

УДК 517.547+517.546+517.535+517.953

**СПОСОБЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ
МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.
ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Л. С. Маергойз

Эта работа посвящена способам аналитического продолжения многозначной функции одной переменной, заданной на части ее римановой поверхности в форме ряда Пуизе, порождаемого степенной функцией $z = w^{1/\rho}$, $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$. Представлен многолиственный вариант теоремы Д. Пойа о связи между индикаторной и сопряженной диаграммами целой функции экспоненциального типа. Он опирается на конструкцию В. Бернштейна многолистной индикаторной диаграммы целой функции f порядка $\rho \neq 1$ и нормального типа. Предложено обобщение метода Бореля, позволяющее найти область суммируемости “правильного” ряда Пуизе (многолиственный “многоугольник Бореля”), что является новым результатом и в случае степенного ряда. Эти утверждения используются для описания областей аналитического продолжения рядов Пуизе, в которые разлагаются обращения рациональных функций. Найден новый подход к решению алгебраических уравнений.

Ключевые слова: целая функция, порядок, индикатор, ряд Пуизе, многозначная функция, многолистные вогнутая, индикаторная и сопряженная диаграммы, риманова поверхность, аналитическое продолжение, решение алгебраических уравнений.

L. S. Maergoiz. Analytic continuation methods for multivalued functions of one variable and their application to the solution of algebraic equations.

The paper discusses several methods of analytic continuation of a multivalued function of one variable given on a part of its Riemann surface in the form of a Puiseux series generated by the power function $z = w^{1/\rho}$, where $\rho > 1/2$ and $\rho \neq 1$. We present a many-sheeted variant of a theorem of G. Pólya describing the relation between the indicator and conjugate diagrams for entire functions of exponential type. The description is based on a construction of V. Bernstein for the many-sheeted indicator diagram of an entire function of order $\rho \neq 1$ and of normal type. The summation domain of a “proper” Puiseux series (a many-sheeted “Borel polygon”) is found with the use of a generalization of the Borel method. This result seems to be new even in the case of power series. The theory applies to describe the domains of analytic continuation of Puiseux series representing the inverse functions for the rational ones. As but one consequence we elaborate a new approach to solution of algebraic equations.

Keywords: entire function, order, indicator, Puiseux series, multivalued function, many-sheeted diagram, concave diagram, indicator diagram, conjugate diagram, Riemann surface, analytic continuation, solution of algebraic equations.

MSC: 30D20, 30F10, 30C15, 20F70

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-120-135

*Памяти Валентина Константиновича
Иванова в связи со 110 годовщиной
со дня его рождения*

Введение

В данной работе исследуются способы аналитического продолжения многозначных рядов Пуизе — Лорана, Пуизе — Тэйлора, порождаемых степенной функцией $z = w^{1/\rho}$, $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$, и рассматриваются их приложения. Напомним “однолистные” результаты Э. Бореля [1] и Д. Пойа [2], “многолистному” развитию которых посвящена эта статья. Представим их в эквивалентной форме [3, гл. 1, § 10; гл. 3, § 3], удобной для дальнейшего изложения.

Э. Борель ассоциировал со сходящимся в окрестности 0 степенным рядом

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{0.1}$$

целую функцию порядка $\rho = 1$ и нормального типа

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k / k! \quad (0.2)$$

с индикатором $h_f(\theta) = \limsup_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \ln |f(re^{i\theta})|$, $\theta \in \mathbb{R}$. Справедлива

Теорема А. В этих обозначениях система преобразований Лапласа

$$G_\theta(z) = \int_0^{\infty(\arg t=\theta)} f(tz) e^{-t} dt, \quad |\theta| < \pi/2, \quad (0.3)$$

функции f определяет аналитическое продолжение ряда g в множество

$$M = \cup B_\theta \mid |\theta| < \pi/2, \quad B_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |z| h_f^+(\theta + \arg z) < \cos \theta\}, \quad h_f^+(\theta) := \max\{h_f(\theta), 0\}.$$

Кроме того, верны следующие геометрические утверждения:

1) множество $B := B_0$ — внутренность пересечения всех полуплоскостей, содержащих круг сходимости K ряда g и таких, что их граничные линии являются касательными к окружности ∂K , проходящими через особые точки g ;

2) множество $M = \cup K_z \mid z \in B$, где K_z — круг в \mathbb{C} с диаметром $[0, z]$.

Множество B называется многоугольником Бореля ряда g , а множество M — его обобщенным многоугольником Бореля.

Д. Пойа ассоциировал со сходящимся в окрестности ∞ рядом Лорана

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k+1}}, \quad |p| > R > 0, \quad F(\infty) = 0, \quad (0.4)$$

его преобразование Бореля, т. е. целую функцию $f(z)$ (0.2). В качестве геометрического образа ее индикатора $h = h_f$ — индикаторной диаграммы — выберем открытое вогнутое подмножество $S = \overline{\mathbb{C}}$.¹

$$I_h = \bigcup \Pi_h(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R}, \quad \Pi_h(\theta) = \{p \in \mathbb{C} : \Re p e^{i\theta} > h(\theta)\} \cup \{\infty\}. \quad (0.5)$$

Сопряженной диаграммой функции f назовем наибольшее открытое вогнутое множество I_F , в которое аналитически продолжается ряд Лорана F (0.4).

Теорема В. В принятых обозначениях система преобразований Лапласа

$$F_\theta(p) = \int_0^{\infty(\text{Arg } z=\theta)} f(z) e^{-pz} dz, \quad p \in \Pi_h(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R},$$

определяет аналитическое продолжение \mathcal{F} ряда F (0.4) в индикаторную диаграмму I_h функции f (см. (0.5)), причем $I_h = I_F$, где I_F — сопряженная диаграмма f . Это означает, что граничная прямая $\partial \Pi_h(\theta)$ полуплоскости $\Pi_h(\theta)$ содержит особые точки \mathcal{F} при $\theta \in [0, 2\pi]$.

С индикатором $h = h_f$ целой функции f порядка $\rho \neq 1$ и нормального типа В. Бернштейн [4] ассоциировал многолистную поверхность E_h , образованную движением полуплоскости

$$\Pi_h(\theta) = \{p \in \mathbb{C} : \Re p e^{i\rho\theta} > h(\theta)\}, \quad (0.6)$$

где $\theta \in \mathbb{R}$ — параметр движения. Индикатор h принадлежит классу \mathfrak{P}_ρ конечных 2π -периодических тригонометрически ρ -выпуклых функций [5, лекция 8]. Используя эту конструкцию

¹ То есть объединение полуплоскостей в S .

и опираясь на теорему В, он построил целую функцию порядка $\rho \neq 1$ с заданным индикатором $h \in \mathfrak{F}_\rho$.

Если индикатор h_f неотрицателен, то E_h — область на римановой поверхности логарифма L , на которой действует автоморфизм $\mathcal{A}: E_h \rightarrow E_h, \mathcal{A}(r, \varphi) = \mathcal{A}(r, \varphi + 2\pi\rho)$ (см. (0.6)). При отображениях $z = w^{\pm 1/\rho}$ поверхность E_h переходит в области в \mathbb{C} (которыми она определяется), а объект исследования, ряд Пуизе, — в ряд Лорана или Тэйлора. Суммирование этих рядов осуществляется многими известными методами (см., например, теоремы А, В, [3, гл. 3]). С целью исключить этот случай в статье исследуются ряды Пуизе, порождаемые функцией $w^{1/\rho}$ при $\rho > 1/2$. Только тогда индикатор h_f может принимать и положительные, и отрицательные значения [3, свойство 1.9.9].

