ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 1 2019

УДК 517.95

УПРАВЛЯЕМЫЕ ВОЛЬТЕРРОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. И. Сумин

Ранее автором была предложена довольно общая форма описания *управляемых начально-краевых задач* (УНКЗ) с помощью вольтерровых функциональных уравнений вида

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \equiv \mathrm{col}\{t^1, \dots, t^n\} \in \Pi \subset \mathbb{R}^n, \quad z \in L_p^m(\Pi),$$

где Π — заданное ограниченное множество, $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$; $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ — управление; $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^l(\Pi)$ — линейный оператор, вольтерров на некоторой системе T подмножеств Π в том смысле, что для любого $H \in T$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$; $p, q, k \in [1, +\infty]$. Это определение вольтерровости — многомерное обобщение известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра. К подобным уравнениям обращением главной части приводятся самые различные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с разного рода запаздываниями и др.). Такое описание УНКЗ адекватно многим проблемам теории оптимального управления распределенными системами. В частности, автором была предложена опирающаяся на это описание схема получения достаточных условий устойчивости (при возмущении управления) существования глобальных решений УНКЗ. Схема использует продолжение локальных решений функционального уравнения (т. е. решений на множествах $H \in T$) вдоль упорядоченной по вложению конечной цепочки множеств $\{H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_{k-1} \subset H_k \equiv \Pi\}$ системы T. При этом используется опирающаяся на принцип сжимающих отображений специальная теорема существования локальных решений. В случае $p = q = k = \infty$ при естественных предположениях возможность применения этого принципа обеспечивается тем, что оператор правой части $\Phi_v[z(.)](t) \equiv f(t, A[z](t), v(t))$ удовлетворяет операторному условию Липшица с квазинильпотентным "оператором Липшица". Это позволяет, пользуясь хорошо известными результатами функционального анализа, ввести в пространстве $L_\infty^m(H)$ такую эквивалентную обычной норму, в которой оператор правой части будет сжимающим. В общем случае $1 \le p, q, k \le \infty$, охватывающем существенно более широкий круг УНКЗ, оператор правой части подобному операторному условию Липшица, вообще говоря, не удовлетворяет. В этом случае введение требуемой для применения принципа сжимающих отображений эквивалентной нормы пространства $L_p^m(H)$ обеспечивает доказываемая в статье *теорема об эквивалентной норме*. Теорема опирается на понятие *суперравностепенной квазинильпотентности* семейства линейных операторов, действующих в банаховом пространстве. Доказывается конструктивный общий признак суперравностепенной квазинильпотентности семейства операторов, действующих в банаховом идеальном пространстве измеримых функций. Получены удобные для приложений достаточные условия суперравностепенной квазинильпотентности в случае лебеговых пространств.

Ключевые слова: управляемое вольтеррово функциональное уравнение, принцип сжимающих отображений, суперравностепенно квазинильпотентное семейство операторов, теорема об эквивалентной норме.

V. I. Sumin. Controlled Volterra functional equations and the contraction mapping principle.

Earlier the author proposed a rather general form of describing *controlled initial–boundary value problems* (CIBVPs) by means of Volterra functional equations

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \equiv \mathrm{col}\{t^1, \dots, t^n\} \in \Pi \subset \mathbb{R}^n, \quad z \in L_p^m(\Pi),$$

where Π is a given bounded set, $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$, $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ is a control, and $A : L_p^m(\Pi) \to L_q^l(\Pi)$ is a linear operator with the Volterra property on some system T of subsets of Π in the sense that for any $H \in T$ the restriction $A[z]|_H$ does not depend on the values of $z|_{\Pi \setminus H}$; here $p, q, k \in [1, +\infty]$. This definition of the Volterra property is a multidimensional generalization of Tikhonov's known definition of a functional operator of Volterra type. Various CIBVPs for nonlinear evolution equations (parabolic, hyperbolic, integrodifferential, with delays, and others) are reduced by the inversion of the principal part to such functional equations. This description of CIBVPs is adequate for many problems of the theory of optimal control of distributed parameter systems. In particular, based on this description, the author found a scheme for deriving sufficient conditions for the stability (under a perturbation of the control) of the existence of global solutions to CIBVPs. The scheme employs the extension of local solutions (i.e., solutions on sets $H \in T$) of a functional equation along a finite chain of sets from the family T ordered by inclusion. This process is realized with the use of a special theorem of the existence of local solutions based on the contraction mapping principle. In the case $p = q = k = \infty$, under natural assumptions, the possibility of applying this principle is provided by the fact that the right-hand side operator $\Phi_v[z(.)](t) \equiv f(t, A[z](t), v(t))$ satisfies the operator Lipschitz condition with a quasinilpotent "Lipschitz operator." This allows to introduce, using well-known results from functional analysis, a norm in the space $L_\infty^m(H)$ equivalent to the usual norm in which the right-hand side operator is contractive. In the general case $1 \le p, q, k \le \infty$, which covers a much wider class of CIBVPs, the right-hand side operator may not satisfy such operator Lipschitz condition. In this case, the introduction of an equivalent norm of the space $L_p^m(H)$ required for the application of the contraction mapping principle is provided by the *theorem on an equivalent norm* proved in the paper. The theorem is based on the notion of *superequipotential quasinilpotency* of a family of linear operators acting in a Banach space. A constructive general test is proved for the superequipotential quasinilpotency of a family of operators acting in a Banach ideal space of measurable functions. Sufficient conditions of superequipotential quasinilpotency, which are convenient for applications, are obtained in the case of Lebesgue spaces.

Keywords: controllable Volterra functional equation, contraction mapping principle, equipotentially quasinilpotent family of operators, theorem on an equivalent norm.

MSC: 93C20, 93C23, 35B30, 47B38

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-262-278

Введение

В теории оптимального управления переход к описанию управляемых систем на языке функциональных (иначе, функционально-операторных) уравнений использовался разными авторами. Так, в [1] описание управляемых систем с помощью функциональных уравнений в пространствах типа C и L_p было использовано для изучения вопросов существования оптимального управления и расширения оптимизационных задач, построения теории обобщенных управлений и необходимых условий оптимальности и др. В [2, гл. 6] на широкий класс управляемых функциональных уравнений в пространствах типа C распространена схема Дубовицкого — Милютина получения принципа максимума. К формам функциональных уравнений [1; 2] приводят, в частности, различные управляемые системы с отклоняющимся аргументом и некоторые *управляемые начально-краевые задачи* (УНКЗ) для гиперболических (см. [1, с. 169–170]) и параболических (см. [2, с. 265–266]) уравнений с частными производными.

В [3;4] была предложена довольно общая форма описания УНКЗ с помощью *вольтерровых функциональных уравнений* (ВФУ) вида

$$z(t) = f\left(t, A[z](t), v(t)\right), \quad t \equiv \mathrm{col}\{t^1, \dots, t^n\} \in \Pi \subset \mathbb{R}^n, \quad z \in L_p^m \equiv L_p^m\left(\Pi\right), \tag{0.1}$$

где Π — заданное ограниченное множество; $f(.,.,.) : \Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^m$; $v(.) \in \mathcal{D} \subset L_k^s$ — управление; $A : L_p^m \to L_q^l$ — линейный *оператор, вольтерров на некоторой системе T подмножеств* множества Π в том смысле, что для любого $H \in T$ сужение $A[z]|_H$ не зависит от значений $z|_{\Pi \setminus H}$; $p, q, k \in [1, +\infty]$. Это определение вольтерровости — многомерное обобщение известного определения А. Н. Тихонова функционального оператора типа Вольтерра [5]. К ВФУ (0.1) естественным образом (обращением главной части) приводятся самые различные УНКЗ для нелинейных эволюционных уравнений (параболических, гиперболических, интегро-дифференциальных, с разного рода запаздываниями и др.). Способ обращения главной части УНКЗ в достаточно общем виде описан в [6, § 2]; многочисленные и разнообразные конкретные примеры на этот счет можно найти, в частности, в [7–12]. Как правило, входящее в (0.1) управление $v(.)$ соответствует распределенному управлению в эквивалентной УНКЗ, а наличие, например, в основном уравнении УНКЗ управляемых старших коэффициентов или управляемых запаздываний означает, что в эквивалентном ВФУ (0.1) будет управляем и оператор A (см., например, [10, гл. 2, § 2, § 4, п. 3; 13]). Переход от УНКЗ к эквивалентному ВФУ (0.1) адекватен многим проблемам распределенной оптимизации (получение условий сохранения разрешимости УНКЗ при возмущении управлений, обоснование численных методов оптимального управления, вывод условий оптимальности и др.). При таком переходе, возможно, достигается некоторый компромисс между стремлением к общности построений, с одной стороны, и желанием получить результаты в удобной для приложений форме — с другой. Заметим, что как эквиваленты УНКЗ в теории оптимизации бывают удобны и другие формы ВФУ, в которых вольтерровость операторов понимается в указанном выше смысле (см., например, [14–19] и обзоры [20; 21]).

