ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 1 2019

УДК 517.977.5

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ИМПУЛЬСНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЕМ НЕРАЗРЫВНОСТИ[1]

М. В. Старицын, Н. И. Погодаев

Исследуется задача импульсного управления специальным классом распределенных динамических систем. Такие системы представляют собой результат релаксации (расширения множества управляемых процессов) уравнения неразрывности с аффинным по управлению векторным полем, когда управляющие воздействия ограничены лишь интегрально. Задачи рассматриваемого типа возникают в области теории управления ансамблями траекторий, мультиагентными системами и системами с нечеткими начальными данными. Состояния системы до релаксации могут быть сколь угодно близки к разрывным кривым в пространстве вероятностных мер, поэтому соответствующая экстремальная задача не имеет решения. Релаксация приводит к корректной задаче оптимального управления, поставленной на обобщенных решениях уравнения неразрывности — мерозначных кривых ограниченной вариации. Дано описание обобщенных решений с помощью разрывной замены времени в траекториях характеристической системы нашего уравнения. Исследованы некоторые теоретико-функциональные свойства таких решений. Получено их представление с помощью дифференциальных уравнений с мерами. Основной результат статьи — необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума для расширенной задачи. В заключение обсуждаются перспективы разработки вычислительных методов на основе полученных результатов.

Ключевые слова: мультиагентные системы, уравнение неразрывности, импульсно-траекторные расширения, управление ансамблями траекторий, импульсное управление, оптимальное управление, принцип максимума, численные методы оптимального управления.

M. V. Staritsyn, N. I. Pogodaev. On a class of problems of optimal impulse control for a continuity equation.

We consider an impulse control problem for a special class of distributed dynamical systems. Such systems result from a relaxation (extension of the set of control processes) of a continuity equation driven by a vector field affine in the control, when there are only integral constraints on the input signals. Problems of this kind appear in the theory of ensemble control and control of multi-agent systems and systems with uncertain initial data. Prior to relaxation, the states of the system may be arbitrarily close to discontinuous curves in the space of probability measures, which leads to the unsolvability of the corresponding extremal problem. The relaxation produces a well-posed optimal control problem for generalized solutions of the continuity equation, which are measure-valued curves with bounded variation. Generalized solutions are described by means of a discontinuous time change in the trajectories of the characteristic system. Some function-theoretic properties of these solutions are studied, and their representation in terms of measure differential equations is obtained. The main result is a necessary optimality condition in the form of the maximum principle for the relaxed problem. Finally, we discuss the possibilities of applying the results for the development of numerical algorithms.

Keywords: multi-agent systems, continuity equation, impulse-trajectory relaxation, ensemble control, impulse control, optimal control, maximum principle, numerical algorithms for optimal control.

MSC: 93C10, 93C23

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-229-244

Введение

В статье рассматриваются специальный класс распределенных динамических систем, описывающих оптимальный перенос массы (вероятностной меры) в присутствии внешних воздействий высокой интенсивности (в пределе — импульсных), и связанная с подобными системами экстремальная вариационная задача. Последняя относится к области управления ансамблями траекторий ([1; 2]) или системами с нечеткими начальными данными [3–6].

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 18-31-20030 и 18-01-00026).

Изучаемый нами класс систем возникает как релаксационное расширение уравнения неразрывности с аффинным по переменной управления векторным полем, когда допустимые управляющие воздействия (функции времени) не ограничены равномерно в поточечном смысле. Здесь под релаксационным расширением мы понимаем замыкание множества фазовых траекторий — абсолютно непрерывных кривых в пространстве вероятностных мер — в некоторой подходящей слабой топологии пространства кривых конечной длины (грубо говоря, расширение состоит в допущении наряду с "обычными", измеримыми существенно ограниченными управлениями обобщенных воздействий типа δ-функции Дирака, или, более общо, знакопеременных мер Лебега — Стилтьеса). Необходимость подобного расширения связана с проблемой существования решения соответствующей экстремальной задачи. После расширения наша модель представляет собой бесконечномерный аналог импульсных систем, возникающих в классической теории управления при описании процессов с разрывными состояниями, порожденными "толчками", ударами и т. п. [7–16].

Примеры прикладных моделей, допускающих математическую формализацию в терминах задач управления уравнением неразрывности с ограниченным векторным полем, приведены, например, в [17]. Теория таких систем составляет одну из интенсивно развивающихся областей современной прикладной математики и тесно связана с проблемой оптимального переноса массы, теорией градиентных потоков на пространствах мер и аппаратом монотонных операторов [5; 18–21]. Между тем подобные динамические системы с разрывными траекториями, как и соответствующие задачи импульсного управления, практически не изучены. Некоторые простейшие примеры, привлекающие внимание к таким постановкам, представлены в [22; 23].

Статья продолжает исследование [23] и опирается на работы [22; 24]. Основной результат статьи — необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума для задачи оптимального управления, предложенной в [23].

1. Уравнение неразрывности с неограниченным векторным полем. Постановка экстремальной задачи

Введем некоторые необходимые обозначения. Всюду далее $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначает σ-алгебру борелевских подмножеств векторного пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ есть пространство вероятностных мер на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ — (полное сепарабельное [18]) метрическое пространство, образованное вероятностными мерами с конечным первым моментом

$$\mathrm{m}_1(\mu) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} |\eta| \, d\mu(\eta)$$

и снабженное метрикой Канторовича

$$W_1(\mu, \nu) \doteq \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d(\nu - \mu) \;\middle|\; \begin{array}{c} \varphi \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \\ \mathrm{Lip}(\varphi) \leq 1 \end{array} \right\}$$

($\mathrm{Lip}(f)$ — максимальная константа Липшица функции f).

Объектом изучения будет задача управления некоторым "ансамблем" (сообществом — множеством однотипных "агентов") на заданном отрезке времени $\mathcal{T} \doteq [0, T]$. Зачастую для моделирования динамики таких ансамблей удобным оказывается формализм потоков мер [18;25]: очевидно, что если агентов достаточно много, нет смысла (или попросту невозможно) рассматривать их по отдельности и отслеживать траекторию каждого. Удобнее говорить о множествах агентов. При этом состояние ансамбля разумно интерпретировать как вероятностную меру, указывающую, какая доля агентов (часть сообщества) находится в данный момент в том или ином состоянии.

Пусть исходное состояние ансамбля задано мерой $\vartheta \in \mathcal{P}_1$. Представим, что эта мера $\vartheta \doteq \mu_0$ изменяется во времени под воздействием управляемого векторного поля

$$f_t(x) \doteq f\big(x, u(t)\big), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{R}.$$

Здесь u — функция управления (для простоты мы ограничиваемся случаем скалярных управлений; векторный случай рассмотрен, например, в [26]). Управляющие воздействия, признаваемые допустимыми, выбираются из некоторого заданного класса функций, который будет уточнен ниже. Обратим внимание, что u предполагаются функциями лишь переменной времени и не зависят от состояния агентов, т. е. управляющий сигнал является универсальным, общим для всего ансамбля. Такое допущение целесообразно во многих практических ситуациях, например при моделировании некоторых феноменов группового поведения, когда невозможно сообщить персональную инструкцию "каждому в отдельности", а можно лишь дать общую команду.

Как известно, "дрейф" $t \mapsto \mu_t$ меры ϑ описывается уравнением неразрывности

$$\mu_0 = \vartheta; \quad \partial_t \mu_t + \nabla \cdot (\mu_t f_t) = 0.$$

Здесь и далее ∇ означает дифференцирование по переменной x.

Пусть цель управления ансамблем состоит в максимизации некоторого "дохода", выраженного терминальным критерием качества

$$I \doteq \int_{\mathbb{R}^n} \ell(x)\, d\mu_T(x),$$

где $\ell : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ — заданная функция (пока лишь измеримая по Борелю). К примеру, в роли функции ℓ может выступать характеристическая функция χ_Ω некоторого заданного целевого (борелевского) множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. В этом случае (который рассмотрен в [22; 24] и останется за пределами настоящей статьи) задача состоит в максимизации "массы" целевого множества в заданный конечный момент времени; типичный пример здесь — проблема фокусировки пучков заряженых частиц [24; 27].