В разд. 1 рассматривается структура многолистной индикаторной диаграммы функции f , с индикатором которой ассоциирована поверхность E_h . В разд. 2 разрабатывается понятие многолистной сопряженной диаграммы функции f . Для этого на римановой поверхности логарифма вводится и изучается модификация *инфимальной конволюции* выпуклых функций в \mathbb{C} [6]. В разд. 3 излагаются основные результаты работы — варианты теорем А и В для многозначных функций. При этом и в случае $\rho = 1$ найдено существенное расширение результата Э. Бореля. В разд. 4 с помощью результатов разд. 3 изучаются аналитические свойства простейших многозначных функций — обращений рациональных функций. Они позволяют найти новый подход к решению алгебраических уравнений.

Основные результаты статьи анонсированы в [7; 8] и изложены в [9].

1. Многолистная индикаторная диаграмма целой функции порядка $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$ и нормального типа

Рассмотрим сходящийся в окрестности ∞ ряд Пуизе

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{(k+1)/\rho}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\exp\{(k+1)(\ln r + i\varphi)/\rho\}}, \quad p = (r, \varphi), \quad r > R, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$; $R > 0$ — радиус расходимости ряда. Ассоциируем с рядом (1.1) целую функцию порядка ρ и нормального типа с индикатором $h = h_f$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k / \Gamma[(k+1)/\rho], \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

причем ее тип $\sigma = R$ (см. [5, лекция 1]). В этом разделе исходя из результатов В. Бернштейна [4] исследуется структура многолистной индикаторной диаграммы функции f так, как это было сделано в [3, гл. 4, §2] для кусочно-тригонометрической функции $l \in \mathfrak{F}_\rho$ (см. также [7]).

1.1. Вогнутое многообразие

Формализуем конструкцию ассоциированной с $h \in \mathfrak{F}_\rho$, $\rho > 1/2$, многолистной поверхности $E_h = \bigcup \Pi_h(\theta) | \theta \in \mathbb{R}$ (см. (0.6)). Присоединим к E_h логарифмическую точку ветвления λ_∞ . В E_h введем отношение эквивалентности следующим образом:

$$p_j \in \Pi_h(\theta_j), \quad j = 1, 2; \quad p_1 \sim p_2, \quad \text{если } p_1 = p_2 \in \mathbb{C}, \quad \theta_1, \theta_2 \in \Delta, \quad (1.3)$$

где Δ — любая фиксированная связная компонента $\chi(p; h) = \{\theta \in \mathbb{R}: p \in \Pi_h(\theta)\}$. Из неравенства $h(\varphi) + h(\varphi + \pi/\rho) \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, для любой функции $h \in \mathfrak{F}_\rho$ [5, лекция 8] вытекает, что условие $\theta_1, \theta_2 \in \Delta$ выполняется в том и лишь в том случае, когда $\rho|\theta_1 - \theta_2| < \pi$. Итак,

$$E_h \setminus \{\lambda_\infty\} = \bigcup U_\theta | \theta \in \mathbb{R}, \quad U_\theta = \{(p, \Delta): p \in \Pi_h(\theta), \theta \in \Delta \subset \chi(p; h)\}.$$

Введем в E_h топологию, а в $E_h \setminus \{\lambda_\infty\}$ комплексную структуру по аналогии с [3, гл. 4, § 2; 7]. В этой топологии отображение

$$\varphi_h: E_h \rightarrow S; \quad \varphi_h(p, \Delta) = p, \quad (p, \Delta) \in U_\theta; \quad \varphi_h(U_\theta) = \Pi_h(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}; \quad \varphi_h(\lambda_\infty) = \infty, \quad (1.4)$$

где S — сфера Римана, непрерывно, причем $\varphi_h: U_\theta \rightarrow \Pi_h(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, — гомеоморфизм.

О п р е д е л е н и е 1. Пару (φ_h, E_h) назовем (бесконечно-листным) *вогнутым многообразием*, ассоциированным с $h \in \mathfrak{F}_\rho$ ².

З а м е ч а н и е 1. Координаты граничных точек E_h аналогичным образом определяются при использовании замыканий полуплоскостей вида (0.6) (см. [7]).

П р и м е р 1. Рассмотрим важный для дальнейшего изложения пример вогнутого многообразия. Пусть L_∞ — одноточечное топологическое расширение римановой поверхности логарифма L с присоединенной к ней точкой ветвления Λ_∞ ³ по отношению к отображению

$$\Phi: L_\infty \rightarrow S; \quad \Phi(r, \varphi) = r e^{i\varphi}, \quad (r, \varphi) \in L; \quad \Phi(\Lambda_\infty) = \infty. \quad (1.5)$$

Ряд Пуанкаре F (1.1) задан на множестве $D_R = D'_R \cup \Lambda_\infty$; $D'_R = (R, \infty) \times \mathbb{R}$, если его доопределить по непрерывности в точке ветвления $F(\Lambda_\infty) = 0$.

Пусть E_R — вогнутое многообразие, ассоциированное с функцией $h_R(\theta) \equiv R > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Заметим, что $D'_R = \cup V_\theta | \theta \in \mathbb{R}$, где V_θ — связная компонента $\{(r, \varphi) \in L: r \cos(\varphi + \rho\theta) > R\}$, содержащая луч $(r, -\rho\theta)$, $r > R$. Поэтому есть отображение $\Psi: D_R \rightarrow E_R$ такое, что $\Psi(\Lambda_\infty) = \lambda_\infty$; $\Psi(r, \varphi) = (p, \Delta)$, $p = r e^{i\varphi}$, где Δ — компонента $\chi(p; h_R)$ со свойством $-\varphi/\rho \in \Delta$ (см. (1.3)). Обратное отображение существует: Δ — интервал, длина которого $< \pi/\rho$. Итак, $\Psi: D_R \rightarrow E_R$ — гомеоморфизм, а в обозначениях (1.4)–(1.5) $\Phi: D_R \rightarrow S$, $\varphi_{h_R}: E_R \rightarrow S$ — эквивалентные накрытия над S ($\varphi_{h_R} \circ \Psi = \Phi$). Итак, ряд F задан на E_R .

При определенных ограничениях на h вогнутое многообразие E_h совпадает с L_∞ . Таковы многообразия, порождаемые элементами подкласса

$$\mathfrak{D}_\rho = \{h(\theta) = \Re p_0 e^{i\rho\theta}, \theta \in \mathbb{R}; p_0 \in \mathbb{C}\}, \quad \rho \in \mathbb{N}; \quad \mathfrak{D}_\rho = \{g(\theta) \equiv 0, \theta \in \mathbb{R}\}, \quad \rho \notin \mathbb{N}, \quad (1.6)$$

класса \mathfrak{F}_ρ . Тогда E_h образуется при вращении полуплоскости $\Pi_h(\theta)$ вокруг точек λ_∞ , λ_0 , где (см. (1.6)) $\lambda_0 = \{(p_0, \theta), \theta \in \mathbb{R}\} \in \partial E_h$. Поэтому (см. рассуждения в примере 1) справедливо

Предложение 1. Пусть $h \in \mathfrak{D}_\rho$. Если $h(\theta) := g(\theta) \equiv 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, то $\varphi_h: E_h \rightarrow S$, $\Phi: L_\infty \rightarrow S$ (см. (1.4)–(1.6)) — эквивалентные накрытия над S . В случае $h \neq g$ многообразия (φ_h, E_h) , (φ_g, E_g) совпадают с точностью до операции сдвига

$$\Theta: E_h \rightarrow E_g, \quad \Theta(p, \Delta) = (p - p_0, \Delta); \quad \varphi_g(p - p_0, \Delta) = \varphi_h(p, \Delta) - p_0, \quad \Delta \in \chi(p; h).$$

