap B$ и L — минимальное добавление к подгруппе $M \cap B$ в S. По [11, лемма 1] подгруппа L содержит подгруппу Шмидта $[R]Q$ такую, что Q не содержится в $M \cap B$. Так как $[R]Q \le L \le S \le M$, то $[R]Q \le B$ по построению подгруппы B. Следовательно, $[R]Q \le M \cap B$, $Q \le B$; противоречие. Поэтому допущение неверно и MB/B нильпотентна.

Поскольку M — максимальная в G подгруппа, то либо $MB/B = G/B$, либо $B \le M$ и M/B — максимальная подгруппа группы G/B. Если $MB/B = G/B$, то G/B нильпотентна, а поскольку B разрешима, то G разрешима.

Пусть $B \leq M$ и M/B — максимальная подгруппа группы G/B. Так как PB/B — силовская 2-подгруппа в M/B и

$$(PB/B)' = P'B/B \leq Z(P)B/B \leq Z(PB/B),$$

то G/B разрешима по лемме 2. Поэтому G разрешима.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть M — максимальная подгруппа группы G и порядок M нечетен. Если каждая подгруппа Шмидта из M полунормальна или субнормальна в G, то G разрешима.*

П р и м е р 1. Условие “максимальная подгруппа A_4-свободна” в теореме 1 не является лишним. Примером служит группа $G = PSL(2,5)$. В этой группе подгруппа Шмидта S, изоморфная группе A_4, имеет индекс 5. Поэтому она является максимальной и полунормальной. В подгруппе S силовская 2-подгруппа P абелева, поэтому $P' \leq Z(P)$.

П р и м е р 2. Условие “$P' \leq Z(P)$” не является лишним. Примером служит группа $G = PSL(2,17)$. В этой группе силовская 2-подгруппа P, изоморфная диэдральной подгруппе порядка 16, является максимальной и A_4-свободной. Но $P' \leq Z(P)$.

Теорема 2. *Пусть M — максимальная подгруппа нечетного индекса конечной группы G и P — силовская 2-подгруппа из M. Предположим, что подгруппа M A_4-свободна и каждая подгруппа Шмидта четного порядка из M полунормальна или субнормальна в G. Если $P' \leq Z(P)$ или $N_G(V) \leq M$ для каждой 2-подгруппы V из M, ненормальной в G, то G разрешима.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся индукцией по порядку группы G. Если в M нет подгрупп Шмидта четного порядка, то M 2-разложима по лемме 1. Если $P' \leq Z(P)$, то по лемме 3 группа G разрешима; если $N_G(V) \leq M$ для каждой 2-подгруппы V из M, ненормальной в G, то G разрешима [7, теорема 1]. Следовательно, в M существуют подгруппы Шмидта четного порядка.

Пусть A — подгруппа Шмидта четного порядка из M. Предположим, что A^G неразрешима. Тогда по лемме 5 подгруппа A не субнормальна в G. По условию подгруппа A полунормальна в G. Тогда по [11, теорема 1] A является 2-замкнутой $\{2,3\}$-подгруппой Шмидта. По свойствам групп Шмидта [22, теорема 1.22] $A/Z(A) \simeq A_4$ и подгруппа M не A_4-свободна; противоречие. Поэтому предположение неверно и A^G разрешима.

Предположим, что $A^G \leq M$ для некоторой подгруппы Шмидта A четного порядка из M. Тогда фактор-группа G/A^G содержит максимальную подгруппу M/A^G и индекс M/A^G в группе G/A^G нечетен. Ясно, что подгруппа M/A^G A_4-свободна. Пусть T/A^G — подгруппа Шмидта четного порядка из M/A^G и L — минимальное добавление к A^G в T, т. е. $T = LA^G$. По [11, лемма 1] подгруппа L содержит подгруппу Шмидта $[R]Q$ четного порядка такую, что Q не содержится в A^G и $L = ([R]Q)^L = Q^L$. Так как

$$[R]Q \leq L \leq T \leq M,$$

то $[R]Q$ полунормальна или субнормальна в G по условию теоремы. Если подгруппа $[R]Q$ полунормальна в G, то по [11, лемма 5] подгруппа L полунормальна в G и по [11, лемма 2] подгруппа $LA^G/A^G = T/A^G$ полунормальна в G/A^G. Если подгруппа $[R]Q$ субнормальна в G, то по п. (3) леммы 4 L субнормальна в G и по п. (2) леммы 4 подгруппа $LA^G/A^G = T/A^G$ субнормальна в G/A^G.