Случай, когда класс $\mathcal{U}$ образован измеримыми существенно ограниченными функциями, и векторное поле $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ достаточно регулярно, исследован в [24; 28]. Нас интересует ситуация, когда отображение $t \mapsto f_t$ оказывается не ограниченным равномерно на $\mathcal{T}$ в поточечном смысле, т. е. вектор скорости может быть сколь угодно большим по норме $\mathbb{R}^n$. Наиболее простой и востребованный с прикладной точки зрения класс таких задач возникает, когда функция f имеет аффинную по управлению структуру:

$$f\big(x, u\big) \doteq g(x) + h(x)\, u,$$

а класс $\mathcal{U}$ допустимых управляющих функций u имеет вид

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(M) \doteq \big\{u \in L_\infty(\mathcal{T}, \mathbb{R}) \big|\ \|u\|_{L_1(\mathcal{T},\mathbb{R})} \le M\big\}^2.$$

Здесь $M > 0$ — заданный "ресурс" управления, который допускается расходовать по своему усмотрению, в том числе "почти мгновенно".

[2]Поскольку управления в нашем случае могут принимать значения во всем пространстве (на них не наложено никаких ограничений конусного типа), то для любой траектории $\mu_{(\cdot)}$ системы (1.1), отвечающей управлению u с ресурсом $\|u\|_{L_1(\mathcal{T},\mathbb{R})} < M$, найдется другое управление $\tilde{u}$, такое что i) $\|\tilde{u}\|_{L_1(\mathcal{T},\mathbb{R})} = M$ и ii) для соответствующей траектории $\tilde{\mu}_{(\cdot)}$ имеет место равенство $\mu_T = \tilde{\mu}_T$. Грубого говоря, остаточный ресурс управления может всегда быть выработан "на холостом ходу". По этой причине задача (P) может быть эквивалентным (с точки зрения оптимального значения) образом поставлена на множестве процессов, отвечающих ограничению типа равенства $\|u\|_{L_1(\mathcal{T},\mathbb{R})} = M$. Хотя это и не вполне целесообразно с точки зрения интерпретации целевого функционала задачи в терминах "дохода", данное соглашение слегка упрощает дальнейший анализ и мы будем далее его придерживаться.

В отношении функций $g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ мы потребуем выполнения стандартного условия регулярности: существует константа $L > 0$ такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$(H) \qquad \big|g(x) - g(y)\big| + |h(x) - h(y)| \le L\,|x - y|.$$

Таким образом, объектом нашего внимания является следующая задача оптимального управления:

$$(P) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \ell(x)\, d\mu_T(x) \to \sup \ \text{ при ограничениях}$$

$$\mu_0 = \vartheta, \quad \partial_t\, \mu_t + \nabla \cdot (\mu_t\, f_t) = 0, \quad t \in \mathcal{T} \doteq [0, T], \tag{1.1}$$

$$f_t(x) \doteq g(x) + h(x)\, u(t),$$

$$u \in \mathcal{U}. \tag{1.2}$$

Решение $t \mapsto \mu_t$ уравнения неразрывности (1.1) понимается нами стандартным образом — в слабом смысле (в смысле распределений): решением признается функция $\mu\colon \mathcal{T} \mapsto \mathcal{P}$, удовлетворяющая равенству

$$\int_{\mathcal{T}} \int_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_t\, \varphi(t, x) + \langle f_t(x), \nabla\, \varphi(t, x)\rangle\big)\, \mathrm{d}\mu_t(x)\, \mathrm{d}t = 0$$

для любой гладкой функции $\varphi : (0, T) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ с компактным носителем. Множество решений системы (1.1), (1.2) обозначим через $\mathcal{M} \doteq \mathcal{M}(\mathcal{U})$.

Очевидно, что задача (P) является вырожденной в смысле [10]. Действительно, легко понять, что управления класса $\mathcal{U}$ могут быть близки по эффекту, производимому на систему, к импульсным воздействиям типа δ-функции Дирака. При этом соответствующие траектории — абсолютно непрерывные кривые в $\mathcal{P}_1$ — оказываются близкими к разрывным мерозначным функциям, которые, конечно, не могут удовлетворять уравнению (1.1) и поэтому не допустимы в (P). Этот факт не оставляет надежды на существование решения нашей экстремальной задачи. Следуя методологии [10], мы ставим цель — построить расширение (релаксацию) задачи (P). Это можно сделать путем перехода к подходящим образом ослабленному понятию "допустимости" — некоторого расширения класса управлений и включения в множество допустимых траекторий предельных, разрывных решений.

1.1. Характеристики

Как известно, с распределенной системой (1.1) связана следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, называемая *характеристической*:

$$x(\theta) = \eta; \quad \dot{x} = f(x, u), \tag{1.3}$$

где параметры θ, η пробегают соответственно $[0, T)$ и $\mathbb{R}^n$. Пусть дана некоторая измеримая ограниченная функция $u : \mathcal{T} \mapsto \mathbb{R}$, и $t \mapsto X^t_\theta[u](\eta)$, $t \in [\theta, T]$, — соответствующее решение задачи Коши (1.3). Тогда для любого слабо непрерывного семейства $\{\mu_t\}_{t \in \mathcal{T}} \subset \mathcal{P}_1$ такого, что $t \mapsto \mu_t$ удовлетворяет уравнению неразрывности (1.1) при управлении u, справедливо представление

$$\mu_t = \big(X^t[u]\big)_\sharp\, \vartheta, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.4}$$

Здесь $X^t[u](\eta) \doteq X^t_0[u](\eta)$, а $F_\sharp\mu$ — мера образа μ при отображении $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.

Напомним, что для любого измеримого по Борелю отображения F и всякой $\mu \in \mathcal{P}$, $F_\sharp$ есть оператор $\mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$, определенный соотношением

$$F_\sharp \mu(E) = \mu\big(F^{-1}(E)\big) \text{ для каждого } E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Ряд важных свойств оператора $_\sharp$ представлен, например, в [24].

Перейдем непосредственно к построению релаксации задачи (P). Как мы увидим, подходящая релаксация достигается в результате замыкания множества решений системы (1.1), (1.2) в некоторой специальной слабой топологии пространства мерозначных кривых ограниченной вариации.

1.2. Импульсно-траекторное расширение. Обобщенные решения уравнения неразрывности

Пусть $\mathcal{X} \doteq (\mathcal{X}, d)$ — метрическое пространство и $\mathcal{I} \doteq [\underline{t}, \overline{t}] \subseteq \mathbb{R}$ — заданный отрезок. Рассмотрим функцию $F_{(\cdot)} : \mathbb{R} \ni t \mapsto F_t \in X$ (часто такое отображение называют *кривой* в $\mathcal{X}$). Говорят, что F имеет на $\mathcal{I}$ *ограниченную вариацию* (соответственно, кривая имеет конечную длину), если конечна величина

$$\operatorname{Var}_I F\,(= \operatorname{length} F) \doteq \sup \sum_{i=1}^{\operatorname{card}(\pi)-1} d\big(F_{t_i}, F_{t_{i+1}}\big),$$

называемая *полной вариацией функции F на $\mathcal{I}$* (иначе, длиной соответствующей кривой); sup здесь взят по всевозможным конечным разбиениям $\pi = \{t_i\} \subset \mathcal{I}$, $t_i < t_{i+1}$, отрезка $\mathcal{I}$. Множество функций $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{X}$ ограниченной вариации обозначим как $BV(\mathcal{I}, \mathcal{X})$ и выделим в нем подмножество $BV^+(\mathcal{I}, \mathcal{X})$, образованное всеми $F \in BV(\mathcal{I}, \mathcal{X})$, *непрерывными справа* на $[\underline{t}, \overline{t})$ (ясно что эквивалентным в силу теоретико-функциональных свойств объектом будет множество всех функций, непрерывных слева); $F(t^-)$ обозначает односторонний предел $\mathcal{F}$ в точке t. Напомним, что любая функция $F \in BV(\mathcal{I}, \mathcal{X})$ допускает разрывы лишь первого рода, и множество $\Delta_F \doteq \{\tau \in \mathcal{I} : F(\tau) - F(\tau^-) \neq 0\}$ точек ее разрыва не более чем счетно.

Следующее определение, предложенное в [22], переносит понятие [12] обобщенного решения сосредоточенной управляемой системы на бесконечномерный случай (1.1), (1.2).

Определение 1. Мерозначная функция $\mu_{(\cdot)} \in BV^+(\mathcal{T}, \mathcal{P}_1)$ называется обощенным решением распределенной управляемой системы (1.1), (1.2), если найдется последовательность управлений $\{u^k\}_{k \geq 0} \subset \mathcal{U}$ такая, что для соответствующей последовательности решений $\big\{\mu^k_{(\cdot)}\big\}_{k \geq 0} \subset \mathcal{M}$ системы (1.1), (1.2) имеет место сходимость $\mu^k_t \to_{k \to \infty} \mu_t$ (слабо в $\mathcal{P}$) во всех точках непрерывности $t \in [0, T)$ предельной функции и в точке $t = T$.

В дальнейшем мы будем обозначать тип сходимости, указанный в данном определении символом $\rightharpoondown$.