1.2. Вогнутая диаграмма

Пусть $h \in \mathfrak{F}_\rho \setminus \mathfrak{D}_\rho$ (см. (1.6)). Так как h — 2π -периодическая функция, то на E_h действует автоморфизм

$$B: E_h \rightarrow E_h; \quad B(p, \Delta) = (q, \Delta - 2\pi), \quad q = p e^{i2\pi\rho}, \quad B(\lambda_\infty) = \lambda_\infty. \quad (1.7)$$

Геометрически это означает, что B взаимно однозначно отображает полуплоскость U_θ на полуплоскость $U_{\theta-2\pi}$ для любого $\theta \in \mathbb{R}$ (см. (1.4)). Отображение B порождает циклическую группу автоморфизмов G_E , действующую на E_h . Для любой фиксированной точки $m \in E_h$ множество

$$G_E(m) = \{x \in E_h: x = B^k(m), k \in \mathbb{Z}\}; \quad G_E(\lambda_\infty) = \lambda_\infty, \quad (1.8)$$

²В дальнейшем для простоты изложения иногда ограничимся символом E_h .

³Под окрестностью точки Λ_∞ понимается любое множество в L_∞ , содержащее вместе с Λ_∞ и множество $(M, \infty) \times \mathbb{R}$ при некотором $M > 0$.

называют *орбитой* t относительно группы G_E . Стандартным образом наделим пространство орбит $I_h := E_h/G_E$ группы G_E топологией, а $I_h \setminus \lambda_\infty$ — комплексной структурой [10].

Изучим структуру I_h в окрестности λ_∞ . Пусть $R = \max\{h(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$. Тогда в обозначениях примера 1 $E_R \subset E_h$, а $\varphi_h: E_R \rightarrow S$, $\Phi: D_R \rightarrow S$ — эквивалентные накрытия над S . В координатах множества $D_R \subset L_\infty$ след автоморфизма B (см. (1.7), пример 1) на E_R имеет вид $A_\rho := \Psi^{-1} \circ B \circ \Psi$ и допускает представление

$$A_\rho: D_R \rightarrow D_R; \quad A_\rho(r, \varphi) = (r, \varphi + 2\pi\rho), \quad (r, \varphi) \in D_R \setminus \{\Lambda_\infty\}; \quad A_\rho(\Lambda_\infty) = \Lambda_\infty. \quad (1.9)$$

Пространство орбит циклической группы автоморфизмов G_ρ , порожденной отображением A_ρ , допускает введение комплексной структуры, превращающей фактор-множество D_R/G_ρ в часть римановой поверхности степенной функции $z = p^{1/\rho}$ [3, с. 269]. Опираясь на рассуждения при доказательстве свойств 4.2.10, 4.2.14 в [3] и предложение 1, убеждаемся в том, что справедлива

Теорема 1. Пусть $\rho > 1/2$, $h \in \mathfrak{P}_\rho \setminus \mathfrak{D}_\rho$; E_h — вогнутое многообразие, ассоциированное с h . На E_h действует циклическая группа автоморфизмов G_E , порождаемая отображением B (1.7), причем ее пространство орбит I_h обладает свойством: I_h — риманова поверхность с комплексным атласом на $I_h \setminus \{\lambda_\infty\}$ вида

$$\mathfrak{U} = \{\omega_\theta: U_\theta/G_E \rightarrow \Pi_h(\theta), \theta \in \mathbb{R}\},$$

где $\omega_\theta = \varphi_h \circ \gamma_\theta^{-1}$, $\gamma_\theta: U_\theta \rightarrow U_\theta/G_E$ — каноническое отображение, являющееся гомеоморфизмом, и $I_h \setminus \{\lambda_\infty\} = \bigcup U_\theta/G_E | \theta \in (-\pi, \pi]$ (см. (0.6), (1.4)). В окрестности λ_∞ топологической моделью I_h является угол

$$L_R = \{\Lambda_\infty\} \cup \{(r, \varphi) \in L: r > R; \theta_0 \leq \varphi \leq \theta_0 + 2\pi\rho\} \quad \forall \theta_0 \in \mathbb{R}$$

с вершиной в Λ_∞ раствора $2\pi\rho$ со стандартно склеенными сторонами.

Если $h \in \mathfrak{D}_\rho$, то $\bar{I}_h = I_h \cup \partial I_h$ — риманова поверхность функции $z = p^{1/\rho}$ для $h(\theta) \equiv 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, и функции $z = (p - p_0)^{1/\rho}$ для $h(\theta) = \Re p_0 e^{i\rho\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$; $p_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\rho \in \mathbb{N}$ (см. (1.6)).

З а м е ч а н и е 2. В обозначениях формулы (1.4) получаем из (1.7):

$$\varphi_h \circ B(m) = e^{i2\pi\rho} \varphi_h(m), \quad m \in E_h \setminus \{\lambda_\infty\}; \quad \varphi_h \circ B(\lambda_\infty) = \infty. \quad (1.10)$$

Отсюда и из (1.7), (1.8) при $\rho \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ вытекает: проекция φ_h (1.4) индуцирует отображение

$$\tilde{\varphi}_h: I_h \rightarrow S; \quad \tilde{\varphi}_h(\lambda_\infty) = \infty; \quad \tilde{\varphi}_h[G_E(m)] = \varphi_h(m) \quad \forall m \in E_h. \quad (1.11)$$

В обозначениях теоремы 1 множества L_R , $i_R \subset I_h$ — замыкания фундаментальных областей соответственно для групп G_ρ на D_R , G_E на E_R . Поэтому кратность отображения $\tilde{\varphi}_h$ в точке λ_∞ равна ρ (см. теорему 1, (1.9), (1.11)). В случае $\rho \notin \mathbb{N}$ проекции сторон угла L_R на S не совпадают (см. (1.4), (1.9), (1.11)). Но отображение $\hat{\Phi}: L_R \rightarrow S$, $\hat{\Phi}(r, \varphi) = r^{1/\rho} e^{i\varphi/\rho}$, $\hat{\Phi}(\Lambda_\infty) = \infty$ в точке Λ_∞ имеет в определенном смысле “дробную” кратность ρ [7, предложение 1].

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$, $h \in \mathfrak{P}_\rho$. В обозначениях теоремы 1 множество I_h назовем ρ -листной в окрестности λ_∞ вогнутой диаграммой, ассоциированной с h (ρ -листной индикаторной диаграммой целой функции f порядка $\rho \neq 1$, если h — ее индикатор). Если h — кусочно тригонометрическая функция, то ассоциированное с ней множество I_h называется ρ -лиственным в окрестности λ_∞ вогнутым многоугольником (см. [3, гл. 4, § 2]).

З а м е ч а н и е 3. В случае $\rho \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ формализация конструкции индикаторной диаграммы I_h упрощается, если в качестве параметра движения полуплоскости (0.6) выбрать $w = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$: $U_h(e^{i\theta}) = \{(p, e^{i\theta}) : \Re p \{e^{i\theta}\}^\rho > h(\theta), p \in \mathbb{C}\}$, учитывая, что индикатор можно считать заданным на $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ($h(\theta) = H(e^{i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$). Тогда любой элемент $I_h \setminus \{\lambda_\infty\}$ имеет вид $(p, \tilde{\Delta})$, где $\tilde{\Delta}$ — некоторая связная компонента множества $\tilde{\chi}(p; h) = \{e^{i\theta} \in S_1 : (p, e^{i\theta}) \in U_h(e^{i\theta})\}$ (ср. (1.3)), а в формуле (1.11) последнее равенство заменяется на $\tilde{\varphi}_h[(p, \tilde{\Delta})] = p$. Кроме того, $\tilde{\varphi}_h: U_h(e^{i\theta}) \rightarrow \Pi_h(\theta)$ — гомеоморфизм для любого $\theta \in \mathbb{R}$ (ср. (1.4)).