Так как P — силовская 2-подгруппа из M, то подгруппа PA^G/A^G является силовской 2-подгруппой в M/A^G. Если $P' \leq Z(P)$, то

$$(PA^G/A^G)' = P'A^G/A^G \leq Z(P)A^G/A^G \leq Z(PA^G/A^G).$$

Пусть $N_G(V) \leq M$ для каждой 2-подгруппы V из M, ненормальной в G, и U/A^G — 2-подгруппа в M/A^G, ненормальная в G/A^G. Тогда $U = U_2A^G$, где U_2 — силовская 2-подгруппа в U. Рассмотрим элемент $xA^G \in N_{G/A^G}(U/A^G)$. Так как $(U/A^G)^{xA^G} = U/A^G$, то $U = U^x$. По теореме Силова $U_2^x = U_2^u$ для $u \in U$. Получаем, что

$$U^x = U_2^x A^G = U_2^u A^G = U.$$

Итак,

$$N_{G/A^G}(U/A^G) = N_G(U)A^G/A^G \leq M/A^G.$$

Таким образом, для фактор-группы G/A^G и ее максимальной подгруппы M/A^G все условия доказываемой теоремы выполняются. Так как $A^G \neq 1$, то по индукции фактор-группа G/A^G разрешима, поэтому G разрешима.

Наконец, рассмотрим случай, когда $A^G \nleq M$ для каждой подгруппы Шмидта A четного порядка из M. Ясно, что $MA^G = G$. Из [11, лемма 2] и леммы 4 следует, что каждая подгруппа Шмидта четного порядка из M полунормальна или субнормальна в M. По лемме 6 подгруппа M разрешима, поэтому группа G разрешима.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Монахов В.С.** Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйшая школа, 2006. 207 с.
2. **Huppert B.** Endliche gruppen I. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967. 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
3. **Thompson J.** Finite groups with fixed point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Sci., U.S.A. 1959. Vol. 45, no. 4. P. 578–581. doi: 10.1073/pnas.45.4.578 .
4. **Thompson J.** A special class of non-solvable groups // Math. Z. 1960. Vol. 72. P. 458–462. doi: 10.1007/BF01162968 .
5. **Белоногов В.А.** Один признак разрешимости групп четного порядка // Сиб. мат. журн. 1966. Т. 7, № 2. С. 458–459.
6. **Монахов В.С.** Некоторые признаки разрешимости групп // Докл. АН БССР. 1970. Т. 14, № 11. С. 986–988.
7. **Монахов В.С.** О влиянии свойств максимальных подгрупп на строение конечной группы // Мат. заметки. 1972. Т. 11, № 2. С. 183–190.
8. **Baumann B.** Endliche nichtauflösbare gruppen mit einer nilpotenten maximal untergruppen // J. Algebra. 1976. Vol. 38. P. 119–135. doi: 10.1016/0021-8693(76)90249-0 .
9. **Монахов В.С.** Конечные группы с полунормальной холловой подгруппой // Мат. заметки. 2006. Т. 80, № 4. С. 573–581.
10. **Guo W.** Finite groups with seminormal Sylow subgroups // Acta Mathematica Sinica. 2008. Vol. 24, no. 10. P. 1751–1758. doi: 10.1007/s10114-008-6563-z .
11. **Княгина В.Н., Монахов В.С.** Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 4. С. 448–458.
12. **Княгина В.Н.** О перестановочности n-максимальных подгрупп с p-нильпотентными подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики НАН РБ. 2016. Т. 24, № 1. С. 34–37.
13. **Беркович Я. Г., Пальчик Э. М.** О перестановочности подгрупп конечной группы // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 4. С. 741–753.
14. **Княгина В. Н., Монахов В. С.** О перестановочности силовских подгрупп с подгруппами Шмидта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 130–139.
15. **Зубей Е.В., Княгина В.Н., Монахов В.С.** О разрешимости конечной группы с S-полунормальными подгруппами Шмидта // Укр. мат. журн. 2018. Т. 70, № 11. С. 1511–1518.
16. **Княгина В.Н., Монахов В.С.** О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.
17. **Ведерников В.А.** Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.
18. **Al-Sharo Kh. A., Skiba A.N.** On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Commun. Algebra. 2017. Vol. 45, no. 10. P. 4158–4165. doi: 10.1080/00927872.2016.1236938 .
19. **Шмидт О.Ю.** Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.

20. **Монахов В.С.** Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Тр. Укр. мат. конгресса (2001) / Ин-т математики НАНУ. Киев, 2002. Сек. № 1. С. 81–90.
21. **Беркович Я.Г.** Теорема о ненильпотентных разрешимых подгруппах конечной группы // Конечные группы / ред. Я. Г. Беркович. Минск: Наука и техника, 1966. С. 24–39. ISBN: 978-5-458-54866-3 .
22. **Монахов В.С.** О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. 1998. Вып. 13. С. 153–171.
23. **Шеметков Л.А.** Формации конечных групп. Минск: Наука, 1978. 271 с.