В [21] был дан краткий обзор результатов теории оптимального управления, полученных в разное время с использованием ВФУ (см. также обзоры [20; 22; 23]). В данной статье, которую можно рассматривать как дополнение к обзору [21], мы подробнее остановимся на некоторых из этих результатов, так или иначе связанных с проблемой вывода *необходимых условий оптимальности* (НУО). Речь пойдет о способах получения требующихся для такого вывода условий сохранения (при возмущении управлений) глобальной разрешимости УНКЗ, а точнее, о возможностях применения при этом принципа сжимающих отображений (общему способу получения условий сохранения глобальной разрешимости УНКЗ с помощью эквивалентных ВФУ (0.1) и результатов данной работы автор предполагает посвятить отдельную статью). Поясним сказанное.

При выводе НУО, при обосновании численных методов решения задач оптимального управления и во многих других случаях возникает следующая ситуация. Некоторая УНКЗ задана на фиксированном множестве Π изменения независимых переменных, а соответствующая оптимизационная задача такова, что интерес представляют только глобальные, т. е. определенные на всем Π, решения УНКЗ из выбранного класса $W(\Pi)$ функций на Π. Пусть $\mathcal{R}$ — класс тех допустимых управлений, каждому из которых отвечает единственное в $W(\Pi)$ решение рассматриваемой УНКЗ. Важным является вопрос о достаточных условиях, при которых те или иные возмущения (вариации) не выводят допустимые управления из класса $\mathcal{R}$, т. е. вопрос о достаточных условиях *устойчивости существования глобальных решений* (УСГР) данной УНКЗ по возмущению управления.

Так, например, при выводе НУО недостаток информации об УСГР управляемой УНКЗ по возмущению управления часто вынуждает считать УНКЗ сингулярной в смысле Ж.-Л. Лионса [24]. В [24, с. 9–15] предложено УНКЗ (и соответствующую задачу оптимального управления) называть сингулярной, в частности тогда, когда некоторым требуемым для получения НУО вариациям управления либо не отвечает, либо неизвестно, отвечает ли, единственное глобальное решение данной УНКЗ (см. комментарий в [25, § 1]). В этом случае в [24] для вывода НУО предлагается переходить от классического случая “управление → состояние” к рассмотрению эквивалентной оптимизационной задачи на классе пар “управление, состояние”, когда “управление” и “состояние” равноправны, и ограничение в виде управляемого уравнения “снимать” методом адаптированного штрафа [24, с. 7]. Вывод НУО при этом может быть существенно более сложным, чем аналогичный вывод по классической схеме варьирования управлений (см., например, вывод НУО типа принципа максимума в сингулярных и несингулярных модельных задачах оптимизации в [24, гл. 1, гл. 2]).

Эквивалентная ВФУ-переформулировка УНКЗ позволила в [25–28] с помощью теорем УСГР [29] и теорем о неявной функции показать, что ряд оптимизационных задач, рассматриваемых в [24] как сингулярные (например, модельные сингулярные оптимизационные задачи в [24, гл. 1, гл. 2]), можно к таковым не относить и при выводе соответствующих НУО придерживаться естественной классической схемы варьирования управлений; именно подобным образом в [27] (см. также [30]) удалось решить ряд поставленных в [24] задач получения “сингулярных систем оптимальности”, как в [24] называются НУО в сингулярных задачах оптимального управления.

Если для сосредоточенных управляемых систем теория достаточных условий УСГР хорошо проработана (простейшие варианты таких условий дают теоремы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от числового параметра, входящего в правую часть обыкновенного дифференциального уравнения; более общие случаи параметра из метрического и топологического пространств детально рассмотрены в [31, с. 11–16; 32, с. 195–201]; подробную библиографию по этому вопросу, имеющему богатую историю, см. в [31]), то для распределенных систем это далеко не так (известная автору история вопроса кратко описана им в [11]). Поэтому в [8–10] была предложена схема получения конструктивных достаточных условий УСГР УНКЗ, основанная на приведении УНКЗ к эквивалентному ВФУ (0.1) при $p = q = k = \infty$ (там же можно найти разнообразные конкретные примеры применения схемы). При этом достаточные условия УСГР (теоремы УСГР) получаются методом продолжения локальных решений ВФУ (0.1) вдоль некоторой цепочки множеств[1] с помощью специальной теоремы существования локального решения уравнения (0.1) (понятие локального решения (0.1) как решения этого уравнения на некотором множестве H системы T — естественное следствие вольтерровости оператора A в указанном выше смысле[2]). Для доказательства этой специальной теоремы существования локальных решений (0.1), т. е. решений класса $L_\infty^m(H)$ при некотором $H \in T$, в [8–10] используется принцип сжимающих отображений. Возможность его применения обеспечивается тем, что в случае $p = q = k = \infty$ при естественных предположениях о функции правой части $f(.,.,.)$ уравнения (0.1), операторе A и множестве допустимых управлений оператор правой части $\Phi_v[z(.)](t) \equiv f(t, A[z](t), v(t))$ удовлетворяет операторному условию Липшица (см. разд. 1) с квазинильпотентным "оператором Липшица", которое позволяет, пользуясь хорошо известными результатами функционального анализа, сформулированными ниже в разд. 1 в виде леммы 1, ввести в пространстве $L_\infty^m(H)$ такую эквивалентную обычной норму, в которой оператор правой части будет сжимающим (подробнее см. разд. 1).

Однако в общем случае $1 \le p, q, k \le \infty$ оператор правой части (0.1) подобному операторному условию Липшица, вообще говоря, не удовлетворяет (что хорошо видно на примере рассматриваемой в [12] нелинейной управляемой системы Гурса — Дарбу), см. разд. 1. Поэтому для распространения указанной схемы получения теорем УСГР с изначально рассматривавшегося в [8–10] случая $p = q = k = \infty$ на охватывающий существенно более широкий круг УНКЗ общий случай $1 \le p, q, k \le \infty$ используется обобщение леммы 1, которое в разд. 2 сформулировано в виде теоремы 1. Эта теорема, названная нами *теоремой об эквивалентной норме*, опирается на введенное в [29; 33] понятие "суперравностепенной квазинильпотентности семейства линейных операторов", действующих в банаховом пространстве (см. определение в разд. 2 и примечание 4). Удобные в приложениях общие достаточные условия суперравностепенной квазинильпотентности семейства операторов, действующих в *банаховых идеальных пространствах* (БИП) измеримых функций, доказываются в разд. 3 (теорема 2). Как следствия теоремы 2 в разд. 4 доказаны полезные для приложений в теории УСГР УНКЗ конкретные признаки суперравностепенной квазинильпотентности для случая лебеговых пространств.

Основные утверждения данной статьи в несколько иной форме были депонированы в [33], их доказательства не публиковались. Формулировка теоремы 1 без доказательства использовалась в [6], формулировки теоремы 2, лемм 3, 4 и предложений 1–4 были без доказательств анонсированы в [29] и приведены в [6].

Формулировки теорем 1 и 2 применены в [12] при конкретной реализации описанной выше схемы получения достаточных условий УСГР нелинейной управляемой системы Гурса — Дарбу, формулировка теоремы 2 использовалась в [34] для обоснования вычисления вариаций функционалов при выводе НУО типа принципа максимума в задаче оптимизации такой управляемой системы (см. краткий комментарий работ [12; 34] в начале разд. 4).

Примем следующие обозначения: $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — фиксированное, измеримое по Лебегу, ограниченное множество, играющее роль основного множества изменения независимых переменных $t = \mathrm{col}\{t^1, \ldots, t^n\}$; $\Sigma = \Sigma(\Pi)$ — σ-алгебра измеримых подмножеств Π; T — некоторая часть Σ; $E = E(\Pi)$ — некоторое БИП измеримых вещественных функций, определенных на Π (см., например, [35, с. 139]); $E^m \equiv \underbrace{E \times \ldots \times E}_{m}$, $\|.\|_{E^m}$ — стандартная норма прямого произведения; P_H — оператор умножения на функцию $\chi_H(t) \equiv \{1,\ t \in H;\ 0,\ t \in \Pi \backslash H\}$, ха-

[1] *Цепочкой множеств* называем конечную систему множеств $\mathcal{T} = \{H_0, H_1, \ldots, H_k\}$, линейно упорядоченную по вложению ($H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k$) и такую, что $H_0 = \varnothing, H_k = \Pi$.

[2] Для каждого множества $H \in T$ "естественным образом" определяется действие оператора A на функции $y \in L_p^m(H)$ (и следовательно, как оператора из $L_p^m(H)$ в $L_q^l(H)$) формулой $A[\tilde{y}](t), t \in H$, где $\tilde{y}$ — любое принадлежащее L_p^m продолжение функции y с множества H на Π.