2. Многолистная сопряженная диаграмма целой функции порядка $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$ и нормального типа

Нам потребуется понятие объединения вогнутых диаграмм. С этой целью рассматривается модификация понятия *инфимальной конволюции* выпуклых функций [6, § 5].

2.1. Локально сублинейные функции на римановой поверхности логарифма

Рассмотрим одноточечное топологическое расширение L_0 римановой поверхности логарифма L , присоединив к ней логарифмическую точку ветвления $\Lambda_0 = \{(0, \theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ по отношению к отображению $\Phi : L_0 \rightarrow S$, где второе равенство в (1.5) заменяется на $\Phi(\Lambda_0) = 0$. Введем в L_0 операции умножения на положительное число и сложения (ср. [3, с. 26]):

1. $t \cdot Z = (tr, \varphi)$, $Z = (r, \varphi) \in L$; $t \cdot \Lambda_0 = \Lambda_0 \quad \forall t > 0$.
2. Для каждой пары точек $Z_j = (r_j, \theta_j) \in L$, $j = 1, 2$, существует единственный элемент $Z = (r, \theta) := Z_1 \otimes Z_2 \in L$ (сумма “векторов”) такой, что (см. (1.5))

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad \Phi(Z) = \Phi(Z_1) + \Phi(Z_2), \quad \text{если } 0 \leq \theta_2 - \theta_1 \leq \pi, \quad (2.1)$$

кроме случая $|\theta_2 - \theta_1| = \pi$, $r_1 = r_2$. Тогда полагаем $Z_1 \otimes Z_2 = \Lambda_0$, а для пары $\Lambda_0, Z \in L_0$ — $\Lambda_0 \otimes Z = Z \otimes \Lambda_0 = Z$, в частности $\Lambda_0 \otimes \Lambda_0 = \Lambda_0$. Это согласуется с равенством в (2.1), поскольку $\Phi(\Lambda_0) = 0$. Аналогично определяем сумму любого конечного числа элементов $Z_1, \dots, Z_m \in L_0$, удовлетворяющих условию

$$\theta_j = \text{Arg } Z_j \in [a, b], \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad Z_j \in L, \quad 2 \leq k \leq m,$$

а если $k < m$, то $Z_j = \Lambda_0, j = k + 1, \dots, m$. Здесь $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $b - a \leq \pi$.

Рассмотрим следующую модификацию понятия сублинейной функции в \mathbb{C} .

О п р е д е л е н и е 3. Функцию $G : L_0 \rightarrow [-\infty, \infty)$ назовем локально сублинейной, если

$$G(tZ) = tG(Z) \quad \forall t > 0, Z \in L; \quad G(Z_1 \otimes Z_2) \leq G(Z_1) + G(Z_2) \quad (2.2)$$

для всех пар $\{Z_j\}_1^2 \subset L_0$, где $Z_1 \otimes Z_2 \in L$ (см. (2.1); ср. [3, определение 1.9.3; 6, § 4]).

Аналогом определяющего геометрического свойства выпуклых функций [6, § 4] является

Предложение 2. Пусть $G : L_0 \rightarrow [-\infty, \infty)$; $\text{epi } G = \{(Z, \mu) : Z \in L_0, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq G(Z)\}$ — надграфик функции G . Функция G является локально сублинейной (см. определение 3) тогда и только тогда, когда $\text{epi } G$ — локально выпуклый конус в $L_0 \times \mathbb{R}$ с вершиной в $(\Lambda_0, 0)$, т. е. выполняются условия

$$t(Z, \mu) = (tZ, t\mu) \in \text{epi } G \quad \forall Z \in L, \quad t > 0, \quad (Z, \mu) \in \text{epi } G; \quad (Z_1 \otimes Z_2, \mu_1 + \mu_2) \in \text{epi } G, \quad (2.3)$$

для каждой пары $\{(Z_j, \mu_j)\}_1^2 \subset \text{epi } G$, где для $\{Z_j\}_1^2$ определена операция “сложения” (2.1).

Объектом дальнейших исследований является класс $\mathfrak{G}_\rho = \{G\}$ конечных локально сублинейных функций, $2\pi\rho$ -периодических по переменной $\varphi = \text{Arg } Z$, где $\rho > 0$, $\rho \neq 1$, и удовлетворяющих условию $G(\Lambda_0) = 0$ ⁴. Аналогом *инфимальной конволюции* выпуклых функций в \mathbb{R}^n [6, § 5] является следующая операция.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $\{G_j \in \mathfrak{G}_\rho\}_1^m$, $m \geq 2$. В обозначениях (2.1) функция

$$G(Z) := (G_1 \square \dots \square G_m)(Z) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m G_j(Z_j) : Z_1 \otimes \dots \otimes Z_m = Z \right\}, \quad Z \in L,$$

⁴Это равенство означает непрерывность любой функции $G \in \mathfrak{G}_\rho$ в точке Λ_0 .

где $Z_j \in L_0$, $j = 1, \dots, m$, называется *инфимальной конволюцией* функций G_1, \dots, G_m . Эту операцию можно определить для бесконечного числа элементов \mathfrak{G}_ρ [6, теорема 5.6].

Покажем, что при некоторых условиях эта операция не выводит из класса \mathfrak{G}_ρ .

Теорема 2 (ср. [6, теорема 5.4]). *Пусть в обозначениях и условиях определения 4 $G : L_0 \rightarrow [-\infty, \infty)$ — функция такая, что $G(\Lambda_0) = 0$; $G(Z) = G_1 \square \dots \square G_m(Z)$, $Z \in L$. Тогда $G \in \mathfrak{G}_\rho$, если найдется точка $Z_0 \in L$ со свойством $G(Z_0) > -\infty$. Кроме того, $G(Z) \leq \min\{G_1(Z), \dots, G_m(Z)\} \forall Z \in L$.*

Доказательство. Для простоты изложения допускаем $m = 2$. Из формулы для функции G вытекает как ее $2\pi\rho$ -периодичность по переменной $\text{Arg } Z$, так и неравенство. Для его доказательства полагаем $Z = Z_1 \otimes \Lambda_0$ и $Z = \Lambda_0 \otimes Z_2$, где $\{Z_j\}_1^2 \subset L$ ($\{G_j(\Lambda_0) = 0\}_1^2$).