Поступила 12.12.2018
После доработки 30.01.2019
Принята к публикации 4.02.2019

Зубей Екатерина Владимировна
аспирант
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
г. Гомель
e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru

REFERENCES

1. Monakhov V.S. *Vvedenie v teoriyu konechnykh grupp i ikh klassov* [Introduction to the theory of finite groups and their classes]. Minsk: Vysheishaya Shkola Publ., 2006, 207 p. ISBN: 985-06-1114-6 .
2. Huppert B. *Endliche Gruppen I.* Berlin; Heidelberg; N Y: Springer, 1967, 796 p. doi: 10.1007/978-3-642-64981-3 .
3. Thompson J. Finite groups with fixed point-free automorphisms of prime order. *Proc. Nat. Sci., U.S.A.*, 1959, vol. 45, no. 4, pp. 578–581. doi: 10.1073/pnas.45.4.578 .
4. Thompson J. A special class of non-solvable groups. *Math. Z.*, 1960, vol. 72, pp. 458–462. doi: 10.1007/BF01162968 .
5. Belonogov V.A. Solvability criterion for groups of even order. *Sib. Math. J.*, 1966, vol. 7, no. 2, pp. 458–459 (in Russian).
6. Monakhov V.S. Some solvability criteria of groups. *DAN BSSR*, 1970, vol. 14, no. 11, pp. 986–988 (in Russian).
7. Monakhov V.S. Influence of properties of maximal subgroups on the structure of a finite group. *Math. Notes*, 1972, vol. 11, no. 2, pp. 115–118. doi: 10.1007/BF01097928 .
8. Baumann B. Endliche nichtauflösbare gruppen mit einer nilpotenten maximal untergruppen. *J. Algebra*, 1976, vol. 38, pp. 119–135. doi: 10.1016/0021-8693(76)90249-0 .
9. Monakhov V.S. Finite groups with a seminormal Hall subgroup. *Math. Notes*, 2006, vol. 80, no. 4, pp. 542–549. doi: 10.4213/mzm2850 .
10. Guo W. Finite groups with seminormal Sylow subgroups. *Acta Mathematica Sinica*, 2008, vol. 24, no. 10, pp. 1751–1758. doi: 10.1007/s10114-008-6563-z .
11. Knyagina V.N., Monakhov V.S. Finite groups with seminormal Schmidt subgroups. *Algebra and Logic*, 2007, vol. 46, no. 4, pp. 244–249. doi: 10.1007/s10469-007-0023-1 .
12. Knyagina V.N. On permutability of n-maximal subgroups with p-nilpotent Schmidt subgroups. *Trudy Instituta Matematiki NAN Respubliki Belarus*, 2016, vol. 24, no. 1, pp. 34–37 (in Russian).
13. Berkovich Ya.G., Pal'chik, E.M. On the commutability of subgroups of a finite group. *Sib. Math. J.*, 1967, vol. 8, no. 4, pp. 560–568. doi: 10.1007/BF02196475 .
14. Knyagina V.N., Monakhov V.S. On the permutability of Sylow subgroups with Schmidt subgroups. *Proc. Steklov Institute Math.*, 2011, vol. 272, suppl. 1, pp. 55–64. doi: 10.1134/S0081543811020052 .
15. Zubei E.V., Knyagina V.N., Monakhov V.S. On the solvability of a finite group with S-seminormal Schmidt subgroups. *Ukr. Mat. Zhurn.*, 2018, vol. 70, no. 11, pp. 1511–1518 (in Russian).
16. Knyagina V.N., Monakhov V.S. Finite groups with subnormal schmidt subgroups. *Siberian Math. J.*, 2004, vol. 45, no. 6, pp. 1075–1079. doi: 10.1023/B:SIMJ.0000048922.59466.20 .
17. Vedernikov V.A. Finite groups with subnormal Schmidt subgroups. *Algebra and Logic*, 2007, vol. 46, no. 6, pp. 363–372. doi: 10.1007/S10469-007-0036-9 .

18. Al-Sharo Kh. A., Skiba A.N. On finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups. *Commun. Algebra*, 2017, vol. 45, no. 10, pp. 4158–4165. doi: 10.1080/00927872.2016.1236938 .
19. Schmidt O. Groups, all subgroups of which are special. *Mat. Sb.*, 1924, vol. 31, no. 3–4, pp. 366–372 (in Russian).
20. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups, their existence and some applications. *Proc. Ukr. Math. Congr., 2001*, Kiev, 2002, sec. 1, pp. 81–90 (in Russian).
21. Berkovich Ya.G. A theorem on non-nilpotent solvable subgroups of a finite group. In: *Finite groups*, Berkovich Ya.G. (ed.), Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1966, pp. 24–39 (in Russian). ISBN: 978-5-458-54866-3 .
22. Monakhov V.S. The Schmidt subgroups of finite groups. *Voprosy Algebry*, 1998, no. 13, pp. 153–171 (in Russian).
23. Shemetkov L.A. *Formatsii konechnykh grupp* [Formations of finite groups]. Minsk: Nauka Publ., 1978, 271 p.

Received December 12, 2018
Revised January 30, 2019
Accepted February 4, 2019

Ekaterina Vladimirovna Zubei, doctoral student, Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, 246019, Republic of Belarus, e-mail: ekaterina.zubey@yandex.ru .