рактеристическую функцию множества $H \in \Sigma$; $\mathbf{B}$ — вещественное банахово пространство; $U_M(y) \equiv \{x \in \mathbf{B}: \ \|x-y\|_{\mathbf{B}} \le M\}$ — шар радиуса M с центром y в пространстве $\mathbf{B}$; $\rho(G)$ — спектральный радиус *линейного ограниченного оператора* (ЛОО) $G: \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ (по известной формуле $\rho(G) = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\|G^k\|}$); $L(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2)$ — пространство ЛОО, действующих из банахова пространства $\mathbf{B}_1$ в банахово пространство $\mathbf{B}_2$.

1. О применении принципа сжимающих отображений

При изучении вопросов существования решений функциональных уравнений часто так или иначе используется принцип сжимающих отображений. Схема рассуждений может быть, например, следующей. Пусть $F: E^m \to E^m$ — некоторый оператор и рассматривается уравнение

$$x(t) = F[x](t), \quad t \in \Pi, \quad x \in E^m. \tag{1.1}$$

Если найдутся замкнутое множество $X \subset E^m$ и положительный квазинильпотентный ЛОО $G: E \to E$ такие, что

$$F[X] \subset X \tag{1.2}$$

и выполняется операторное условие Липшица

$$| \, F[x](t) - F[y](t) \, | \le G[| \, x - y \, |](t), \quad t \in \Pi, \quad x, y \in X, \tag{1.3}$$

то к уравнению (1.1), рассматриваемому на X, применим принцип сжимающих отображений, в соответствии с которым это уравнение имеет единственное в X решение. В самом деле, в этом случае оператор F является сжимающим на X в некоторой норме $\|.\|_*$, эквивалентной норме $\|.\|_{E^m}$. Действительно, в силу (1.3) в качестве нормы $\|.\|_*$ можно взять любую норму вида $\|.\|_* \equiv \||\,.\,|\|_{(\varepsilon)}$, где $\|.\|_{(\varepsilon)}$ — эквивалентная первоначальной норме $\|.\|$ норма пространства E, монотонная относительно упорядоченности E по конусу неотрицательных функций и такая, что норма оператора $G: E \to E$, соответствующая норме $\|.\|_{(\varepsilon)}$, меньше числа $\varepsilon < 1$. Существование такой нормы $\|.\|_{(\varepsilon)}$ пространства E для любого числа $\varepsilon > 0$ вытекает из утверждения, являющегося следствием лемм об эквивалентной норме [36, гл. 2, § 5, леммы 2.2 и 2.3].

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{B}$ *— вещественное банахово пространство с нормой* $\|.\|$, *монотонной относительно полуупорядоченности* $\mathbf{B}$ *по некоторому конусу*[3] K. *Если* $G: \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ *— квазинильпотентный* ЛОО, *для которого* K *является инвариантным конусом, то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует эквивалентная норме* $\|.\|$ *норма* $\|.\|_{(\varepsilon)}$ *пространства* $\mathbf{B}$, *монотонная относительно полуупорядоченности* $\mathbf{B}$ *по конусу* K, *такая, что норма оператора* $G: \mathbf{B} \to \mathbf{B}$, *соответствующая норме* $\|.\|_{(\varepsilon)}$, *не превосходит* ε. *В качестве нормы* $\|.\|_{(\varepsilon)}$ *может быть взята норма* $\|x\|_{(\varepsilon)} \equiv \sum_{i=0}^{n_\varepsilon - 1} \frac{\|G^i[x]\|}{\varepsilon^i}, \quad x \in \mathbf{B}$, *где* n_ε *таково, что* $\sqrt[n_\varepsilon]{\|G^{n_\varepsilon}\|} \le \varepsilon$ *(здесь норма оператора* $\|G^{n_\varepsilon}\|$ *соответствует норме* $\|\cdot\|$ *пространства* $\mathbf{B}$).

Указанная схема применялась для доказательства локальных теорем существования ВФУ (0.1) (см. [8; 9; 10, гл. 1]) (а также ВФУ второго рода общего вида, см. [10, гл. 1; 37]), рассматриваемых над пространствами L_∞^m (см. также обзоры [11; 20–23]). Здесь использовалось, в частности, то, что всякое локальное, т. е. из пространства $L_\infty^m(H)$ при некотором $H \in T$, решение ВФУ (0.1) можно, продолжив его нулем на множество $\Pi \setminus H$, рассматривать как решение уравнения (1.1), в котором $E = L_\infty$, оператор F задается формулой

$$F[z](t) = P_H \Phi_v[z(.)](t)$$

[3] Множество $\mathrm{K} \subset \mathbf{B}$ называем конусом, если оно замкнуто, любая неотрицательная комбинация элементов K лежит в K, ненулевой вектор и его обратный не могут принадлежать K вместе.

и управление v играет роль параметра. Типична ситуация, когда для такого уравнения (1.1) выполняются условия (1.2), (1.3), причем множество X равно проекции $P_H U_M(\hat{z})$ некоторого шара $U_M(\hat{z})$ пространства L_∞^m, оператор Липшица G не зависит от управления v и имеет вид

$$G[z](t) = \mathcal{N} \cdot B[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_\infty,$$

где $B : L_\infty \to L_\infty$ — вольтерров на системе T квазинильпотентный ЛОО, не зависящий от множества X, а $\mathcal{N}$ — зависящая от X постоянная.

Однако повторение той же схемы рассуждений применительно, например, к ВФУ (0.1), рассматриваемому над пространством L_p^m при $1 \le p < \infty$, возможно уже лишь для довольно узкого класса уравнений. Причина в том, что, когда мы в этом случае ищем локальное решение (0.1) на множестве $H \in T$, то для тех классов множеств пространства L_p^m, в которых при этом (см. примечание 2) естественно искать множество X, удовлетворяющее условию (1.2) (это класс P_H-проекций шаров в L_p^m, класс P_H-проекций прообразов шаров при отображении $A : L_p^m \to L_q^l$), условие (1.3), вообще говоря, не выполняется. Точнее, оно выполняется лишь в некоторых предельных случаях, охватывающих сравнительно узкий круг уравнений (0.1).

Тем не менее возможна такая модернизация указанной выше схемы использования принципа сжимающих отображений, которая и в общей ситуации применима к уравнениям вида (0.1), рассматриваемым над пространствами L_p^m при $p \in [1, \infty)$. Дело в том, что для широкого класса таких уравнений на любом множестве $X \subset L_p^m$ выполняется условие

$$|\Phi_v[x](t) - \Phi_v[y](t)| \le G(v, x, y)\,[|x - y|]\,(t), \quad t \in \Pi, \quad x, y \in X, \tag{1.4}$$

в котором $G(v, x, y)[.] : L_p \to L_p$ — ЛОО, имеющий вид

$$G(v, x, y)[z](t) \equiv \alpha[v, x, y](t) \cdot B[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p, \tag{1.5}$$

где $\alpha[., ., .] : \mathcal{D} \times L_p^m \times L_p^m \to L_r$ — ограниченный оператор ($q^{-1} + r^{-1} = p^{-1}$), $B : L_p \to L_q$ — фиксированный вольтерров на некоторой системе T положительный ЛОО. Возникающие при этом семейства операторов $\{G(v, x, y) \in L(L_p, L_p) : x, y \in X, v \in \mathcal{D}\}$ вида (1.5) в случае, когда X — P_H-проекция прообраза шара при отображении $A : L_p^m \to L_q^l$, часто обладают свойством *суперравностепенной квазинильпотентности* (см. разд. 2). Это позволяет воспользоваться принципом сжимающих отображений, заменив в приведенной выше схеме его использования, опирающейся на условие (1.3), применение сформулированной выше леммы 1 применением (с опорой на неравенство (1.4)) доказываемой в разд. 2 теоремы 1 об эквивалентной норме.

2. Суперравностепенная квазинильпотентность семейства операторов и теорема об эквивалентной норме

Пусть $\mathbf{B}$ — вещественное банахово пространство с нормой $\|.\|$, Γ — некоторое множество, $\{G(\gamma)[.] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}\}_{\gamma \in \Gamma}$ — семейство зависящих от параметра $\gamma \in \Gamma$ квазинильпотентных ЛОО. Напомним, что квазинильпотентность ЛОО $G(\gamma)[.] : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ означает выполнение предельного соотношения: $\sqrt[k]{\left\|\{G(\gamma)\}^k\right\|} \to 0$ при $k \to \infty$. Достаточно естественным является следующее определение [29; 33]: назовем семейство операторов $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ *равностепенно квазинильпотентным*, если

$$\sqrt[k]{\sup_{\gamma \in \Gamma} \left\|\{G(\gamma)\}^k\right\|} \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Однако нам потребуется следующее определение [29; 33]: семейство операторов $\{G(\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma}$ назовем *суперравностепенно квазинильпотентным*, если[4]

$$\sqrt[k]{\sup_{\gamma_1,\dots,\gamma_k\in\Gamma}\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_k)\|}\to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty. \tag{2.1}$$

Сформулируем теорему об эквивалентной норме.