Докажем, что G — локально сублинейная функция. Пусть M, M_1, M_2 — надграфики соответственно функций G, G_1, G_2 . Из определения 4 заключаем, что

$$M = M_1 \otimes M_2 := \{(Z_1 \otimes Z_2, \mu_1 + \mu_2) : (Z_j, \mu_j) \in M_j, j = 1, 2\}. \quad (2.4)$$

Так как M_1, M_2 — локально выпуклые конусы (см. (2.3), предложение 2), в обозначениях (2.4) имеем $(tZ_j, t\mu_j) \in M_j$, $j = 1, 2$, $\forall t > 0$, и

$$t(Z_1 \otimes Z_2, \mu_1 + \mu_2) = (tZ_1 \otimes tZ_2, t\mu_1 + t\mu_2) \in M, \quad t > 0. \quad (2.5)$$

Далее рассмотрим любую пару $\{(Z_j, \mu_j)\}_1^2 \subset M$ такую, что элементы Z_1, Z_2 удовлетворяют (2.1)⁵. Из (2.4) выводим существование интервала и двух пар элементов $(U_j, \alpha_j) \in M_1$, $(V_j, \beta_j) \in M_2$, $j = 1, 2$, со свойством

$$(Z_j, \mu_j) = (U_j \otimes V_j, \alpha_j + \beta_j), \quad j = 1, 2; \quad \{\text{Arg } Z_j, \text{Arg } U_j, \text{Arg } V_j, j = 1, 2\} \subset [a, b],$$

где $b - a \leq \pi$. Отсюда после простых преобразований получаем

$$(Z_1 \otimes Z_2, \mu_1 + \mu_2) = ([U_1 \otimes U_2] \otimes [V_1 \otimes V_2], [\alpha_1 + \alpha_2] + [\beta_1 + \beta_2]).$$

Теперь из (2.4) и предложения 2 выводим

$$(U_1 \otimes U_2, \alpha_1 + \alpha_2) \in M_1; \quad (V_1 \otimes V_2, \beta_1 + \beta_2) \in M_2; \quad (Z_1 \otimes Z_2, \mu_1 + \mu_2) \in M.$$

Отсюда и из (2.5) заключаем, что M — локально выпуклый конус, а G — локально сублинейная функция (см. предложение 2).

След отображения $\Phi : L \rightarrow \mathbb{C}$ (см. (1.5)) на всяком угле $L(\psi) = (0, \infty) \times (\psi, \psi + \pi)$ — гомеоморфизм. Поэтому $g_\psi := G \circ \Phi^{-1}$ — выпуклая функция в угле $K_\psi := \Phi[L(\psi)] = \{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r > 0, \psi < \varphi < \psi + \pi\}$ для любого $\psi \in \mathbb{R}$. Следовательно, функции g_ψ , G конечны соответственно в любых углах $K_\psi, L(\psi)$ со свойствами $z_0 := \Phi(Z_0) \in K_\psi, Z_0 \in L(\psi)$, где $Z_0 = (r_0, \varphi_0)$ — точка L , в которой по условию $G(Z_0) > -\infty$. Тогда G конечна в угле $L(\varphi_0)$. Отсюда, учитывая, что G — $2\pi\rho$ -периодическая функция по переменной $\text{Arg } Z$, имеем: G конечна в L , если $\rho \leq 1/2$. Чтобы убедиться в этом и при $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$, рассмотрим конечное покрытие угла $(0, \infty) \times [\varphi_0 + \pi, \varphi_0 + 2\pi\rho] \subset L$ углами вида $L(\psi)$. Но $G(\Lambda_0) = 0$. Итак, $G \in \mathfrak{G}_\rho$. \square

2.2. Объединение ρ -листных вогнутых диаграмм и сопряженная диаграмма целой функции порядка $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$

Упорядочим естественным образом функции класса \mathfrak{F}_ρ , т. е. $h \leq g$, если $h(\theta) \leq g(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$. Таким же свойством наделим и класс $\mathfrak{I}_\rho := \{I_h, h \in \mathfrak{F}_\rho\}$ ρ -листных в окрестности λ_∞ вогнутых диаграмм (см. определение 2), причем если $h \leq g$, $h, g \in \mathfrak{F}_\rho$, то $I_g \subset I_h$.

⁵В случае, когда, например, $Z_1 = \Lambda_0$, доказательство очевидно.

Из [3, предложение 1.9.4] вытекает наличие взаимно однозначной связи между функциями классов \mathfrak{P}_ρ и \mathfrak{G}_ρ (см. 2.1): функция $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит классу \mathfrak{P}_ρ тогда и только тогда, когда классу \mathfrak{G}_ρ принадлежит функция

$$G(Z) = G(t, \varphi) := th(\varphi/\rho), \quad Z \in L; \quad G(\Lambda_0) = 0. \quad (2.6)$$

О п р е д е л е н и е 4'. Пусть $\rho > 0$; $\{G_j\}_1^m$ — функции класса \mathfrak{G}_ρ , ассоциированные соответственно с функциями $\{h_j\}_1^m \subset \mathfrak{P}_\rho$ (см. (2.6)). Полагаем $G(Z), Z \in L_0$, — инфимальная конволюция функций $\{G_j\}_1^m$ (см. (2.2), определение 4). Функцию $h(\theta) = [h_1 \square \dots \square h_m](\theta) := G(1, \rho\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$ назовем *инфимальной конволюцией* функций $\{h_j\}_1^m$.

Из (2.6) и теоремы 2 вытекает

С л е д с т в и е 1. В обозначениях определений 4' и 2 $h \in \mathfrak{P}_\rho$, если $h(\theta_0) > -\infty$ при некотором $\theta_0 \in \mathbb{R}$, причем $h \leq \min\{h_1, \dots, h_m\}$; $\{I_j\}_1^m \subset I_h$, где $I_j = I(h_j)$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть в этом утверждении $\rho = 1$. Тогда $\{I_j\}_1^m$, $I := \cup I_j | j = 1, \dots, m$ — вогнутые множества в S (см. (0.5)), причем $I \neq S$. Поэтому $\{K_j\}_1^m$, где $K_j = S \setminus I_j$, $K := S \setminus I = \cap K_j | j = 1, \dots, m$ — выпуклые компакты в \mathbb{C} . Из (0.5) и [6, следствие 16.4.1] выводим, что *опорная функция* $h(\theta) = \sup\{\Re re^{i\theta} : r \in K\}$, $\theta \in \mathbb{R}$, *компакта* K удовлетворяет условию $h = h_1 \square \dots \square h_m$, т. е. $I_h = I$ (см. определение 4'). По аналогии с этим случаем дадим следующее

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$. В обозначениях и предположениях следствия 1 *объединением вогнутых диаграмм* $\{I_h\}_1^m$, ассоциированных с функциями $\{h_j\}_1^m \subset \mathfrak{P}_\rho$, назовем вогнутую диаграмму I_h , ассоциированную с инфимальной конволюцией $h = h_1 \square \dots \square h_m$ функций $\{h_j\}_1^m$, т. е. $I_h = \bigcup_{j=1}^m I_{h_j}$. Это понятие можно ввести и для бесконечного семейства функций класса \mathfrak{P}_ρ , учитывая определение 4.

Переходим теперь к описанию сопряженной диаграммы целой функции f (1.2) порядка $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$ и нормального типа, ассоциированной с рядом Пюизе F (1.1). Пусть $\mathcal{I}(F)$ — класс ρ -листных в окрестности λ_∞ вогнутых диаграмм, куда аналитически продолжается ряд F . Тогда в обозначениях примера 1 и формулы (1.9)

$$F(Z) \equiv F[A_\rho(Z)] \quad \forall Z \in D_R, \quad (2.7)$$

где $D_R = [(R, \infty) \times \mathbb{R}] \cup \Lambda_\infty \subset L_\infty$; $A_\rho : D_R \rightarrow D_R$ — автоморфизм, действующий на D_R . Поэтому ряд (1.1) определен на $d_R := D_R/G_\rho$. Рассмотрим карту $\Phi_\infty : d_R \rightarrow V$, где $V = \{q \in \mathbb{C} : |q| < R^{-1/\rho}\}$, $q = \Phi_\infty[G_\rho(r, \varphi)] = r^{-1/\rho} e^{-i\varphi/\rho} = p^{-1/\rho}$, $p = (r, \varphi) \in D_R$; $\Phi_\infty(\Lambda_\infty) = 0$. Имеем $z = F \circ \Phi_\infty^{-1}(q)$, $q \in V$, — аналитическая функция на $V \subset \mathbb{C}$, а ряд F — аналитическая функция на вогнутой диаграмме $I_R \sim d_R$, ассоциированной с $h_R(\theta) \equiv R$, $\theta \in \mathbb{R}$, т. е. $I_R \in \mathcal{I}(F)$.