Заметим, что определение сохраняет смысл и для более широкого класса вырожденных уравнений неразрывности, нелинейных по управлению, характеристиками которых выступают, к примеру, сосредоточенные системы вида [11; 12; 15].

1.3. Пространственно-временное преобразование

Для того чтобы получить явное описание расширения системы (1.1), (1.2) в смысле определения 1, удобно сначала некоторым образом преобразовать нашу модель. Как показано в [22], при любом фиксированном $u \in \mathcal{U}$ система (1.1), (1.2) может быть сведена к следующему уравнению неразрывности:

$$\nu_0 = \vartheta; \quad \partial_s \nu_s + \nabla \cdot (\nu_s \hat{f}_s) = 0, \quad s \in \mathcal{S} \doteq [0, S]; \quad S \doteq T + M, \quad \hat{f}_s(y) \doteq \hat{f}\big(y, \alpha(s), \beta(s)\big). \quad (1.5)$$

Здесь

$$\hat f(y,\alpha,\beta) \doteq \alpha\, g(y) + h(y)\,\beta, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$
$$\big(\alpha(s),\beta(s)\big) \doteq \Big(\frac{1}{1+|u(t)|}, \frac{u(t)}{1+|u(t)|}\Big)\Big|_{t=\xi(s)}, \tag{1.6}$$

а $\xi = \xi[\alpha] : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{T}$ задается условиями

$$\xi' \doteq \frac{d}{ds}\xi(s) = \alpha(s), \quad \xi(0) = 0, \tag{1.7}$$

где α определено в (1.6). Функция $\xi = \xi[\alpha]$ представляет переменную времени t в новой временной шкале s. Очевидно следующее: $\xi' \in (0,1]$ $\mathcal{L}^1$-п.в. на $\mathcal{S}$; функция $s \mapsto \xi(s)$ абсолютно непрерывна и строго возрастает (следовательно, имеет обратную $t \mapsto \xi^{-1}(t)$) и справедливо равенство

$$\hat f = \xi'\,(f \circ \xi),$$

где символ $\circ$ обозначает композицию функций.

В силу [18, лемма 2.7] пара (μ_t, f_t) удовлетворяет уравнению (1.1), если и только если $(\nu_s, \hat f_s)$ удовлетворяет (1.5), при этом

$$\mu_t = \nu_{\xi^{-1}(t)}.$$

Мы видим, что любое управление $u \in \mathcal{U}$ генерирует пару функций (α,β) таких, что

$$\|\alpha\|_{L_1(\mathcal{S},\mathbb{R})} = T; \quad \alpha(s) > 0, \quad \alpha(s) + |\beta(s)| = 1 \text{ для п.в. } s \in \mathcal{S}. \tag{1.8}$$

С другой стороны, имея пару $(\alpha,\beta) \in L_\infty(\mathcal{S},\mathbb{R}^2)$ с указанными свойствами, можно однозначно восстановить управление $u \in \mathcal{U}$ в исходной задаче, полагая

$$u = \beta \circ \xi^{-1}[\alpha].$$

Таким образом, система (1.5) с управлениями $(\alpha,\beta) \in L_\infty(\mathcal{S},\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющими (1.8), представляет собой эквивалент исходной системы (1.1), (1.2) в силу замены переменной времени $t = \xi(s)$.

Теперь расширим класс управлений (α,β) путем овыпуклення ограничений в (1.8):

$$(\alpha,\beta) \in \widehat{\mathcal{U}} \doteq \left\{ (\alpha,\beta) \in L_\infty(\mathcal{S},\mathbb{R}^2) \,\middle|\, \begin{array}{c} (\alpha,\beta)(s) \in \mathcal{K}\ \mathcal{L}^1\text{-п.в. } \mathcal{S} \\ \|\alpha\|_{L_1(\mathcal{S},\mathbb{R})} = T \end{array} \right\}, \tag{1.9}$$

где

$$\mathcal{K} \doteq \big\{ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 |\, \alpha \ge 0,\ \alpha + |\beta| \le 1 \big\}.$$

Оказывается, такое расширение обеспечивает искомую релаксацию нашей экстремальной задачи: “дополнительные” управления из $\widehat{\mathcal{U}}$ соответствуют пределам решений системы (1.1), (1.2) в смысле сходимости $\rightharpoondown$, но уже в силу некоторого сингулярного преобразования — разрывной замены времени. Последняя определяется с помощью функции $t \mapsto \xi^{\leftarrow}(t)$, *псевдообратной* к решению $\xi = \xi[\alpha]$ “уравнения” (1.7) при $(\alpha,\beta) \in \widehat{\mathcal{U}}$ (теперь ξ уже не обязательно строго монотонна и обратная к ней не определена). Эта функция задается соотношениями

$$\xi^{\leftarrow}(t) = \inf\big\{ s \in \mathcal{S} : \xi(s) > t \big\}, \quad t \in [0,T), \quad \xi^{\leftarrow}(T) = S.$$

Как известно [12], устроенная таким образом псевдообратная функция строго возрастает на $\mathcal{T}$, непрерывна справа на $[0,T)$ и имеет ограниченную вариацию; кроме того, для всех $t \in \mathcal{T}$ справедливо $(\xi \circ \xi^{\leftarrow})(t) = t$ и $(\xi^{\leftarrow} \circ \xi)(s) = s$, как только $t = \xi(s)$ — точка непрерывности $\xi^{\leftarrow}$.

Рассмотрим характеристическую для (1.5) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y(\theta) = \eta, \quad y' = \hat{f}(y, \alpha, \beta) \doteq \alpha(s)\, g(y) + h(y)\, \beta(s). \tag{1.10}$$

В предположении (H) при любых заданных $x \in \mathbb{R}^n$ и $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{U}}$ задача Коши (1.10) имеет единственное решение $s \mapsto Y^s_\theta[\alpha, \beta](\eta)$ на всем отрезке $[\theta, S]$. Более того, для любого слабо непрерывного семейства мер $\{\nu_s\}_{s \in \mathcal{S}} \subset \mathcal{P}_1$, такого что $s \mapsto \nu_s$ есть решение (1.5), справедливо представление $\nu_s = (Y^s)_\sharp\, \vartheta,\ s \in \mathcal{S}$, где $Y^s(\eta) \doteq Y^s_0[\alpha, \beta](\eta)$.

Решения системы (1.10), отвечающие любому $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{U}}$ (а не только управлениям, удовлетворяющим (1.8)) могут быть “спроектированы” в исходную временную шкалу $t \in \mathcal{T}$. Такая “проекция” задается разрывной заменой времени

$$X^t(\eta) = Y^{\xi^{\leftarrow}[\alpha](t)}[\alpha, \beta](\eta) \text{ для всех } t \in \mathcal{T}. \tag{1.11}$$

В то же время само управление $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{U}}$ преобразуется в набор $\mathbf{U} \doteq (U, V, \{u_\tau\}_{\tau \in \Delta_V})$. Здесь $U \doteq U[\alpha, \beta] \in BV^+(\mathcal{T}, \mathbb{R})$, $\mathrm{Var}_{\mathcal{T}}\, U = M$; функция $V \in BV^+(\mathcal{T}, \mathbb{R}_+)$ такова, что $V(0^-) = 0$, $V(T) = M$, $V \geq U$, а функции $u_\tau : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, $\tau \in D_V$, удовлетворяют ограничениям

$$\bigl|u_\tau(\varsigma)\bigr| = V(\tau) - V(\tau^-) \ \ \mathcal{L}^1\text{-п.в. на } [0, 1]; \quad \int_0^1 u_\tau(\varsigma)\, d\varsigma = U(\tau) - U(\tau^-). \tag{1.12}$$

Наборы $\mathbf{U}$, определенные указанным образом, назовем *обобщенными управлениями* задачи (P) и обозначим их совокупность $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathcal{U}}(M)$. Понятие обобщенного управления позволяет получить полезное представление [12, теорема 4.7] отображения $t \mapsto X^t(\eta)$, заданного условием (1.11), в виде интегрального уравнения с мерами:

$$x(t) = \eta + \int_0^t g\bigl(x(\varsigma)\bigr)\, d\varsigma + \int_0^t h\bigl(x(\varsigma)\bigr)\, dU_c(\varsigma) + \sum_{\tau \in [0, t],\ \tau \in \Delta_V} \bigl[\varkappa_\tau(1) - x(\tau^-)\bigr]. \tag{1.13}$$