Теорема 1. *Пусть норма* $\|.\|$ *пространства* $\mathbf{B}$ *монотонна относительно полуупорядоченности* $\mathbf{B}$ *по некоторому конусу* K. *Пусть семейство* $\{G(\gamma)[.]:\mathbf{B}\to\mathbf{B}\}_{\gamma\in\Gamma}$ *квазинильпотентных ЛОО, для каждого из которых конус* K *является инвариантным, равномерно ограничено, т. е.*

$$\nu_G\equiv\sup_{\gamma\in\Gamma}\|G(\gamma)\|<\infty, \tag{2.2}$$

и суперравностепенно квазинильпотентно. Тогда для любого $\varepsilon>0$ *существует эквивалентная норме* $\|.\|$ *норма* $\|.\|_{(\varepsilon)}$ *пространства* $\mathbf{B}$, *монотонная относительно полуупорядоченности* $\mathbf{B}$ *по конусу* K, *такая, что для каждого* $\gamma\in\Gamma$ *соответствующая норма оператора* $G(\gamma)$ *не превосходит числа* ε. *В качестве нормы* $\|.\|_{(\varepsilon)}$ *может быть взята норма*

$$\|x\|_{(\varepsilon)}\equiv\|x\|+\sum_{j=1}^{n_\varepsilon-1}\varepsilon^{-j}\sup_{\gamma_1,\dots,\gamma_j\in\Gamma}\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_j)[x]\|,\quad x\in\mathbf{B}, \tag{2.3}$$

где n_ε *таково, что*

$$\sqrt[n_\varepsilon]{\sup_{\gamma_1,\dots,\gamma_{n_\varepsilon}\in\Gamma}\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_{n_\varepsilon})\|}\le\varepsilon. \tag{2.4}$$

Доказательство. Произвольно фиксируем $\varepsilon>0$ и число n_ε, удовлетворяющее (2.4). Аксиомы нормы для $\|.\|_{(\varepsilon)}$ легко проверяются. Эквивалентность нормы (2.3) первоначальной норме $\|.\|$ вытекает из неравенств

$$\|x\|\le\|x\|_{(\varepsilon)}\le\Big\{1+\sum_{j=1}^{n_\varepsilon-1}\varepsilon^{-j}(\nu_G)^j\Big\}\|x\|,\quad x\in\mathbf{B},$$

следующих из (2.2), (2.3). Монотонность нормы (2.3) следует из монотонности нормы $\|.\|$ и инвариантности конуса K для любого произведения $G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_j)$ операторов семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$. Осталось показать, что для любого $\gamma\in\Gamma$

$$\|G(\gamma)[x]\|_{(\varepsilon)}\le\varepsilon\|x\|_{(\varepsilon)},\quad x\in\mathbf{B}. \tag{2.5}$$

Для любых $\gamma\in\Gamma$, $x\in\mathbf{B}$ имеем

$$\|G(\gamma)[x]\|_{(\varepsilon)}=\|G(\gamma)[x]\|+\sum_{j=1}^{n_\varepsilon-1}\varepsilon^{-j}\sup_{\gamma_1,\dots,\gamma_j\in\Gamma}\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_j)G(\gamma)[x]\|$$

$$\le\sup_{\gamma_1\in\Gamma}\|G(\gamma_1)[x]\|+\sum_{j=1}^{n_\varepsilon-1}\varepsilon^{-j}\sup_{\gamma_1,\dots,\gamma_{j+1}\in\Gamma}\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_{j+1})[x]\|$$

[4]Число, равное пределу $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\sup\limits_{\gamma_1,\dots,\gamma_k\in\Gamma}\|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_k)\|}$, по определению, данному в [38], называется *совместным спектральным радиусом* (joint spectral radius) семейства операторов $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$. Если совместный спектральный радиус некоторого семейства операторов равен нулю, то по принятой сейчас в теории нормированных алгебр терминологии такое семейство называют *квазинильпотентным* (см., например, [39;40]). В этой статье для обозначения свойства (2.1) семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ мы используем название *суперравностепенная квазинильпотентность*, придерживаясь терминологии, предложенной в [29;33].

$$= \Big\{ \sup_{\gamma_1\in\Gamma} \|G(\gamma_1)[x]\| + \varepsilon \sum_{j=1}^{n_\varepsilon-2} \varepsilon^{-(j+1)} \sup_{\gamma_1,\dots,\gamma_{j+1}\in\Gamma} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_{j+1})[x]\| \Big\}$$

$$+\, \varepsilon^{-(n_\varepsilon-1)} \sup_{\gamma_1,\dots,\gamma_{n_\varepsilon}\in\Gamma} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_{n_\varepsilon})[x]\|$$

$$= \big\{\varepsilon\,\|x\|_{(\varepsilon)} - \varepsilon\,\|x\|\,\big\} + \varepsilon^{-(n_\varepsilon-1)} \sup_{\gamma_1,\dots,\gamma_{n_\varepsilon}\in\Gamma} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_{n_\varepsilon})[x]\|\,. \tag{2.6}$$

Так как в силу (2.4) для любого $x\in\mathbf{B}$ имеем

$$-\varepsilon\,\|x\| + \varepsilon^{-(n_\varepsilon-1)} \sup_{\gamma_1,\dots,\gamma_{n_\varepsilon}\in\Gamma} \|G(\gamma_1)G(\gamma_2)\cdot\ldots\cdot G(\gamma_{n_\varepsilon})[x]\| \le 0,$$

то из (2.6) следует (2.5). Теорема 1 доказана.

3. Цепочечный признак суперравностепенной квазинильпотентности

Следуя [4] и сказанному во введении, назовем оператор $G : E^m \longrightarrow E^l$ *вольтерровым оператором на системе множеств* $T\subset\Sigma$, если для любого $H\in T$ сужение $G[x]\Big|_H$ не зависит от значений сужения $x\,\big|_{\Pi\setminus H}$, т. е.

$$\forall H\in T \quad P_H G P_H = P_H G.$$

Приведенное определение вольтерровости не предполагает, вообще говоря, линейности оператора G, хотя далее в этой статье везде, кроме леммы 2, оно применяется только к линейным операторам (применение этого определения в случае нелинейных операторов см., например, в [10, п. 1.2.12; 37]).

Класс операторов, вольтерровых на системе множеств T, обозначим через $V(T)$. Обозначим через $\mathcal{B}(G)$ объединение всех таких систем множеств, на каждой из которых оператор G вольтерров. Элементы $\mathcal{B}(G)$ будем называть *вольтерровыми множествами оператора* G. Легко доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *Класс* $\mathcal{B}(G)$ *вольтерровых множеств оператора* $G : E^m \longrightarrow E^l$ *замкнут относительно операций объединения и пересечения множеств.*

Говорим, что цепочка множеств $\mathcal{T} = \{H_0,\dots,H_k\}\subset\Sigma$ (см. определение в примечании 1) — это *вольтеррова цепочка оператора* G, если $G\in V(\mathcal{T})$. Пусть $\delta>0$ — некоторое число; говорим, что ЛОО $G : E\longrightarrow E$ удовлетворяет δ-условию на множестве $H\in\Sigma$, если $\|P_H G P_H\|<\delta$. Цепочку $\mathcal{T} = \{H_0,\dots,H_k\}$ назовем *δ-цепочкой* ЛОО $G : E\longrightarrow E$, если G удовлетворяет δ-условию на каждой разности $H_i\setminus H_{i-1}$, $i=\overline{1,k}$.

В [41] был доказан следующий *цепочечный признак квазинильпотентности*:

если у ЛОО $G : E\longrightarrow E$ для любого $\delta>0$ существует вольтеррова δ-цепочка, то $\rho(G)=0$.

Сформулируем и докажем *цепочечный признак суперравностепенной квазинильпотентности* семейства функциональных операторов (теорема 2). Пусть $E' = E'(\Pi)$ и $E'' = E''(\Pi)$ — БИП измеримых на Π функций, $G : E'\to E''$ — ЛОО, $\mathcal{T} = \{H_i\}_{i=0}^k$ — вольтеррова цепочка оператора G. Положим $h_i\equiv H_i\setminus H_{i-1}$, $i\in\overline{1,k}$. Так как $I=\sum_{i=1}^k P_{h_i}$ и в силу вольтерровости

$$P_{h_i} G P_{h_j} = 0 \quad \text{при} \quad i<j, \tag{3.1}$$

то оператор G имеет представление

$$G = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^i P_{h_i} G P_{h_j} \equiv \sum_{k\ge i\ge j\ge 1} P_{h_i} G P_{h_j}. \tag{3.2}$$

Назовем цепочку $\mathcal{T}$ *вольтерровой сильной δ-цепочкой оператора G*, если

$$\left\|P_{h_i} G P_{h_j}\right\|_{E' \to E''} \leq \delta, \quad k \geq i \geq j \geq 1. \tag{3.3}$$

Понятно, что всякая вольтеррова сильная δ-цепочка является вольтерровой δ-цепочкой того же оператора.