О п р е д е л е н и е 6. *Сопряженной диаграммой целой функции* f (1.2) *порядка* $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$ *и нормального типа*, ассоциированной с рядом F (1.1), называется наибольшая вогнутая диаграмма $I_F \in \mathcal{I}(F)$ — объединение всех элементов множества $\mathcal{I}(F)$ (определение 5).

З а м е ч а н и е 4. Для ряда F (1.1) существуют, по крайней мере, один элемент $\psi \in [0, 2\pi)$ и прямая $\Gamma_\psi = \{(p, \psi) : \Re pe^{i\psi} = R, p \in \mathbb{C}\}$, содержащая особую точку F . Поэтому сопряженная диаграмма I_F определяется функцией $h \in \mathfrak{P}_\rho$ такой, что $h(\psi) = R$, $|h(\theta)| \leq R \forall \theta \in \mathbb{R}$ (см. следствие 1). Этими свойствами обладает любой элемент класса $\mathfrak{P}_\rho(R) = \{k \in \mathfrak{P}_\rho : \max\{k(\varphi), \varphi \in \mathbb{R}\} = R; I_k \in \mathcal{I}(F)\}$. В дальнейшем понадобятся следующие неравенства для функций этого класса, вытекающие из [11, гл. 1, § 16, свойство е); 3, свойство 1.9.19].

С в о й с т в о 1. Пусть в упомянутых обозначениях $h \in \mathfrak{P}_\rho(R)$. Тогда

$$h(\theta) \geq R \cos \pi\rho, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \rho < 1; \quad h(\theta) \geq -R, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \rho \geq 1. \quad (2.8)$$

3. Многолистные варианты теорем Поля — Бернштейна, Бореля

3.1. Многолиственный вариант теоремы В

Следующий результат есть в [4] в другой форме.

Лемма. Пусть $h \in \mathfrak{F}_\rho \setminus \mathfrak{D}_\rho$ — индикатор целой функции f (1.2) порядка $\rho > 1/2$, $\rho \neq 1$ и нормального типа, ассоциированной с рядом F (1.1). Тогда в обозначениях определений 2, 6 $I_h \in \mathcal{I}(F)$, где I_h — ρ -лиственная индикаторная диаграмма f , причем аналитическое продолжение \mathcal{F} ряда F в I_h определяет система преобразований Лапласа f (см. (0.6), теорему В)

$$F_\theta: \Pi_h(\theta) \rightarrow \mathbb{C}, \quad F_\theta(p) = \rho \int_0^{\infty(\text{Arg } z=\theta)} f(z) e^{-pz^\rho} dz, \quad |z| = t, \quad t > 0, \quad z^\rho = t^\rho e^{i\rho\theta}, \quad \theta \in (-\pi, \pi]. \quad (3.1)$$

Доказательство леммы базируется на модификации схемы доказательства теоремы В [5, лекция 9] с учетом того, что F — аналитическая функция на вогнутой диаграмме I_R (см. (2.7)). В частности, интеграл F_θ — аналитическая функция в полуплоскости $\Pi_h(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$ (см. (3.1), (0.6)), и при фиксированных $p \in \Pi_h(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, в обозначениях (1.3), (1.4) имеем $F_{\theta_1}(p) = F_{\theta_2}(p) \forall \{\theta_1, \theta_2\} \subset \Delta$; $\theta_1 < \theta_2$, где Δ — компонента $\chi(p; h)$, содержащая θ . Отсюда выводим (см. (1.4), теорему 1) $\mathcal{F}[(p, \Delta)] := F_\theta \circ \varphi_h(p, \Delta)$, $(p, \Delta) \in U_\theta \forall \theta \in \mathbb{R}$. Кроме того, $F_{\theta-2\pi}(pe^{i2\pi\rho}) = F_\theta(p)$, $p \in \Pi_h(\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, и поэтому $\mathcal{F}[(p, \Delta)] \equiv \mathcal{F}[B(p, \Delta)]$, $(p, \Delta) \in E_h$, где B — образующая группы автоморфизмов G_E , действующей на E_h (см. (1.7)). Следовательно, $\mathcal{F}(m) = F_\theta \circ \omega_\theta(m)$, $m \in U_\theta/G_E$, $F_\theta = \mathcal{F} \circ \omega_\theta^{-1}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Но система $\{U_\theta/G_E, \theta \in (-\pi, \pi]\}$ покрывает $I_h \setminus \{\lambda_\infty\}$ (см. теорему 1). Итак, \mathcal{F} — аналитическая функция на I_h и $I_h \in \mathcal{I}(F)$. \square

Теорема 3. В обозначениях и условиях определения 6 и леммы индикаторная и сопряженная диаграммы целой функции f (1.2) совпадают: $I_h = I_F$.

Теорема 3 следует из леммы, если h — минимальный элемент класса \mathfrak{F}_ρ^6 . В общем случае частично используются методы доказательства теоремы 6.7 в [13, гл. VI].

Доказательство. Найдем интегральное представление функции f (ср. (3.1)).

Пусть $\tau > 0$, $\psi \in (\pi/2, \pi)$; $\gamma(\tau; \psi)$ — контур, образованный лучами $\{w \in \mathbb{C}: |w| \geq \tau; \arg w = \pm\psi\}$ и дугой окружности $\{w \in \mathbb{C}: |w| = \tau; |\arg w| \leq \psi\}$, ориентированный в направлении возрастания $\arg w$. Полагаем $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и выберем параметр τ контура так: $\tau = (R + \varepsilon)t^\rho$, где $t = |z|$, $\varepsilon > 0$, R — радиус расходимости ряда (1.1). При отображении $p = w/z^\rho$, $w \in \mathbb{C}$, где $z^\rho = t^\rho e^{i\rho\theta}$, θ — фиксированный элемент $\text{Arg}z$, контур $\gamma(\tau; \psi)$ переходит в аналогичный с геометрической точки зрения контур γ_θ , расположенный в угле $S_\varepsilon(\theta, \psi) = \{p = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}: r \geq R + \varepsilon; |\varphi + \rho\theta| \leq \psi\}$. Теперь, используя формулу Ханкеля, получаем

$$\frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)} = \frac{z^k}{2\pi i} \int_{\gamma(\tau; \psi)} \frac{e^w}{w^{(k+1)/\rho}} dw = \frac{z^{\rho-1}}{2\pi i} \int_{\gamma_\theta} \frac{e^{pz^\rho}}{p^{(k+1)/\rho}} dp, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}; \quad \theta \in \text{Arg}z,$$

причем правая часть этого равенства не зависит от выбора элемента $\theta \in \text{Arg}z$. Преобразуем (1.2) с помощью найденного соотношения. Опираясь на ограниченность ряда (1.1) на контуре γ_θ и меняя местами знаки интегрирования и суммы в (1.2), находим интегральную формулу

$$f(z) = \frac{z^{\rho-1}}{2\pi i} \int_{\gamma_\theta} F(p) e^{pz^\rho} dp, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3.2)$$

⁶Описание структуры этих функций дано в [12; 3, гл. 4, § 1].