Интегрирование по непрерывной компоненте U_c разложения Лебега функции U понимается здесь в смысле Лебега — Стилтьеса; $\Delta_V \subset \mathcal{T}$ есть множество точек скачка V; для каждого $\tau \in \Delta_V$ отображение $\varsigma \mapsto \varkappa_\tau(\varsigma)$ есть решение “предельной” системы[3]:

$$\frac{d}{d\varsigma}\varkappa(\varsigma) = h\bigl(\varkappa(\varsigma)\bigr)\, u_\tau(\varsigma), \quad \varkappa(0) = x(\tau^-). \tag{1.14}$$

Основываясь на представлении (1.13), (1.14) обобщенных решений характеристической системы, можно продолжить формулу (1.4), допустив в ней обобщенные управления: для всякого $\mathbf{U} \in \overline{\mathcal{U}}$ определим мерозначную функцию $\mu_{(\cdot)}[\mathbf{U}]$ соотношением

$$\mu_t = \bigl(X^t[\mathbf{U}]\bigr)_\sharp\, \vartheta, \quad t \in \mathcal{T}, \tag{1.15}$$

[3]На самом деле, в рассматриваемом нами простейшем случае скалярных управлений функция V, играющая роль “полной вариации” импульсного управления, и функции u_τ, называемые иногда “управлениями в фазе импульса”, могут быть исключены из рассмотрения, а предельная система может быть упрощена следующим образом:

$$\frac{d}{d\varsigma}\varkappa(\varsigma) = h\bigl(\varkappa(\varsigma)\bigr)\, \bigl[U(\tau) - U(\tau^-)\bigr], \quad \varkappa(0) = x(\tau^-).$$

Мы, однако, предпочтем оперировать с данным выше представлением обобщенного решения из методологических соображений: в общем случае векторных управляющих воздействий управления в фазе импульса неизменно возникают, отражая способ аппроксимации разрывной траектории абсолютно непрерывными функциями [12].

где $t \mapsto X^t[\mathbf{U}](\eta)$ есть решение (1.13), отвечающее обобщенному управлению $\mathbf{U}$ и начальному условию $x(0^-) = \eta \in \mathbb{R}^n$. Положим

$$\overline{\mathcal{M}} \doteq \{\mu_{(\cdot)}[\mathbf{U}] |\, \mathbf{U} \in \overline{\mathcal{U}}\}.$$

Как показано в [22, теорема 1], $\overline{\mathcal{M}}$ в точности совпадает с множеством всех обобщенных решений системы (1.1), (1.2) в смысле определения 1. Более того согласно [22, предложение 1] это множество допускает представление в терминах преобразованной системы (1.5), (1.9):

$$\overline{\mathcal{M}} \doteq \big\{\mu_{(\cdot)}[\alpha,\beta]\colon (\alpha,\beta) \in \widehat{\mathcal{U}}\big\}, \tag{1.16}$$

где отображение $\mathcal{T} \ni t \mapsto \mu_t \doteq \mu_t[\alpha,\beta] \in \mathcal{P}_1$ задано композицией

$$\mu_t[\alpha,\beta] \doteq \nu_{\xi^{\leftarrow}(t)} \doteq \big(Y^{\xi^{\leftarrow}[\alpha](t)}[\alpha,\beta]\big)_\sharp \vartheta, \quad t \in \mathcal{T}. \tag{1.17}$$

Как легко следует из определения множества $\overline{\mathcal{M}}$, его элементы суть мерозначные функции ограниченной вариации, непрерывные справа на $(0,T]$, причем точки разрыва функции $\mu_{(\cdot)}[\mathbf{U}]$ на $(0,T)$ сосредоточены на множестве $\Delta_U \subseteq \Delta_V$ [22, предложение 2].

Отталкиваясь от этих фактов и формулы (1.15), можно получить бесконечномерный аналог системы (1.13), (1.14) — следующее представление обобщенного решения уравнения неразрывности в форме интегрального уравнения с мерами.

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{U} \doteq (U, V, \{u_\tau\})_{\tau\in\Delta_V}) \in \overline{\mathcal{U}}$, $U_{sc} = 0$, *и* $\mu_{(\cdot)} = \mu_{(\cdot)}[\mathbf{U}] \in \overline{\mathcal{M}}$ — *соответствующее обобщенное решение системы* (1.1), (1.2). *Тогда найдется семейство* $m^\tau_{(\cdot)}$, $\tau \in \Delta_U$, *абсолютно непрерывных кривых* $[0,1] \mapsto \mathcal{P}_1$, *таких что выполняются равенства*

$$m^\tau_0 = \mu_{\tau^-}, \quad m^\tau_1 = \mu_\tau, \quad \tau \in \Delta_V,$$

и функции $m^\tau_{(\cdot)}$ *удовлетворяют вместе с* $\mu_{(\cdot)}$ *следующему* уравнению неразрывности с мерами*:*

$$0 = \int\limits_{\mathcal{T}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_t \varphi(t,x) + \langle g(x) + h(x)\, \dot U_{ac}(t), \nabla \varphi(t,x)\rangle\big)\, \mathrm{d}\mu_t(x)\, \mathrm{d}t$$
$$+ \sum_{\tau\in\Delta_U} \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle h(x)\, u_\tau(\varsigma), \nabla \varphi^\tau(\varsigma, x)\rangle\, \mathrm{d}m^\tau_\varsigma(x)\, \mathrm{d}\varsigma \tag{1.18}$$

для любых гладких $\varphi\colon (0,T)\times\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi^\tau\colon [0,1]\times\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\tau \in \Delta_V$, *с компактными носителями* (*если* $\tau = 0$ *и/или* $\tau = T$ — *точки скачка* V, *то функции* φ^0 *и/или* φ^T *определены на множествах* $(0,1]\times\mathbb{R}^n$ *и* $[0,1)\times\mathbb{R}^n$ *соответственно*). *Здесь* U_{ac} — *абсолютно непрерывная компонента разложения Лебега функции ограниченной вариации* U.

Доказательство. Для заданной функции U найдется [12] управление $(\alpha,\beta) \in \widehat{\mathcal{U}}$ такое, что для всех $t \in \mathcal{T}$ справедливо

$$U(t) = \int\limits_0^{\xi^{\leftarrow}(t)} \beta(s)\, \mathrm{d}s,$$

где $\xi^{\leftarrow} = \xi^{\leftarrow}[\alpha]$. Заметим, что в таком случае непрерывная компонента U_c функции U может быть представлена выражением

$$U_c(t) = \int\limits_0^{\xi^{\leftarrow}(t)} \chi_{\left\{s\in\mathcal{S}\colon\, \xi(s)\in\mathcal{T}\setminus\Delta_{\xi^{\leftarrow}}\right\}}(s)\, \beta(s)\, \mathrm{d}s,$$

(напомним, что χ_A означает характеристическую функцию множества A) а ее скачки возникают в точках $\tau \in \Delta_{\xi^{\leftarrow}}$ и имеют вид

$$U(\tau) - U(\tau^-) = \int\limits_{\xi^{\leftarrow}(\tau^-)}^{\xi^{\leftarrow}(\tau)} \beta(s)\,\mathrm{d}s.$$

Поскольку мы предположили, что сингулярная непрерывная компонента U_{sc} отсутствует, т. е. $U_c = U_{ac}$, то множество $\big\{s \in \mathcal{S}\colon \xi(s) \in \mathcal{T} \setminus \Delta_{\xi^{\leftarrow}}\big\}$ совпадает с $\big\{s \in \mathcal{S}\colon \alpha(s) > 0\big\}$ (для любого фиксированного представителя класса эквивалентности, с точностью до подмножества лебеговой меры нуль). Другими словами, $\big\{s \in \mathcal{S}\colon \xi(s) \in \mathcal{T} \setminus \Delta_{\xi^{\leftarrow}}\big\}$ не содержит подмножества положительной меры Лебега, на котором выполнялось бы $\alpha(s) = 0$ $\mathcal{L}^1$-п.в. и которое не содержало бы при этом интервалов (т. е. множества типа так называемого. “жирного” множества Кантора; только такие управления могут дать сингулярную непрерывную компоненту меры после разрывной замены времени $s = \xi^{\leftarrow}(t)$). Следовательно, дополнение в $\mathcal{S}$ до $\big\{s \in \mathcal{S}\colon \xi(s) \in \mathcal{T} \setminus \Delta_{\xi^{\leftarrow}}\big\}$, состоящее из интервалов $[\xi^{\leftarrow}(\tau^-), \xi^{\leftarrow}(\tau)]$, с точностью до $\mathcal{L}^1$-нуль множества имеет вид $\big\{s \in \mathcal{S}\colon \alpha(s) = 0\big\}$.