Теорема 2. *Если семейство операторов $\{G(\gamma)[.]\}_{\gamma\in\Gamma} \subset L(E,E)$ удовлетворяет условию*

$$\left\{\begin{array}{l}\text{для любого} \quad \delta > 0 \quad \text{существует общая для всех операторов семейства} \\ \text{вольтеррова сильная } \delta\text{-цепочка,}\end{array}\right. \tag{3.4}$$

то это семейство операторов суперравностепенно квазинильпотентно.

Доказательство. Произвольно фиксируем $\delta > 0$. Пусть $\mathcal{T} = \{H_i\}_{i=0}^{k}$ — общая вольтеррова сильная δ-цепочка семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$. Пусть $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\} \subset \Gamma$. Для краткости положим $G_j \equiv G(\gamma_j)$, $j \in \overline{1,m}$. Из (3.1), (3.2) получаем

$$G_1 G_2 \cdot \ldots \cdot G_m = \sum_{k\geq i_1\geq i_2\geq\ldots\geq i_{m+1}\geq 1} P_{h_{i_1}} G_1 P_{h_{i_2}} G_2 P_{h_{i_3}} \cdot \ldots \cdot P_{h_{i_m}} G_m P_{h_{i_{m+1}}}, \tag{3.5}$$

что легко доказывается индукцией по m. Число слагаемых в правой части (3.5) есть число сочетаний с повторениями из k элементов по $m+1$, равное $C_{k+m}^{m+1} = \dfrac{(k+m)!}{(m+1)!(k-1)!}$. Из (3.5) получаем

$$\|G_1 G_2 \cdot \ldots \cdot G_m\|_{E\to E} \leq \sum_{k\geq i_1\geq i_2\geq\ldots\geq i_{m+1}\geq 1} \Big\{ \prod_{j=1}^{m} \left\|P_{h_{i_j}} G_j P_{h_{i_{j+1}}}\right\|_{E\to E} \Big\},$$

что вместе с (3.3) дает

$$\|G_1 G_2 \cdot \ldots \cdot G_m\|_{E\to E} \leq \left(C_{k+m}^{m+1}\right) \delta^m.$$

Таким образом, для данного фиксированного k при любом $m \in \mathbb{N}$ и любом наборе $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ имеем

$$\sqrt[m]{\|G_1 G_2 \cdot \ldots \cdot G_m\|_{E\to E}} \leq \delta \sqrt[m]{C_{k+m}^{m+1}} \leq \delta \sqrt[m]{(k+m)(1+m)^{k-2}}.$$

Следовательно, существует $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\delta)$ такое, что

$$\sqrt[m]{\|G_1 G_2 \cdot \ldots \cdot G_m\|_{E\to E}} \leq 2\delta \quad \text{при} \quad m \geq \mathcal{N}. \tag{3.6}$$

Неравенства (3.6) ввиду произвольности набора $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ означают суперравностепенную квазинильпотентность семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$. Теорема 2 доказана.

Сформулируем простое, но полезное следствие теоремы 2 (лемма 4), для доказательства которого воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{T} = \{H_i\}_{i=0}^{k}$ — общая вольтеррова цепочка для $G_1, G_2 \in L(E,E)$. Тогда для любых $i, j \in \overline{1,k}$ $(i \geq j)$ имеем*

$$P_{h_i}(G_1 G_2) P_{h_j} = \left(P_{h_i} G_1 P_{h_j}\right)\left(P_{h_j} G_2 P_{h_j}\right)$$

$$+ \left(P_{h_i} G_1 P_{h_{j+1}}\right)\left(P_{h_{j+1}} G_2 P_{h_j}\right) + \ldots + \left(P_{h_i} G_1 P_{h_i}\right)\left(P_{h_i} G_2 P_{h_j}\right). \tag{3.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $h_i \subset H_i$, $H_i \in \mathcal{B}(G_1)$, то имеем $P_{h_i}G_1 = P_{h_i}P_{H_i}G_1 = P_{h_i}P_{H_i}G_1P_{H_i} = P_{h_i}G_1P_{H_i}$. Таким образом,

$$P_{h_i}G_1G_2P_{h_j} = P_{h_i}G_1\left[P_{H_i}G_2P_{h_j}\right]. \tag{3.8}$$

Так как $H_i = H_j \cup h_{j+1} \cup h_{j+2} \cup \ldots \cup h_i$, то

$$P_{H_i}G_2P_{h_j} = P_{H_j}G_2P_{h_j} + P_{h_{j+1}}G_2P_{h_j} + \ldots + P_{h_i}G_2P_{h_j}. \tag{3.9}$$

Ввиду $G_2 \in V(\mathcal{T})$ первое слагаемое правой части (3.9) равно $P_{h_j}G_2P_{h_j}$. Заменяя скобку в (3.8) на правую часть (3.9), а в каждом слагаемом полученной после этого и раскрытия скобок суммы операторов средний сомножитель вида P_h — на $(P_h)^2$, получаем (3.7). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если выполняются условия теоремы* 2, *то семейство операторов, составленное из всевозможных попарных сумм операторов семейства* $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$, *является суперравностепенно квазинильпотентным. То же самое можно сказать и про семейство операторов, составленное из всевозможных попарных произведений операторов семейства* $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу лемм 2 и 3 указанные в лемме 4 семейства сумм и произведений удовлетворяют условию (3.4) теоремы 2. Действительно, пусть $\mathcal{T} = \{H_i\}_{i=0}^k$ — общая для всех операторов семейства $\{G(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ вольтеррова сильная δ-цепочка. Она будет вольтерровой сильной 2δ-цепочкой для всех операторов из семейства попарных сумм, так как для всех $i, j \in \overline{1,k}$ $(i \geq j)$ при любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ имеем $P_{h_i}(G_1 + G_2)P_{h_j} = P_{h_i}G_1P_{h_j} + P_{h_i}G_2P_{h_j}$, где $G_1 = G(\gamma_1)$, $G_2 = G(\gamma_2)$. Она же в силу леммы 3 будет вольтерровой сильной $k\delta^2$-цепочкой для всех операторов из семейства попарных произведений. Лемма 4 доказана.

4. Случай лебеговых пространств

Формулировка теоремы 1 и формулировка частного случая теоремы 2 применены в [12] при конкретной реализации упомянутой выше схемы получения достаточных условий УСГР для нелинейной управляемой задачи Гурса — Дарбу общего вида в случае решений с суммируемыми в некоторой конечной степени первыми и смешанной производными; в этом случае ВФУ-переформулировка задачи Гурса — Дарбу в виде функционального уравнения (0.1) имеет показатель p, равный указанной степени. Формулировки теорем 1 и 2 применялись также при выводе анонсированных в [42] достаточных условий УСГР первой начально-краевой задачи для полулинейного параболического уравнения с управлением в начальном условии.

Понятие суперравностепенной квазинильпотентности оказалось востребованным и при выводе НУО типа принципа максимума в задачах оптимизации УНКЗ, приводимых к ВФУ (0.1) с конечными показателями p и q. Дело в том, что при выводе подобных НУО методом варьирования управлений обычно используется линеаризация управляемой системы по “фазовой” переменной. При линеаризации уравнения (0.1) по z в случае конечных p и q, в отличие от случая $p = q = k = \infty$, семейство линейных операторов правых частей линеаризованных уравнений, получающихся при разных параметрах варьирования, не обладает, вообще говоря, общей квазинильптентной мажорантой. Поэтому, например, при вычислении вариаций функционалов оптимизационной задачи требуются конструкции типа теоремы 2. С вопросом можно познакомиться в [34] на примере оптимизационной задачи с функциональными ограничениями для нелинейной управляемой системы Гурса — Дарбу с полной каратеодориевской правой частью. Так как в [34] рассматривается случай, когда решение системы необходимо искать в классе функций с суммируемыми в некоторой конечной степени первыми и смешанной производными, то эквивалентная ВФУ-переформулировка управляемой системы, как и в [12], приводит к уравнению (0.1) с показателем p, равным указанной степени. Вычисление требуемых вариаций функционалов обеспечивается в [34] применением формулировки теоремы 2.

Общий признак суперравностепенной квазинильпотентности теоремы 2 достаточно удобен для использования в конкретных ситуациях. Так, в [12] он непосредственно применяется для доказательства суперравностепенной квазинильпотентности семейства "операторов Липшица" оператора правой части уравнения вида (0.1) с показателем $p \in (1, \infty)$, являющегося эквивалентной ВФУ-переформулировкой нелинейной управляемой задачи Гурса — Дарбу. Тем не менее иногда бывает удобно пользоваться некоторыми специальными, ориентированными на конкретные операторные классы, следствиями признака теоремы 2. Нас прежде всего интересуют операторы классов $L(L_p, L_p)$, $p \in [1, \infty]$, появляющиеся в качестве "операторов Липшица" при изучении вопросов существования решений и УСГР уравнений (0.1), являющихся ВФУ-переформулировками УНКЗ. В таком качестве часто появляются операторы рассматриваемого ниже семейства (4.1), а также конечные суммы операторов подобных семейств (см., например, [12; 34]).