Допустим, что в обозначениях замечания к определению 6 h не является минимальным элементом $\mathfrak{P}_\rho(R)$. Тогда существует вогнутая диаграмма $I_g \in \mathcal{I}(F)$, ассоциированная с функцией $g \in \mathfrak{P}_\rho(R)$, такая что $g(\zeta) < h(\zeta)$ при некотором $\zeta \in \mathbb{R}$. Это означает, что функция F_ζ (3.1) аналитически продолжается в полуплоскость $\Pi_g(\zeta) \supset \Pi_h(\zeta)$ (см. (0.6)), в частности прямая $L_\delta \subset \Pi_g(\zeta)$, где

$$L_\delta = \{p \in \mathbb{C} : \Re p \exp\{i\rho\zeta\} = \delta\} = \{p = \exp\{-i\rho\zeta\}(\delta + is), s \in \mathbb{R}\}, \quad (3.3)$$

а δ — любое фиксированное число в интервале $(g(\zeta), h(\zeta))$. Кроме того, из неравенства (2.8) находим $\delta = R \cos \rho\alpha$ для некоторого $\alpha \in (0, \mu)$, где $\mu = \min\{\pi, \pi/\rho\}$. Для ряда F (1.1) верна асимптотическая оценка

$$|F(p)| = O(|p|^{-(l+1)/\rho}) \quad \text{при } |p| \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

где l — наименьшее число носителя $S_F = \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : c_k \neq 0\}$ ряда F . Это позволяет выбрать $\psi = \pi/2$ в контуре γ_θ (см. (3.2)), а далее заменить γ_θ при $\theta = \zeta$ на прямую L_δ (3.3). Итак, справедлива интегральная формула

$$f(z) = I(z) := \frac{z^{\rho-1}}{2\pi i} \int_{L_\delta} \mathcal{F}_\zeta(p) e^{pz^\rho} dp, \quad z \in N(\zeta) := \{z = te^{i\zeta} : t > 0\}, \quad (3.5)$$

где \mathcal{F}_ζ — след аналитического продолжения функции F_ζ на прямую L_δ .

Изучим асимптотическое поведение f на луче $N(\zeta)$ при $t \rightarrow \infty$ (см. (3.5)).

Интегрируя по частям интеграл в (3.5) и учитывая оценку (3.4), получаем

$$f(z) = \frac{-1}{2\pi iz} \int_{L_\delta} \mathcal{F}'_\zeta(p) e^{pz^\rho} dp, \quad z \in N(\zeta), \quad (3.6)$$

где \mathcal{F}'_ζ — производная \mathcal{F}_ζ . Но для производной ряда F верна оценка (ср. (3.4)) $|F'(p)| = O(1/|p|^{1+(l+1)/\rho})$ при $|p| \rightarrow \infty$. Поскольку $\mathcal{F}'_\zeta(p) = F'_\zeta(p)$, $p \in L_\delta$, $|p| > R$, из (3.6) получаем оценку для f на луче $N(\zeta)$: $|f(te^{i\zeta})| \leq Ct^{-1}e^{\delta t^\rho}$, $t \rightarrow \infty$, где $C = \text{const} > 0$. Следовательно, индикатор f удовлетворяет неравенствам $h_f(\zeta) \leq \delta \forall \delta \in (g(\zeta), h(\zeta))$; $h_f(\zeta) \leq g(\zeta)$. Это противоречит предположению $g(\zeta) < h(\zeta)$. Итак, $I_g \subset I_h$ для любой вогнутой диаграммы $I_g \in \mathcal{I}(F)$. Поэтому (см. определение 6) $I_h = I_F$. \square

3.2. Многолиственный вариант теоремы А

Пусть $\rho > 1/2$. Рассмотрим вопрос о суммировании сходящегося “правильного” ряда Пуизе

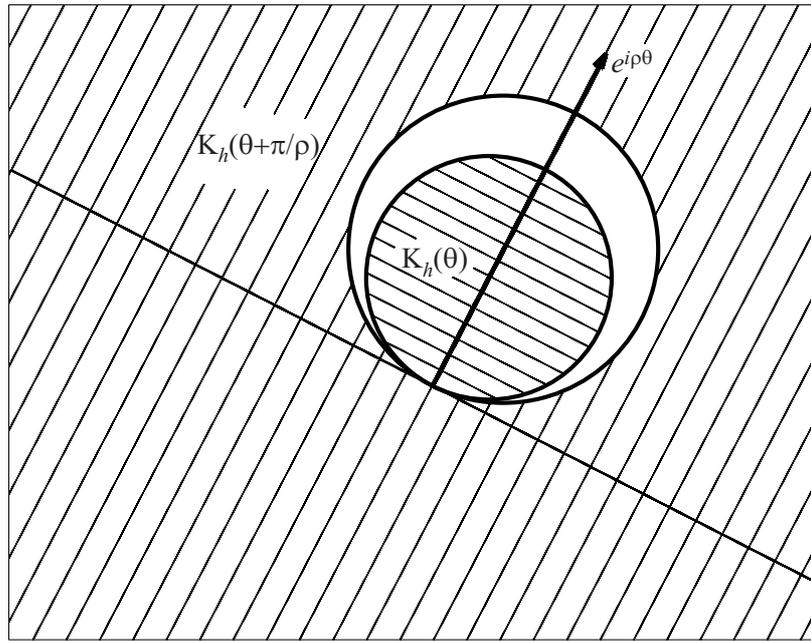
$$G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k q^{(k+1)/\rho} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \exp\{(k+1)(\ln t + i\psi)/\rho\}, \quad t = |q| < T < \infty, \quad \psi = \text{Arg } q, \quad (3.7)$$

где T — радиус сходимости ряда, с которым (как и с рядом (1.1)) ассоциируем целую функцию f порядка ρ ⁷. С рядом (1.2) данный ряд связан соотношением

$$G(q) \equiv F(1/q), \quad 1/q = (1/t, -\psi), \quad t < T = R^{-1} < \infty, \quad q = (t, \psi) \in L, \quad (3.8)$$

где L — риманова поверхность логарифма. Поэтому $\sigma = 1/T$, где σ — тип f (см. (3.7), (1.2)). Тожество (3.8) позволяет использовать результаты в 3.1 для описания области суммирования ряда (3.7) модификацией метода Бореля. Для этого введем ряд геометрических понятий.

⁷Условие $G(0) = 0$ не ограничивает общности последующих рассуждений. Например, при $\rho = 1$ (см. (0.1)) $G(z) := g(z) - g(0)$ — ряд вида (3.7).



Круговые множества $\mathbf{K}_h(\theta)$, $h(\theta) > 0$ и $\mathbf{K}_h(\theta + \pi/\rho)$, $h(\theta + \pi/\rho) < 0$.

Пусть $h \in \mathfrak{F}_\rho$. При преобразовании $q = 1/p$, $p \in S$, и любом $\theta \in \mathbb{R}$ полуплоскость $\Pi_h(\theta)$, где $\theta \in \mathbb{R}$ (см. (0.6)), переходит в множество

$$K_h(\theta) = \{q \in S : \Re q e^{-i\rho\theta} > |q|^2 h(\theta), q \in \mathbb{C}\}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

причем если $0 \in \Pi_h(\theta)$, то и $\infty \in K_h(\theta)$. Это

- а) открытый круг с диаметром $(0, e^{i\rho\theta}/a_\theta)$, если $a_\theta := h(\theta) > 0$;
- б) полуплоскость, если $a_\theta = 0$;
- в) внешность в S замкнутого круга с диаметром $[0, e^{i\rho\theta}/a_\theta]$, если $a_\theta < 0$.