Выберем $\varphi \in C^1_c\big((0,S) \times \mathbb{R}^n\big)$ и положим

$$\varphi(t,x) \doteq \phi\big(\xi^{\leftarrow}(t), x\big), \quad t \in \mathcal{T},\ x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi^\tau(\varsigma, x) \doteq \phi\big(s_\tau(\varsigma), x\big), \quad \tau \in \Delta_{\xi^{\leftarrow}} \doteq \Delta_U,\ \varsigma \in [0,1],\ x \in \mathbb{R}^n,$$

где $s_\tau(\varsigma) \doteq \big[\xi^{\leftarrow}(\tau) - \xi^{\leftarrow}(\tau^-)\big]\varsigma + \xi^{\leftarrow}(\tau^-)$. Легко видеть, что обратная к s_τ определяется выражением $s_\tau^{-1}(s) \doteq \dfrac{s - \xi^{\leftarrow}(\tau^-)}{\xi^{\leftarrow}(\tau) - \xi^{\leftarrow}(\tau^-)}$. Определим семейство мер $t \mapsto \mu_t$ соотношением (1.17), а семейства $\varsigma \mapsto m^\tau_\varsigma$, $\tau \in \Delta_U$, — композицией $m^\tau_\varsigma = \nu_{s_\tau(\varsigma)}$, $\varsigma \in [0,1]$ (заметим, что $m^\tau_0 \doteq \nu_{\xi^{\leftarrow}(\tau^-)} \doteq \mu_{\tau^-}$ и $m^\tau_1 \doteq \nu_{\xi^{\leftarrow}(\tau)} \doteq \mu_\tau$ по определению). Кроме того, положим

$$V(0^-) = 0, \quad V(t) = \int\limits_0^{\xi^{\leftarrow}(t)} \big|\beta(s)\big|\,\mathrm{d}s$$

(тогда ясно, что $V(\tau) - V(\tau^-) = \xi^{\leftarrow}(\tau) - \xi^{\leftarrow}(\tau^-)$ для каждого $\tau \in D_V = D_{\xi^{\leftarrow}}$) и определим управления u_τ в фазе импульса как $u_\tau(\varsigma) \doteq \big[\xi^{\leftarrow}(\tau) - \xi^{\leftarrow}(\tau^-)\big]\,\beta\big(s_\tau(\varsigma)\big)$. Нетрудно проверить, что заданные таким образом функции удовлетворяют ограничениям (1.12).

Из определения слабого решения преобразованного уравнения (1.5), свойств псевдообратного отображения и классической теоремы Лебега о замене переменной под знаком интеграла Лебега — Стилтьеса вытекает представление

$$0 = \int\limits_{\mathcal{S}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_s \phi(s,x) + \langle \alpha(s)\, g(x) + h(x)\beta(s), \nabla \phi(s,x)\rangle\big)\,\mathrm{d}\nu_s(x)\,\mathrm{d}s = I_1 + \sum_{\tau \in \Delta_U} I^\tau_2.$$

Здесь

$$I_1 \doteq \int\limits_{\mathcal{S}} \chi_{\{s \in \mathcal{S}\colon \alpha(s) > 0\}}(s)\, \alpha(s) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{1}{\alpha(s)} \partial_s \phi(s,x) + \Big\langle g(x) + h(x)\,\frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \nabla \phi(s,x)\Big\rangle\Big)\,\mathrm{d}\nu_s(x)\,\mathrm{d}s$$

$$= \int\limits_0^{\xi^{\leftarrow}(T)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\dot{\xi}^{\leftarrow}(t)\Big|_{t = \xi(s)} \partial_s \phi(s,x) + \langle g(x) + h(x)\,\dot{U}_{ac}\big(\xi(s)\big), \nabla \phi(s,x)\rangle\Big)\,\mathrm{d}\nu_s(x)\,\mathrm{d}\xi(s)$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\dot{\xi}^{\leftarrow}(t)\, \partial_s \phi\big(\xi^{\leftarrow}(t), x\big) + \Big\langle g(x) + h(x)\,\dot{U}_{ac}\big((\xi \circ \xi^{\leftarrow})(t)\big), \nabla \phi\big(\xi^{\leftarrow}(t), x\big)\Big\rangle\Big)\,\mathrm{d}\nu_{\xi^{\leftarrow}(t)}(x)\,\mathrm{d}t$$

$$\doteq \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_t \varphi(t,x) + \langle g(x) + h(x)\, \dot{U}_{ac}(t), \nabla \varphi(t,x)\rangle\big)\, \mathrm{d}\mu_t(x)\, \mathrm{d}t$$

(в этих соотношениях под α опять понимается фиксированный представитель соответствующего класса эквивалентности);

$$I_2^\tau \doteq \int\limits_{\xi^{\leftarrow}(\tau^-)}^{\xi^{\leftarrow}(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big(\partial_s \phi(s,x) + \langle h(x)\, \beta(s), \nabla \phi(s,x)\rangle\big)\, \mathrm{d}\nu_s(x)\, \mathrm{d}s$$

$$= \big[\xi^{\leftarrow}(\tau) - \xi^{\leftarrow}(\tau^-)\big] \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\partial_s \phi\big(s_\tau(\varsigma), x\big) + \big\langle h(x)\, \beta\big(s_\tau(\varsigma)\big), \nabla \phi\big(s_\tau(\varsigma), x\big)\big\rangle\Big)\, \mathrm{d}\nu_{s_\tau(\varsigma)}(x)\, \mathrm{d}\varsigma$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Big(\partial_\varsigma \varphi^\tau(\varsigma, x) + \big\langle h(x)\, u_\tau(\varsigma), \nabla \varphi^\tau(\varsigma, x)\big\rangle\Big)\, \mathrm{d}m_\varsigma^\tau(x)\, \mathrm{d}\varsigma.$$

Очевидно, найденное представление совпадает с (1.18).

2. Редукция и релаксация задачи оптимального управления. Принцип максимума

Наряду с (P) рассмотрим следующие задачи оптимального управления.

$(\overline{P})$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \ell(x)\, d\mu_T(x) \to \max \ \text{ при условии } \mu_{(\cdot)} \in \overline{\mathcal{M}}.$$

(RP)
$$\hat{I} \doteq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \ell(x)\, d\nu_S(x) \to \max \ \text{ при ограничениях } (1.5), (1.9).$$

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* (H), *а функция* ℓ *непрерывна. Тогда задачи* $(\overline{P})$ *и* (RP) *имеют решения, причем* $\sup(P) = \max(\overline{P}) = \max(RP)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $(\alpha^k, \beta^k) \in \mathcal{A}$ сходится к (α, β) слабо в $L_1(\mathcal{S}; \mathbb{R}^2)$. Тогда для каждого $x \in \mathbb{R}^n$ последовательность $\alpha^k g(x) + \beta^k h(x)$ сходится к $\alpha g(x) + \beta h(x)$ слабо в $L_1(\mathcal{S}; \mathbb{R}^n)$. Учитывая это наблюдение и повторяя дословно доказательство [28, утверждение 2], устанавливаем непрерывность отображения $(\alpha, \beta) \mapsto \nu[\alpha, \beta]$ как функции из $L_1^w(\mathcal{S}; \mathbb{R}^2)$ в $C(\mathcal{S}, \mathcal{P}_1)$. Здесь символом L_1^w обозначаено пространство L^1, снабженное слабой топологией $\sigma(L_1, L_\infty)$. Далее, очевидно, что $\nu \mapsto \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \ell(x) \nu_S(x)$ непрерывно отображает $C(\mathcal{S}, \mathcal{P}_1)$ в $\mathbb{R}$. Остается заметить, что множество $\mathcal{A}$ компактно в $L_1^w(\mathcal{S}; \mathbb{R}^2)$ в силу теоремы Данфорда — Петтиса.Теперь существование решения в задаче (RP) является прямым следствием теоремы Вейерштрасса.

Ввиду представления (1.16) каждому решению $\nu_{(\cdot)}$ редуцированной задачи соответствует кривая $\mu_{(\cdot)} \in \overline{\mathcal{M}}$, такая что $\mu_T = \nu_S$. Отсюда вытекает существование решения в задаче $(\overline{P})$, а также равенство $\max(\overline{P}) = \max(RP)$. Наконец, равенство $\sup(P) = \max(\overline{P})$ является прямым следствием определения 1. ☐

2.1. Принцип максимума в преобразованной задаче

Пусть $\ell \in C^1_b(\mathbb{R}^n)$, $g, h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Рассмотрим задачу (RP) и выпишем для нее необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума. Вывод этого результата опирается на схему [28]. Ситуация, однако, осложняется наличием интегрального условия на управление в (1.9) (или же эквивалентного терминального ограничения на дополнительную фазовую переменную), что не позволяет применить результат [28] напрямую.