Напомним, что семейство $\Gamma \subset L_r(\Pi)$ ($r \in [1, \infty)$) называется семейством функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого измеримого по Лебегу множества $H \subset \Pi$ с мерой $\mathrm{mes} H < \delta$ имеем $\|\alpha\|_{L_r(H)} < \varepsilon$ при всех $\alpha \in \Gamma$. Как следует из неравенства Гельдера, семейством с равностепенно абсолютно непрерывными L_r-нормами является, например, любое ограниченное в некоторой норме L_ν, $\nu \in (r, \infty]$, множество из L_r.

Цепочку множеств $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\} \subset \Sigma$ назовем *δ-малой по мере*, если $\mathrm{mes}(H_i \setminus H_{i-1}) < \delta$ для всех $i = 1, \ldots, k$.

Пусть заданы: числа $p, q \in [1, \infty]$, $p \le q$; ЛОО $Q : L_p \to L_q$; множество $\Gamma \subset L_r$, где

$$r = \left\{ \frac{pq}{q-p}, \quad \text{если} \quad p < q < \infty; \quad p, \quad \text{если} \quad p < q = \infty; \quad \infty, \quad \text{если} \quad p = q \right\}.$$

Рассмотрим семейство ЛОО $G_\alpha : L_p \to L_p$ ($\alpha \in \Gamma$), задаваемое формулой

$$G_\alpha[z](t) \equiv \alpha(t) Q[z](t), \quad t \in \Pi, \quad z \in L_p \quad (\alpha \in \Gamma). \tag{4.1}$$

Предложение 1. *Если $p < q$ и Γ — семейство функций с равностепенно абсолютно непрерывными L_r-нормами, а также выполняется условие*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для любого } \delta > 0 \text{ ЛОО } Q : L_p \to L_q \text{ имеет} \\ \delta\text{-малую по мере вольтеррову цепочку,} \end{array} \right. \tag{4.2}$$

то задаваемое формулами (4.1) *семейство* ЛОО $G_\alpha : L_p \to L_p$ ($\alpha \in \Gamma$) *удовлетворяет условию* (3.4) *и суперравностепенно квазинильпотентно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что для семейства (4.1) выполняется условие (3.4). Для произвольно фиксированного $\delta > 0$ выберем $\xi > 0$ такое, что $\xi \|Q\| < \delta$. Пусть $\eta > 0$ таково, что $\|\chi_h \alpha\|_{L_r} < \xi$ при $\mathrm{mes}(h) < \eta$, $h \in \Sigma$, $\alpha \in \Gamma$. Для любых $H, H' \in \Sigma$, $\alpha \in \Gamma$ имеем

$$\|P_H G_\alpha P_{H'}\|_{L_p \to L_p} \le \|\chi_H \alpha\|_{L_r} \cdot \|Q\|. \tag{4.3}$$

Пусть $\mathcal{T} = \{H_i\}_{i=0}^k$ — η-малая по мере вольтеррова цепочка ЛОО Q. Очевидно, $G_\alpha \in V(\mathcal{T})$, $\alpha \in \Gamma$. В силу (4.3) и выбора η, для любых $i, j \in \overline{1,k}$, $i \ge j$, имеем $\left\|P_{h_i} G_\alpha P_{h_j}\right\|_{L_p \to L_p} < \delta$, каково бы ни было $\alpha \in \Gamma$. То есть $\mathcal{T}$ — вольтеррова сильная δ-цепочка оператора G_α при любом $\alpha \in \Gamma$. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. *Если выполнены условия*:

$$\Gamma \text{ — ограниченное множество в } L_r; \tag{4.4}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{для любого } \delta > 0 \text{ ЛОО } Q : L_p \to L_q \text{ имеет} \\ \text{вольтеррову сильную } \delta\text{-цепочку,} \end{array} \right. \tag{4.5}$$

то задаваемое формулами (4.1) *семейство* ЛОО $G_\alpha : L_p \to L_p$ ($\alpha \in \Gamma$) *удовлетворяет условию* (3.4) *и суперравностепенно квазинильпотентно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\|\alpha\|_{L_r} \le \xi$, $\alpha \in \Gamma$. Для произвольно фиксированного $\delta > 0$ выберем $\eta > 0$ такое, что $\xi\eta < \delta$. Существует вольтеррова сильная η-цепочка $\mathcal{T} = \{H_i\}_{i=0}^k$ оператора Q, которая ввиду неравенства $\left\|P_{h_i} G_\alpha P_{h_j}\right\|_{L_p \to L_p} \le \|\chi_{h_i}\alpha\|_{L_r} \cdot \left\|P_{h_i} Q P_{h_j}\right\|_{L_p \to L_q}$, выполняющегося для любого $\alpha \in \Gamma$ при $i \ge j$, является вольтерровой сильной δ-цепочкой для всех операторов семейства (4.1). Предложение 2 доказано.

Предложение 3. *Если $q < \infty$, оператор Q вполне непрерывен и выполнены условия* (4.2), (4.4)*, то задаваемое формулами* (4.1) *семейство* ЛОО $G_\alpha : L_p \to L_p$ $(\alpha \in \Gamma)$ *удовлетворяет условию* (3.4) *и суперравностепенно квазинильпотентно. Условие вполне непрерывности здесь может быть ослаблено до следующего условия*:

$$\begin{cases} \text{ЛОО } Q : L_p \to L_q \textit{ переводит единичный шар в множество} \\ \textit{функций с равностепенно абсолютно непрерывными нормами.} \end{cases} \tag{4.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение $P_h : L_p \to L_p$ переводит единичный шар сам в себя для любого $h \in \Sigma$. Если ЛОО Q вполне непрерывен, то образ M единичного шара при отображении $Q : L_p \to L_q$ компактен и потому выполняется условие (4.6) (см. [43, с. 14]). Фиксируем любое $\delta > 0$. Пусть $\eta > 0$ таково, что $\|\beta(.)\|_{L_q(h)} < \delta$, если $\mathrm{mes}(h) < \eta$, $\beta(.) \in M$. Тогда η-малая по мере вольтеррова цепочка оператора Q является его вольтерровой сильной δ-цепочкой. То есть выполнено условие (4.5) и применимо предложение 2. Предложение 3 доказано.

Приведем еще полезное обобщение предложения 2, получающееся “объединением” условий (4.2) и (4.6). Если $\mathcal{T} = \{H_0, \ldots, H_k\} \subset \Sigma$ — цепочка множеств, то через $\mathcal{T}^{(-)}$ будем обозначать систему множеств, состоящую из всевозможных разностей $H_j \setminus H_i$, $0 \le i \le j \le k$. Пусть $\mathcal{H} \subset \Sigma$, $M \subset L_q$, $1 \le q < \infty$. Будем говорить, что семейство функций M обладает *$\mathcal{H}$-равностепенно абсолютно непрерывными L_q-нормами*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $H \in \mathcal{H}$, $\mathrm{mes}\, H < \delta$, имеем $\|\alpha\|_{L_q(H)} < \varepsilon$ при всех $\alpha \in M$.

Предложение 4. *Пусть $q < \infty$ и выполнено условие* (4.4)*, а также условие* (4.2)*, которое запишем следующим образом*: *для любого $\delta > 0$* ЛОО $Q : L_p \to L_q$ *имеет δ-малую по мере вольтеррову цепочку $\mathcal{T}_\delta$. Пусть $\mathcal{H} \equiv \bigcup_{\delta > 0} \mathcal{T}_\delta^{(-)}$. Если* ЛОО $Q : L_p \to L_q$ *переводит единичный шар в множество функций с $\mathcal{H}$-равностепенно абсолютно непрерывными L_q-нормами, то задаваемое формулами* (4.1) *семейство* ЛОО $G_\alpha : L_p \to L_p$ $(\alpha \in \Gamma)$ *удовлетворяет условию* (3.4) *и суперравностепенно квазинильпотентно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 4 получается почти дословным повторением доказательства предложения 3 с дополнением четвертого предложения указанием: $h \in \mathcal{H}$.