Для начала представим множество управляющих функций $\widehat{\mathcal{U}}$ в (1.9) как множество пар (α, β) таких, что

$$\alpha \in \mathcal{A} \doteq \left\{\alpha \in L_1(\mathcal{S}, \mathbb{R})\colon \alpha(t) \in [0,1],\ \int\limits_0^T \alpha(t)\,\mathrm{d}t = M\right\},$$

$$\beta \in \mathcal{B}(\alpha) \doteq \big\{\beta \in L_1(\mathcal{S}, \mathbb{R})\colon \alpha(t) - 1 \le \beta(t) \le 1 - \alpha(t)\big\}.$$

Весьма полезным будет следующее утверждение [29], дающее формулу для вычисления производной потока одного векторного поля “по направлению” другого.

Лемма. *Пусть даны зависящие от времени векторные поля f, g на $\mathbb{R}^n$, $\Phi^{s,t}$ обозначает поток поля f, а $\Phi^{s,t}_\theta$ — поток возмущенного поля $f + \theta g$, $\theta \in \mathbb{R}$. Справедлива следующая формула*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\,\Phi^{s,t}_\theta(x)\Big|_{\theta=0} = \int\limits_s^t (\Phi^{\tau,t}_*\, g_\tau)(x_t)\,\mathrm{d}\tau,$$

где $g_\tau = g(\tau,\cdot)$, а оператор $\Phi^{s,t}_*: C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \mapsto C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, порожденный отображением $\Phi^{s,t}$, преобразует векторное поле $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ в другое векторное поле по правилу

$$(\Phi^{s,t}_*\, h)\big(\Phi^{s,t}(x)\big) = D\,\Phi^{s,t}(x)\,h(x).$$

Пусть $(\bar\alpha, \bar\beta), (\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{U}}$, $(\bar\alpha, \bar\beta) \ne (\alpha, \beta)$. Очевидно, что для любого $\theta \in [0,1]$ также

$$(\alpha_\theta, \beta_\theta) \doteq (\bar\alpha, \bar\beta) + \theta\,(\alpha - \bar\alpha, \beta - \bar\beta) \in \widehat{\mathcal{U}}.$$

Ввиду линейности функции $\hat f$ по (α, β), семейство векторных полей $\hat f^\theta_s(x) \doteq \hat f\,(x, \alpha_\theta(s), \beta_\theta(s))$ может быть представлено в виде

$$\hat f^\theta_s(x) = \hat f\big(x, \bar\alpha(s), \bar\beta(s)\big) + \theta\,\Big(\hat f\big(x, \alpha(s), \beta(s)\big) - \hat f\big(x, \bar\alpha(s), \bar\beta(s)\big)\Big).$$

Применяя к последнему выражению лемму и повторяя выкладки [28, доказательство теоремы 2], получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\hat I(\alpha_\theta, \beta_\theta)\Big|_{\theta=0} = \int\limits_{\mathcal{S}}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \nabla\, p(s,x)\cdot\Big(\hat f\big(x, \alpha(s), \beta(s)\big) - \hat f\big(x, \bar\alpha(s), \bar\beta(s)\big)\Big)\,\mathrm{d}\nu_s(x)\,\mathrm{d}s, \tag{2.19}$$

где $p = p(s,x)$ — решение транспортного уравнения

$$\partial_s\, p + \hat f\big(x, \alpha(s), \beta(s)\big)\cdot\nabla p = 0, \quad p(S, x) = \ell(x). \tag{2.20}$$

Если теперь $(\bar\alpha, \bar\beta)$ — оптимальное управление в задаче (RP), то интеграл в правой части (2.19) должен быть неположителен для всех $(\alpha, \beta) \in \widehat{\mathcal{U}}$. Другими словами,

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha\in\mathcal{A},\ \beta\in\mathcal{B}(\alpha)} &\int\limits_{\mathcal{S}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla p(s,x)\cdot\hat f\big(x, \alpha(s), \beta(s)\big)\,\mathrm{d}\nu_s(x)\,\mathrm{d}s \\ &= \int\limits_{\mathcal{S}}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \nabla p(s,x)\cdot\hat f\big(x, \bar\alpha(s), \bar\beta(s)\big)\,\mathrm{d}\nu_s(x)\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Отметим, что здесь супремум можно заменить на максимум, поскольку записанная в левой части оптимизационная задача есть задача максимизации аффинной функции на слабо компактном подмножестве $L_1(\mathcal{S},\mathbb{R})$. Теперь по лемме Филиппова [30] левая часть последнего равенства может быть представлена в виде

$$\max_{\alpha\in\mathcal{A}}\int\limits_{\mathcal{S}}\max_{\alpha(t)-1\le\omega\le1-\alpha(t)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla p(s,x)\cdot\hat f\big(s,\alpha(s),\omega\big)\,\mathrm{d}\nu_s(x)\,\mathrm{d}s,$$

или, сокращенно,

$$\max_{\alpha\in\mathcal{A}}\int\limits_{\mathcal{S}}\phi\big(s,\alpha(s)\big)\,\mathrm{d}s, \tag{2.22}$$

где мы обозначили

$$\phi\big(s,\alpha(s)\big)\doteq\max_{\alpha(s)-1\le\omega\le1-\alpha(s)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla p(s,x)\cdot\hat f\big(x,\alpha(s),\omega\big)\,\mathrm{d}\nu_s(x)$$

$$=\alpha(s)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla p(s,x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\nu_s(x)+(1-\alpha(s))\Bigg|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla p(s,x)\cdot h(x)\,\mathrm{d}\nu_s(x)\Bigg|$$

$$=\alpha(s)\,\mathfrak{g}(s)+\big(1-\alpha(s)\big)\,\big|\mathfrak{h}(s)\big|,$$

$$\mathfrak{g}(s)\doteq\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla p(s,x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}\nu_s(x),\quad \mathfrak{h}(s)\doteq\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla p(s,x)\cdot h(x)\,\mathrm{d}\nu_s(x). \tag{2.23}$$

Ввиду аффинной зависимости функции ϕ от α задача (2.22) эквивалентна следующей:

$$-\int\limits_{\mathcal{S}}\phi\big(s,\alpha(s)\big)\,\mathrm{d}s\to\min\qquad\text{при условиях}$$

$$\int\limits_{\mathcal{S}}\alpha(s)\,\mathrm{d}s\;=\;T,\quad \alpha\in\tilde{\mathcal{A}}\doteq\big\{\alpha\in L_1(\mathcal{S},\mathbb{R})\colon\,\alpha(s)\in[0,1]\big\}.$$

Поскольку последняя задача выпукла, по теореме Куна — Таккера [31, теорема 5, гл. 1] найдется множитель $\lambda\in\mathbb{R}$ такой, что

$$\max_{\alpha\in\mathcal{A}}\int\limits_{\mathcal{S}}\phi\big(s,\alpha(s)\big)\,\mathrm{d}s=\max_{\alpha\in\tilde{\mathcal{A}}}\Bigg[\int\limits_{\mathcal{S}}\phi\big(s,\alpha(s)\big)\,\mathrm{d}s+\lambda\Bigg(\int\limits_{\mathcal{S}}\alpha(s)\,\mathrm{d}s-T\Bigg)\Bigg].$$

Учитывая равенство $T=\int_{\mathcal{S}}\bar\alpha(s)\,\mathrm{d}s$ (вытекающее из допустимости $\bar\alpha$ в (RP)) и применяя снова лемму Филиппова, находим, что правая часть последнего соотношения совпадает с выражением

$$\int\limits_{\mathcal{S}}\max_{a\in[0,1]}\big(\phi(s,a)+\lambda\big(a-\bar\alpha(s)\big)\big)\,\mathrm{d}s.$$

Подынтегральное выражение здесь может быть расшифровано в виде

$$\max_{a\in[0,1]}\big(\phi(s,a)+\lambda\big(a-\bar\alpha(s)\big)\big)$$

$$\doteq\max_{a\in[0,1]}\big(a\left(\mathfrak{g}(s)+\lambda\right)+(1-a)\,\big|\mathfrak{h}(s)\big|\big)-\lambda\,\bar\alpha(s)=\max\big\{\mathfrak{g}(s)+\lambda,\big|\mathfrak{h}(s)\big|\big\}-\lambda\,\bar\alpha(s).$$

Подставляя последнее в (2.21), имеем

$$\int_{\mathcal{S}} \Big[\max\big\{\mathfrak{g}(s)+\lambda, |\mathfrak{h}(s)|\big\} - \big(\bar\alpha(s)\,\big(\mathfrak{g}(s)+\lambda\big) + \mathfrak{h}(s)\,\bar\beta(s)\big)\Big]\,\mathrm{d}s \le 0,$$

что ввиду неотрицательности интегранта означает

$$\bar\alpha(s)\,\big(\mathfrak{g}(s)+\lambda\big) + \mathfrak{h}(s)\,\bar\beta(s) = \max\big\{\mathfrak{g}(s)+\lambda, |\mathfrak{h}(s)|\big\} \text{ для } \mathcal{L}^1\text{-п.в. } s\in\mathcal{S}. \tag{2.24}$$

Таким образом, доказан следующий результат:

Теорема 2 (принцип максимума в преобразованной задаче). *Пусть имеет место гипотеза* (H) *и* $\ell \in C^1_b(\mathbb{R}^n)$, $g, h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. *Предположим,* $(\bar\alpha, \bar\beta) \in \widehat{\mathcal{U}}$ *— оптимальное управление в задаче* (RP), *и пусть* $s \mapsto \bar\nu_s$ *— соответствующее решение* (1.5). *Тогда найдется* $\lambda \in \mathbb{R}$ *такое, что верно равенство* (2.24). *В последнем функции* $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ *определены соотношениями* (2.23), *где* $p = p(s,x)$ *есть решение транспортного уравнения* (2.20) *при* $(\alpha,\beta) = (\bar\alpha,\bar\beta)$.