З а м е ч а н и е. В каждом из тех случаев, которые рассматриваются в предложениях 1–4, ЛОО $Q : L_p \to L_q$ обладает свойством

$$\text{для любого } \delta > 0 \text{ существует вольтеррова } \delta\text{-цепочка оператора } Q \tag{4.7}$$

и, следовательно, по приведенному выше, в разд. 3, цепочечному признаку квазинильпотентности [41] оператор Q квазинильпотентен, если его рассматривать как оператор, действующий в пространстве L_p. В случае предложения 1 доказательство свойства (4.7) получаем, применяя предложение 1 к семейству Γ, состоящему из одной функции, тождественно равной единице. В случае предложений 2–4 свойство (4.7) вытекает из свойства (4.5), которое предполагается выполненным в предложении 2 и получено в ходе доказательства предложений 3 и 4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Варга Дж.** Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
2. **Афанасьев А.П., Дикусар В.В., Милютин А.А., Чуканов С.А.** Необходимое условие в оптимальном управлении. М.: Наука, 1990. 320 с. ISBN: 5-02-006708-3 .
3. **Сумин В.И.** Оптимизация управляемых обобщенных вольтерровых систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Горьк. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского. Горький, 1975. 158 с.
4. **Сумин В.И.** Функционально-операторные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами // Докл. АН. 1989. Т. 305, № 5. С. 1056–1059.
5. **Тихонов А.Н.** О функциональных уравнениях типа Вольтерра и их применениях к некоторым задачам математической физики // Бюлл. МГУ. Секц. А. 1938. Т. 1. Вып. 8. С. 1–25.
6. **Сумин В.И.** Равностепенная квазинильпотентность: определения, признаки, примеры применения // Вестн. Тамбов. ун-та. Естественные и технические науки. 2010. Т. 15, Вып. 1. С. 453–466.
7. **Плотников В.И., Сумин В.И.** Оптимизация распределенных систем в лебеговом пространстве // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 6. С. 142–161.
8. **Сумин В.И.** Об обосновании градиентных методов для распределенных задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1990. Т. 30, № 1. С. 3–21.
9. **Сумин В.И.** О достаточных условиях устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 12. С. 2097–2109.
10. **Сумин В.И.** Функциональные вольтерровы уравнения в теории оптимального управления распределенными системами. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 1992. 110 с.
11. **Сумин В.И.** Проблема устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач и вольтерровы функциональные уравнения // Вестн. Нижегород. ун-та. Математика. 2003. Вып. 1. С. 91–107.
12. **Лисаченко И.В., Сумин В.И.** Нелинейная управляемая задача Гурса — Дарбу: условия сохранения глобальной разрешимости // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, №6. С. 858–870.
13. **Коржавина М.С., Сумин В.И.** О начально-краевой задаче для полулинейного параболического уравнения с управляемой главной частью // Вестн. Тамбов. ун-та. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 122. С. 317–324. doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-317-324 .
14. **Чернов А.В.** Вольтерровы операторные уравнения и их применение в теории оптимизации гиперболических систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Нижегород. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского. Нижний Новгород, 2000. 177 с.
15. **Чернов А.В.** О сходимости метода условного градиента в распределенных задачах оптимизации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1616–1629.
16. **Чернов А.В.** О достаточных условиях управляемости нелинейных распределенных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012. Т. 52, № 8. С. 1400–1414.
17. **Чернов А.В.** О гладких конечномерных аппроксимациях распределенных оптимизационных задач с помощью дискретизации управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2013. Т. 53, № 12. С. 2029–2043.
18. **Chernov A.V.** On Volterra functional operator games on a given set // Automat. Remote Control. 2014. Vol. 75, iss. 4. P. 787–803. doi: 10.1134/S0005117914040195 .
19. **Chernov A.V.** Preservation of the solvability of a semilinear global electric circuit equation // Comput. Math. Math. Physics. 2018. Vol. 58, no. 12. P. 2018–2030. doi: 10.1134/S0965542518120096 .
20. **Сумин В.И., Чернов А.В.** Вольтерровы функционально-операторные уравнения в теории оптимизации распределенных систем // Динамика систем и процессы управления: Тр. Междунар. конф., посвященной 90-летию со дня рожд. акад. Н. Н. Красовского (Екатеринбург, 2014 г.) / ИММ УрО РАН; УРФУ Екатеринбург, 2015. С. 293–300.
21. **Sumin V.** Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems // IFAC PapersOnLine. 2018. Vol. 51, iss. 32. P. 759–764. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.454 .
22. **Сумин В.И.** Вольтерровы функционально-операторные уравнения и распределенные задачи оптимизации // Вестн. Тамбов. ун-та. Естественные и технические науки. 2018. Т. 23, № 124. С. 745–756.
23. **Сумин В.И.** Вольтерровы функциональные уравнения и оптимизация распределенных систем // Оптимальное управление и дифференциальные игры: Материалы Междунар. конф., посвященной 110-летию со дня рожд. Льва Семеновича Понтрягина (Москва, 2018 г.). М.: МИАН им. В. А. Стеклова РАН; МАКС Пресс. 2018. С. 266–268. doi: 10.4213/proc23049 .

24. **Лионс Ж.-Л.** Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987. 368 с.
25. **Сумин В.И.** К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. I // Вестн. Нижегород. ун-та. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. Вып. 2 (21). С. 145–155.
26. **Сумин В.И.** К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. II // Вестн. Нижегород. ун-та. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2001. Вып. 1(23). С. 198–204.
27. **Сумин В.И.** К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. III // Вестн. Нижегород. ун-та. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2002. Вып. 1(25). С. 164–174.
28. **Сумин В.И.** К проблеме сингулярности распределенных управляемых систем. IV // Вестн. Нижегород. ун-та. Математическое моделирование и оптимальное управление. 2004. Вып. 1(27). С. 185–193.
29. **Сумин В.И.** Управляемые функциональные вольтерровы уравнения в лебеговых пространствах // Вестн. Нижегород. ун-та. Математическое моделирование и оптимальное управление. 1998. Вып. 2(19). С. 138–151.
30. **Сумин В.И.** Условия устойчивости существования глобальных решений управляемых краевых задач для нелинейных параболических уравнений // Вестн. Тамбов. ун-та. Естественные и технические науки. 2000. Т. 5, вып. 4. С. 493–495.
31. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
32. **Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.** Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
33. **Сумин В.И.** Об управляемых функциональных вольтерровых уравнениях в лебеговых пространствах / Депонировано в ВИНИТИ 03.09.98. № 2742 — В98. 96 с.
34. **Лисаченко И.В., Сумин В.И.** Принцип максимума для терминальной задачи оптимизации системы Гурса — Дарбу в классе функций с суммируемой смешанной производной // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2011. Т. 21, Вып. 2. С. 52–67. doi: 10.20537/vm110204 .
35. **Канторович Л.В., Акилов Г.П.** Функциональный анализ. М.: Наука. 1977. 742 с.
36. **Красносельский М.А.** Положительные решения операторных уравнений. М.: ГИФМЛ. 1962. 396 с.
37. **Сумин В.И.** О функциональных вольтерровых уравнениях // Изв. вузов. Математика. 1995. № 9. С. 67–77.
38. **Rota G.-C., Strang G.** A note on the joint spectral radius // Indag. Math. 1960. Vol. 22. P. 379–381.
39. **Shulman V.S., Turovskii Y.V.** Joint spectral radius, operator semigroups, and a problem of W. Wojtynski // J. Func. Anal. 2000. Vol. 177, iss. 2. P. 383–441.
40. **Шульман В.С.** Инвариантные подпространства и линейные операторные уравнения: автореферат дис. . . . докт. физ.-матем. наук / Российский ун-т дружбы народов. М., 2009. 23 с.
41. **Сумин В.И., Чернов А.В.** Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 10. С. 1402–1411.
42. **Коржавина М.С., Сумин В.И.** О краевой задаче для нелинейного параболического уравнения с управлением в начальном условии // Современные методы теории краевых задач : Материалы Междунар. конф. ‘Понтрягинские чтения – XXIX”, посвящ. 90-летию В.А. Ильина. М.: Изд-во МАКС-Пресс, 2018. С. 129–131.
43. **Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука. 1966. 500 с.

Поступила 15.12.2018
После доработки 3.02.2019
Принята к публикации 5.02.2019

Сумин Владимир Иосифович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
г. Нижний Новгород
e-mail: v_sumin@mail.ru