Заключение: замечание о вычислительных методах и направления дальнейших исследований

В [23] изложен следующий (весьма очевидный) подход к численному исследованию задачи (P): 1) используя теорему 2, перейти от задачи (P) к (RP); 2) аппроксимировать начальное распределение ϑ дискретной мерой ϑ_ε, удовлетворяющей неравенству $W_1(\vartheta, \vartheta_\varepsilon) < \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$; 3) решить задачу (RP) с начальным распределением ϑ_ε. Последняя задача эквивалентна классической задаче оптимального управления, и для ее решения можно использовать любой из существующих пакетов программ. Нетрудно показать, что если ε мало, то полученное таким образом управление будет “почти оптимальныим” в исходной задаче (RP). Однако при $\varepsilon \to 0$ размерность задачи оптимального управления, сконструированной на третьем шаге, стремится к бесконечности и, как показал вычислительный эксперимент, при хорошей аппроксимации начального распределения существующие пакеты программ не в состоянии ее решить. Более перспективный подход, на наш взгляд, состоит в том, чтобы применить непосредственно к задаче (RP) какой-либо оптимизационный алгоритм, основанный на доказанном в статье принципе максимума (теорема 3). Разработка таких алгоритмов — одна из дальнейших задач нашего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ovseevich A.I., Fedorov A.K.** Asymptotically optimal feedback control for a system of linear oscillators // Dokl. Akad. Nauk. 2013. Vol. 88, no. 2, P. 613–617. doi: 10.1134/S106456241305013X.
2. **Li J.-S.** Ensemble control of finite-dimensional time-varying linear systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2011. Vol. 56, no. 2. P. 345–357.
3. Conservation laws in the modeling of moving crowds / eds. Rinaldo M. Colombo, Mauro Garavello, Magali Lécureux-Mercier, Nikolay Pogodaev // Hyperbolic problems: theory, numerics, applications: Proc. of the Fourteenth Internat. Conf. on Hyperbolic Problems. Springfield: AIMS, 2014. P. 467–474. (AIMS Ser. Appl. Math.; vol. 8).
4. **Fornasier M., Solombrino F.** Mean field optimal control // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. 2014. Vol. 20, no. 4. P. 1123–1152. doi: 10.1051/cocv/2014009.

5. **Marigonda A., Quincampoix M.** Mayer control problem with probabilistic uncertainty on initial positions // J. Dierential Equations. 2018. Vol. 264, no. 5. P. 3212–3252. doi: 10.1016/j.jde.2017.11.014 .
6. **Li J.-S., Khaneja N.** Ensemble control of Bloch equations // IEEE Trans. Autom. Control. 2009. Vol. 54, no. 3. P. 528–536. doi: 10.1109/TAC.2009.2012983 .
7. **Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F.L.** On a generalization of the impulsive control concept: controlling system jumps // Discrete Contin. Dyn. Syst. 2011. Vol. 29, no. 2. P. 403–415. doi: 10.3934/dcds.2011.29.403 .
8. **Bressan Jr. A., Rampazzo F.** Impulsive control systems without commutativity assumptions // *J. Optim. Theory Appl.* 1994. Vol. 81, no. 3. P. 435–457. doi: 10.1007/BF02193094 .
9. **Дыхта В.А., Самсонюк О.Н.** Оптимальное импульсное управление с приложениями. Москва: Физматлит, 2000. 256 p. ISBN: 5-9221-0097-1 .
10. **Gurman V.** Extensions and global estimates for evolutionary discrete control systems // Modelling and inverse problems of control for distributed parameter systems / eds. A. Kurzhanski, I. Lasiecka. Berlin: Springer, 1991. P. 16–21. (Lecture Notes in Control and Inform. Sci.; vol. 154). doi: 10.1007/BFb0044479 .
11. **Karamzin D.Y., de Oliveira V.A., Pereira F.L., Silva G.N.** On the properness of an impulsive control extension of dynamic optimization problems // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2015. Vol. 21, no. 3. P. 857–875. doi: 10.1051/cocv/2014053 .
12. **Miller B.M., Rubinovich E.Y.** Impulsive control in continuous and discrete-continuous systems. N Y: Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2003, 447 p. doi: 10.1007/978-1-4615-0095-7 .
13. **Motta M., Rampazzo F.** Space-time trajectories of nonlinear systems driven by ordinary and impulsive controls // Differential Integral Eq., 1995, vol. 8, no. 2, pp. 269–288.
14. **Rishel R.W.** An extended Pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures // J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control. 1965. Vol. 3. P. 191–205. doi: 10.1137/0303016 .
15. **Warga J.** Optimal control of differential and functional equations. N Y; London: Acad. Press, 1972. 531 p. ISBN: 0127351507 .
16. **Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.** Dynamic impulse systems. Theory and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1997. 256 p. (Math. Appl.; vol. 394). doi: 10.1007/978-94-015-8893-5 .
17. **Brockett R.** Notes on the control of the Liouville equation // Control of partial differential equations / eds. P. Cannarsa, J.-M. Coron. Heidelberg: Springer, 2012. P. 101–129. (Lecture Notes in Math.; vol. 2048). doi: 10.1007/978-3-642-27893-8_2 .
18. **Ambrosio L., Savaré G.** Gradient flows of probability measures // Handbook of differential equations: evolutionary equations / eds. C.M. Dafermos, E. Feireisl. Vol. III. Amsterdam: Elsevier, 2007. P. 1–136. ISBN: 978-0-444-52848-3 .
19. **Santambrogio F.** *Optimal transport for applied mathematicians. Calculus of variations, PDEs, and modeling.* Cham: Birkhäuser Springer, 2015, 353 p. doi: 10.1007/978-3-319-20828-2 .
20. **Bonnet B., Rossi F.** The Pontryagin maximum principle in the Wasserstein space // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2019. Vol. 58, article 11. P. 1–36. doi: 10.1007/s00526-018-1447-2 .
21. **Averboukh Y.** Viability theorem for deterministic mean field type control systems // Set-valued and variational analysis. 2018. Vol. 26, no. 4. P. 993–1008. doi: 10.1007/s11228-018-0479-2 .
22. **Staritsyn M.** On “discontinuous” continuity equation and impulsive ensemble control // Systems and Control Letters. 2018. Vol. 118. P. 77–83. doi: 10.1016/j.sysconle.2018.06.001 .
23. **Staritsyn M.V., Pogodaev N.I.** On a class of impulsive control problems for continuity equations // IFAC-PapersOnLine (17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization CAO 2018). 2018. Vol. 51, no. 32. P. 468–473. doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.429 .
24. **Pogodaev N.** Optimal control of continuity equations // NoDEA Nonlinear Diff. Eq. Appl. 2016. Vol. 23, article 21. P. 1–24. doi: 10.1007/s00030-016-0357-2 .
25. **Piccoli B., Rossi F.** Transport equation with nonlocal velocity in Wasserstein spaces: convergence of numerical schemes // Acta Appl. Math. 2013. Vol. 124, no. 1. P. 73–105. doi: 10.1007/s10440-012-9771-6 .
26. **Pogodaev N., Staritsyn M.** Impulsive relaxation of continuity equations and modeling of colliding ensembles // Optimization and Applications / eds. Y. Evtushenko et al. 2019. P. 367–381. (Communications in Computer and Information Science; vol. 974). doi: 10.1007/978-3-030-10934-9_26 .
27. **Овсянников Д.А., Кирин Н.Е.** Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1980. 228 с.
28. **Pogodaev N.** Program strategies for a dynamic game in the space of measures // Optim. Lett. 2018. P. 1–13. doi: 10.1007/s11590-018-1318-y .
29. **Kipka R.J., Ledyaev Y.S.** Extension of chronological calculus for dynamical systems on manifolds // J. Differ. Equations. 2015. Vol. 258, no. 5. P. 1765–1790. doi: 10.1016/j.jde.2014.11.014 .

30. **Филиппов А.Ф.** О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вест. МГУ. Математика и механика. 1959. № 2. P. 25–32.
31. **Иоффе А.И., Тихомиров В.М.** Теория экстремальных задач. Нелинейный анализ и его приложення. Москва: Наука, 1974. 481 p.

Поступила 15.12.2018
После доработки 5.02.2019
Принята к публикации 11.02.2019

Старицын Максим Владимирович
канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН
г. Иркутск
e-mail: starmaxmath@gmail.com

Погодаев Николай Ильич
канд. физ.-мат. наук, зав. лабораторией
Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова СО РАН
г. Иркутск
e-mail: nickpogo@gmail.com

REFERENCES

1. Ovseevich A. I., Fedorov A. K. Asymptotically optimal feedback control for a system of linear oscillators. *Dokl. Akad. Nauk*, 2013, vol. 88, no. 2, pp. 613–617. doi: 10.1134/S106456241305013X .
2. Li J.-S. Ensemble control of finite-dimensional time-varying linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2011, vol. 56, no. 2, pp. 345–357.
3. Conservation laws in the modeling of moving crowds. In Rinaldo M. Colombo, Mauro Garavello, Magali Lécureux-Mercier, Nikolay Pogodaev (eds.). *Hyperbolic problems: theory, numerics, applications*, Am. Inst. Math. Sci. (AIMS), Springfield, MO, 2014. vol. 8, AIMS Ser. Appl. Math., pp. 467–474.
4. Fornasier M., Solombrino F. Mean field optimal control. *ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations*, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 1123–1152. doi: 10.1051/cocv/2014009 .
5. Marigonda A., Quincampoix M. Mayer control problem with probabilistic uncertainty on initial positions. *J. Dierential Eq.*, 2018, vol. 264, no. 5, pp. 3212–3252. doi: 10.1016/j.jde.2017.11.014 .
6. Li J.-S., Khaneja N. Ensemble control of Bloch equations., *IEEE Trans. Autom. Control*, 2009, vol. 54, no. 3, pp. 528–536. doi: 10.1109/TAC.2009.2012983 .
7. Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. L. On a generalization of the impulsive control concept: controlling system jumps. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2011, vol. 29, no. 2, pp. 403–415. doi: 10.3934/dcds.2011.29.403 .
8. Bressan Jr. A., Rampazzo F. Impulsive control systems without commutativity assumptions. *J. Optim. Theory Appl.*, 1994, vol. 81, no. 3, pp. 435–457. doi: 10.1007/BF02193094 .
9. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* [Optimal impulse equation with applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 256 p. ISBN: 5-9221-0097-1 .
10. Gurman V. Extensions and global estimates for evolutionary discrete control systems. In: Kurzhanski A., Lasiecka I. (eds.) *Modelling and inverse problems of control for distributed parameter systems.* (Laxenburg, 1989). Ser. Lecture Notes in Control and Inform. Sci., vol. 154. Berlin: Springer, 1991, pp. 16–21. doi: 10.1007/BFb0044479 .
11. Karamzin D.Y., V.A. de Oliveira, Pereira F.L., Silva G.N. On the properness of an impulsive control extension of dynamic optimization problems. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2015, vol. 21, no. 3, pp. 857–875. doi: 10.1051/cocv/2014053 .
12. Miller B. M., Rubinovich E. Y. *Impulsive control in continuous and discrete-continuous systems.* N Y: Kluwer Academic/Plenum Publ., 2003, 447 p. doi: 10.1007/978-1-4615-0095-7 .
13. Motta M., Rampazzo F. Space-time trajectories of nonlinear systems driven by ordinary and impulsive controls. *Differential Integral Eq.*, 1995, vol. 8, no. 2, pp. 269–288.
14. Rishel R. W. An extended Pontryagin principle for control systems whose control laws contain measures. *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control*, 1965, vol. 3, pp. 191–205. doi: 10.1137/0303016 .

15. Warga J. Optimal control of differential and functional equations. N Y; London: Acad. Press, 1972, 531 p. ISBN: 0127351507 .
16. Zavalishchin S. T., Sesekin A. N. *Dynamic impulse systems. Theory and applications.* Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. Group, 1997, Ser. Math. Appl., vol. 394, 256 p. doi: 10.1007/978-94-015-8893-5 .
17. Brockett R. Notes on the control of the Liouville equation. In: P. Cannarsa, J.-M. Coron (eds.), *Control of partial differential equations.* Heidelberg: Springer, 2012, Ser. Lecture Notes in Math., vol. 2048. pp. 101–129. doi: 10.1007/978-3-642-27893-8_2 .
18. Ambrosio L., Savaré G. Gradient flows of probability measures. In C.M. Dafermos, E. Feireisl (eds.), *Handbook of differential equations: evolutionary equations*, Vol. III, Amsterdam: Elsevier, 2007, pp. 1–136. ISBN: 978-0-444-52848-3 .
19. Santambrogio F. *Optimal transport for applied mathematicians. Calculus of variations, PDEs, and modeling.* Cham: Birkhäuser Springer, 2015, 353 p. doi: 10.1007/978-3-319-20828-2 .
20. Bonnet B., Rossi F. The Pontryagin Maximum Principle in the Wasserstein space. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2019, vol. 58, article 11, 36 p. doi: 10.1007/s00526-018-1447-2 .
21. Averboukh Y. Viability theorem for deterministic mean field type control systems. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2018, vol. 26, no. 4, pp. 993–1008. doi: 10.1007/s11228-018-0479-2 .
22. Staritsyn M. On “discontinuous” continuity equation and impulsive ensemble control. *Systems and Control Letters*, 2018, vol. 118, pp. 77–83. doi: 10.1016/j.sysconle.2018.06.001 .
23. Staritsyn M.V., Pogodaev N.I. On a class of impulsive control problems for continuity equations. *IFAC-PapersOnLine*, (17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization CAO 2018) 2018, vol. 51, no. 32, pp. 468–473 doi: 10.1016/j.ifacol.2018.11.429 .
24. Pogodaev N. Optimal control of continuity equations. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 2016, vol. 23, article 21, 24 p. doi: 10.1007/s00030-016-0357-2 .
25. Piccoli B., Rossi F. Transport equation with nonlocal velocity in Wasserstein spaces: convergence of numerical schemes., *Acta Appl. Math.*, 2013, vol. 124, no. 1, pp. 73–105. doi: 10.1007/s10440-012-9771-6 .
26. Pogodaev N., Staritsyn M. Impulsive relaxation of continuity equations and modeling of colliding ensembles. In: Evtushenko Y. et al (eds.), *Optimization and Applications.* Communications in Computer and Information Science, vol. 974. 2019, pp. 367–381. doi: 10.1007/978-3-030-10934-9_26 .
27. Ovsyannikov D.A. *Matematicheskie metody upravleniya puchkami* [Mathematical methods of beam control]. Leningrag: Leningrad State Univer. Publ., 1980, 228 p.
28. Pogodaev N. Program strategies for a dynamic game in the space of measures. *Optim. Lett.*, 2018, pp. 1–13. doi: 10.1007/s11590-018-1318-y .
29. Kipka R.J., Ledyaev Y.S. Extension of chronological calculus for dynamical systems on manifolds. *J. Diff. Eq.*, 2015, vol. 258, no. 5, pp. 1765–1790. doi: 10.1016/j.jde.2014.11.014 .
30. Filippov A.F. On some questions in the theory of optimal regulation: existence of a solution of the problem of optimal regulation in the class of bounded measurable functions. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Meh. Astr. Fiz. Him.*, 1959, no. 2, pp. 25–32 (in Russian).
31. Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Theory of extremal problems.* N Y, Oxford, North-Holland Publ. Comp., 1979, 460 p. ISBN: 0444851674 . Original Russian text published in Ioffe A.D., Tihomirov V.M. *Teoriya ekstremal'nykh zadach.* Moscow, Nauka Publ., 1974, 481 p.

Received December 15, 2018
Revised February 5, 2019
Accepted February 11, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects no. 18-31-20030, no. 18-01-00026).

Maksim Vladimirovich Staritsyn, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Matrosov Institute for System Dynamics and Conrol Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia,
e-mail: starmaxmath@gmail.com .

Nikolay Il'ich Pogodaev, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Matrosov Institute for System Dynamics and Conrol Theory of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Irkutsk, 664033 Russia,
e-mail: nickpogo@gmail.com .