REFERENCES

1. Warga J. *Optimal control of differential and functional equations.* N Y; London: Acad. Press, 1972. 546 p. ISBN: 9781483259192 . Translated to Russian under the title *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i funktsional'nymi uravneniyami.* Moscow: Nauka Publ., 1977, 624 p.
2. Afanasyev A.P., Dikusar V.V., Milutin A.A., Chukanov S.A. *Neobkhodimoe uslovie v optimal'nom upravlenii* [Necessary condition in optimal control]. Moscow: Nauka Publ., 1990, 320 p. ISBN 5-02-006708-3.
3. Sumin V.I. *Optimizatsiya upravlyayemykh obobshchennykh vol'terrovykh sistem* [Optimization of generalized controlled Volterra systems]. Dissertation, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Gor'kii, 1975, 158 p.
4. Sumin V.I. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems. *Soviet Math. Dokl.*, 1989, vol. 39, no. 2, pp. 374–378.
5. Tikhonov A.N. On functional equations of Volterra type and their applications to certain problems of mathematical physics. *Byulleten' MGU. Sektsiya A - Bull. Univ. Moscou Ser. Internat. Sect. A*, 1938, vol. 1, no. 8, pp. 1–25 (in Russian).
6. Sumin V.I. Equiquasinilpotency: definitions, conditions, examples of application. *Vestnik Tambov. Univer. Ser. Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*, 2010, vol. 15, no. 1, pp. 453–466 (in Russian).
7. Plotnikov V.I., Sumin V.I. Optimization of distributed systems in Lebesgue space. *Sib. Math. J.*, 1981, vol. 22, pp. 913–929. doi: 10.1007/BF00968060 .
8. Sumin V.I. The features of gradient methods for distributed optimal-control problems. *USSR Comp. Math. Math. Phys.*, 1990, vol. 30, pp. 1–15. doi: 10.1016/0041-5553(90)90002-A .
9. Sumin V.I. Sufficient conditions for stable existence of solutions to global problems in control theory. *Differ. Eq.*, 1990, vol. 26, no. 12, pp. 1579–1590.
10. Sumin V.I. *Funktsional'nye volterrovy uravneniya v teorii optimal'nogo upravleniya raspredelennymi sistemami* [Functional Volterra equations in the theory of optimal control of distributed systems]. Nizhnii Novgorod: Nizhnii Novgorod State Univer. Publ., 1992, 112 p.
11. Sumin V.I. The problem of sustainability of existence global solutions of controlled boundary value problems and Volterra functional equations. *Vestnik Nizhegorod. Univer. Matematika*, 2003, no. 1, pp. 91–107 (in Russian).
12. Lisachenko I.V., Sumin V.I. Nonlinear Goursat–Darboux control problem: Conditions for the preservation of global solvability. *Differ. Eq.*, 2011, vol. 47, no. 6, pp. 863–876. doi: 10.1134/S0012266111060127 .
13. Korzhavina M.S., Sumin V.I. On the initial-boundary value problem for semilinear parabolic equation with controlled principal part. *Vestnik Tambov. Univer. Ser. Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*, 2018, vol. 23, no. 122, pp. 317–324 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-122-317-324 .
14. Chernov A.V. *Vol'terrovy operatornyye uravneniya i ikh primeneniye v teorii optimizatsii giperbolicheskikh sistem* [Volterra operator equations and their application in the theory of optimization of hyperbolic systems]. Dissertation, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Nizhny Novgorod, 2000, 177 p.
15. Chernov A.V. On the convergence of the conditional gradient method in distributed optimization problems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1510–1523. doi: 10.1134/S0965542511090077 .
16. Chernov A.V. Sufficient conditions for the controllability of nonlinear distributed systems. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2012, vol. 52, no. 8, pp. 1115–1127. doi: 10.1134/S0965542512050053 .
17. Chernov A.V. Smooth finite-dimensional approximations of distributed optimization problems via control discretization. Comput. Math. Math. Phys., 2013, vol. 53, no. 12, pp. 1839–1852. doi: 10.1134/S096554251312004X .
18. Chernov A.V. On Volterra functional operator games on a given set. *Automat. Remote Control*, 2014, vol. 75, no. 4, pp. 787–803. doi: 10.1134/S0005117914040195 .
19. Chernov A.V. Preservation of the solvability of a semilinear global electric circuit equation. *Comput. Math. Math. Physics.*, 2018, vol. 58, no. 12, pp. 2018–2030. doi: 10.1134/S0965542518120096 .
20. Sumin V.I., Chernov A.V. Volterra functional-operator equations in the theory of optimization of distributed systems. *Systems Dinamics and Control Processes (SDCP'2014), Proc. Int. Conf. dedicated to the 90th Anniversary of the birth of Acad. N. N. Krasovskii. Ekaterinburg, 2014*, Ekaterinburg, 2015, pp. 293–300 (in Russian).

21. Sumin V. Volterra functional-operator equations in the theory of optimal control of distributed systems. *IFAC PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 759–764. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.454 .

22. Sumin V.I. Volterra functional-operator equations and distributed optimization problems. *Vestnik Tambov. Univer. Ser. Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 745–756 (in Russian). doi: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-745-756 .

23. Sumin V.I. Volterra functional equations and optimization of distributed systems. *Optimal control and differential games, Materials Internat. Conf. dedicated to the 110th anniversary of the Lev Semenovich Pontryagin* (*Moscow, 2018*), Moscow, 2018, pp. 266–268 (in Russian).

24. Lions J.L. *Controle des systemes distribues singuliers.* Paris: Gauthier-Villars, 1983, 448 p. ISBN: 2040155392 . Translated to Russian under the title Lions Zh.-L. *Upravlenie singulyarnymi raspredelennymi sistemami*, Moscow: Nauka Publ., 1987, 368 p.

25. Sumin V.I. On the singularity problem of distributed control systems. I. *Vestnik Nizhegorod. Univer. Ser. Matem. Modelirovanie i Optimal. Uprav.*, 1999, no. 2(21), pp. 145–155 (in Russian).

26. Sumin V.I. On the singularity problem of distributed control systems. II. *Vestnik Nizhegorod. Univer. Ser. Matem. Modelirovanie i Optimal. Uprav.*, 2001, no. 1(23), pp. 198–204 (in Russian).

27. Sumin V.I. On the singularity problem of distributed control systems. III. *Vestnik Nizhegorod. Univer. Ser. Matem. Modelirovanie i Optimal. Uprav.*, 2002, no. 1(25), pp. 164–174 (in Russian).

28. Sumin V.I. On the singularity problem of distributed control systems. IV. *Vestnik Nizhegorod. Univer. Ser. Matem. Modelirovanie i Optimal. Uprav.*, 2004, no. 1(27), pp. 185–193 (in Russian).

29. Sumin V.I. Controlled functional Volterra equations in Lebesgue space. *Vestnik Nizhegorod. Univer. Ser. Matem. Modelirovanie i Optimal. Uprav.*, 1998, no. 2(19), pp. 138–151 (in Russian).

30. Sumin V.I. Conditions of the existence-stability of global solutions of boundary-value problems for nonlinear parabolic equations. *Vestnik Tambov. Univer. Ser. Estestvennye i Tekhnicheskie Nauki*, 2000, vol. 5, no. 4, pp. 493–495 (in Russian).

31. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides.* Dordrecht, Kluwer, 1988, 304 p. ISBN: 90-277-2699-X. Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu.* Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p.

32. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal Control.* N Y: Plenum Press, 1987, 309 p. ISBN: 0-306-10996-4 . Original Russian text published in Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie.* Moscow: Nauka Publ., 1979, 432 p.

33. Sumin V.I. On controlled functional Volterra equations in Lebesgue spaces. *Deposited in VINITI* 03.09.98 no. 2742–B98, 96 p.

34. Lisachenko I.V., Sumin V.I. The maximum principle for terminal optimization problem connected with Goursat–Darboux system in the class of functions having summable mixed derivatives. *Vestnik Udmurt. Univer. Ser. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2011, vol. 21, no. 2, pp. 52–67 (in Russian). doi: 10.20537/vm110204 .

35. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Functional analysis.* Oxford: Pergamon Press, 1982, 604 p. ISBN: 9781483138251 . Original Russian text published in Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsional'nyi analiz*, Moscow, Nauka Publ., 1977, 741 p.

36. Krasnosel'skii M.A. *Positive solutions of operator equations.* Groningen: P. Noordhoff Ltd., 1964, 381 p. Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A. *Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravnenii*, Moscow: GIFML Publ., 1962, 396 p.

37. Sumin V.I. On Functional Volterra Equations. *Russian Math.* (*Iz. VUZ*), 1995, vol. 39, no. 9, pp. 65–75.

38. Rota G.-C., Strang G. A note on the joint spectral radius. *Indag. Math.*, 1960, vol. 22, pp. 379–381.

39. Shulman V.S., Turovskii Y.V. Joint spectral radius, operator semigroups, and a problem of W. Wojtynski. *J. Func. Anal.*, 2000, vol. 177, iss. 2, pp. 383–441.

40. Shulman V.S. Invariant subspaces and linear operator equations. *Abstract of Dissertation*, Doct. Sci. (Phys.–Math.), Moscow, 2009, 23 p. (in Russian).

41. Sumin V.I., Chernov A.V. Operators in spaces of measurable functions: the Volterra property and quasinilpotency. *Differ. Eq.*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1403–1411.

42. Korzhavina M.S., Sumin V.I. On the boundary value problem for a nonlinear parabolic equation with control in the initial condition. *Proc. Int. Conf. "Modern Methods in Boundary Value Problems Theory. Pontryagin Readings–XXIX".* Moscow: MAKS-Press, 2018, pp. 129–131 (in Russian). ISBN 978-5-9273-2453-8 .
43. Krasnosel'skii M.A., Zabreyko P.P., Pustylnik E.I. et al. *Integral operators in spaces of summable functions.* Groningen: Noordhoff, 1976, 536 p. ISBN: 978-94-010-1544-8 . Original Russian text published in Krasnosel'skii M.A., Zabreiko P.P., Pustyl'nik E.I., Sobolevskii P.E. *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsii.* Moscow: Nauka Publ., 1966, 500 p.

Received December 15, 2018
Revised February 3, 2019
Accepted February 5, 2019

Vladimir Iosifovich Sumin, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Nizhny Novgorod State University named after N. I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, 603950 Russia, e-mail: v_sumin@mail.ru .