Если в первом случае $h(\theta + \pi/\rho) < 0$, то $|h(\theta + \pi/\rho)| \leq a_\theta$ (см. [5, § 8.2, свойство 4]). Поэтому $K_h(\theta) \subset Q_\theta$, где $Q_\theta = S \setminus K_h(\theta + \pi/\rho)$ (см. рисунок). Заметим, что $0 \in \partial K_h(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$. Если $\theta \in \mathbb{R}$ — параметр движения, то при вращении множества $K_h(\theta)$ вокруг $0 \in \mathbb{C}$ образуется многолистная поверхность M_h с логарифмической точкой ветвления Θ_0 .

Пусть $M_h = M'_h \cup \{\Theta_0\}$, $M'_h = \bigcup K_h(\theta) | \theta \in \mathbb{R}$. Рассмотренное преобразование \mathcal{K} полуплоскостей в соответствующие круговые множества дополним условием $\mathcal{K}(\lambda_\infty) = \Theta_0$, $\mathcal{K}^{-1}(\Theta_0) = \lambda_\infty$ (см. 1.1). Но $\mathcal{K} : E_h \rightarrow M_h$ — взаимнооднозначное отображение. С его помощью индуцируем в M_h топологию и комплексную структуру из E_h . Тогда Θ_0 — точка ветвления M_h по отношению к проекции (см. (1.3)–(1.4)) $\psi_h : M_h \rightarrow S$, $\psi_h(q, \Delta) = q$; $\psi_h(\Theta_0) = 0$. По аналогии с определением 1 пару (ψ_h, M_h) назовем *кругообразным многообразием*, ассоциированным с $h \in \mathfrak{F}_\rho$. На M_h действует циклическая группа G_M автоморфизмов, порождаемая отображением $B_M := \mathcal{K}^{-1}B\mathcal{K} : M_h \rightarrow M_h$ (см. (1.7)). Для ее пространства орбит Ω_h справедлива модификация теоремы 1, в частности, в окрестности точки Θ_0 топологической моделью Ω_h является угол в L_0 (см. 2.1) $L_T = \{\Lambda_0\} \cup \{(t, \psi) \in L : 0 < t < T; \theta_0 \leq \psi \leq \theta_0 + 2\pi\rho\} \forall \theta_0 \in \mathbb{R}$ с вершиной в Λ_0 раствора $2\pi\rho$ со стандартно склеенными сторонами. Множество Ω_h назовем *ρ -листной в окрестности Θ_0 кругообразной диаграммой*, ассоциированной с $h \in \mathfrak{F}_\rho$. *Объединение кругообразных диаграмм* определяется в полном соответствии с определением 5.

Перейдем к вопросу суммирования ряда G (3.7). Определим G в точке ветвления: $G(\Theta_0) = 0$. Пусть $\mathcal{O}(G)$ — класс ρ -листных в окрестности Θ_0 кругообразных диаграмм, куда аналитически продолжается ряд G . Множество $\mathcal{O}(G) \neq \emptyset$: $\Omega_R \in \mathcal{O}(G)$, где $R = T^{-1}$; Ω_R — диаграмма, ассоциированная с функцией $h_R(\theta) \equiv R, \theta \in \mathbb{R}$ (см. пример 1, (2.7)).

О п р е д е л е н и е 7. Кругообразную диаграмму Ω_G назовем ρ -листным многоугольником Бореля ряда G (3.7), если Ω_G — наибольший элемент класса $\mathcal{O}(G)$ (ср. определение 6).

Из теоремы 3 и (3.8) выводим следующий многолиственный вариант теоремы А.

Следствие 2. Пусть h — индикатор целой функции f (1.2) порядка $\rho > 1/2$ и нормального типа, ассоциированной с рядом G (3.7). Тогда в обозначениях определения 7 и (3.1) кругообразная диаграмма $\Omega_h = \Omega_G$ — ρ -листный многоугольник Бореля ряда G , причем для любого $\theta \in \mathbb{R}$ преобразование Лапласа $G_\theta(q) := F_\theta(1/q)$ определяет аналитическое продолжение ряда G в круговое множество $K_h(\theta)$ (3.9).

З а м е ч а н и е 5. Для ряда g (0.1) его обобщенный многоугольник Бореля $M = \cup K_m(\psi) | \psi \in (-\pi, \pi]$, где $m = h_f^+$ (см. (0.3), (3.9) при $\rho = 1$). Поэтому однолиственный многоугольник Бореля $\Omega_h = \cup K_h(\psi) | \psi \in (-\pi, \pi]$ ряда $G(q) = qg(q)$ — бо́льшая область по сравнению с M , если индикатор $h = h_f$ принимает и отрицательные значения (см. пример в [7]).

4. Приложения результатов разд. 3

4.1. Аналитические свойства обращений рациональных функций

Изучим свойства областей аналитического продолжения обращений рациональных функций (отличных от дробно-линейных), в частности любого многочлена Лорана с комплексными коэффициентами

$$p = \alpha(z) := z^\rho + a_1 z^{\rho-1} + \dots + a_n z^{\rho-n}, \quad a_n \neq 0, \quad \{\rho, n\} \subset \mathbb{N}. \quad (4.1)$$

Характерная черта римановых поверхностей этих многозначных функций — наличие у римановых поверхностей каждой из них конечного числа точек ветвления. Этот факт, теорема 3 и следствие 2 приводят к следующему утверждению.

Теорема 4. Пусть $p = r(z) = s(z)/z^\rho$ — рациональная функция, такая что $\rho \in \mathbb{N}$, $s(z) \neq \text{const}$, $s(0) \neq 0$. Полагаем, что $\lambda_r = (\infty, f_0(p))$ — функциональный элемент римановой поверхности $\mathfrak{R}(r^{-1})$ обращения r , где $F(p) := f_0(p)$ — разложение r^{-1} в ряд Пуизе вида (1.1) в окрестности $p = \infty$. Пусть h — индикатор целой функции f , ассоциированной с рядом F (см. (1.2)). Тогда

1. Сопряженная диаграмма I_F — ρ -листный в окрестности λ_∞ вогнутый многоугольник I_h , ассоциированный с h (см. определения 2, 6).

2. В обозначениях леммы (см. 3.1) аналитическое продолжение \mathcal{F} ряда F осуществляет конформное гомеоморфное вложение $I_h \setminus \{\lambda_\infty\}$ в \mathbb{C} , причем $r \circ \mathcal{F} = \tilde{\varphi}_h$, где $\tilde{\varphi}_h: I_h \rightarrow S$ — проекция (см. (1.11), замечание 3). Кроме того, \mathcal{F} непрерывно продолжается вплоть до границы I_h , переводя вершины многоугольника I_h в точки ветвления отображения $r: S \rightarrow S$. С подобными свойствами существует отображение $\mathcal{G}: I_h \rightarrow \mathfrak{R}(r^{-1})$, $\mathcal{G}(\lambda_\infty) = \lambda_r$.

Аналогичные утверждения справедливы, если задан функциональный элемент

$$(v, f_u(p)) \in \mathfrak{R}(r^{-1}), \quad u, v \in \mathbb{C}; \quad r(u) = v; \quad f_u(p) = u + \sum_{k=0}^{\infty} b_k (p-v)^{(k+1)/\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

где $G(q) := f_u(q+v) - u$ — ряд Пуизе вида (3.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $I_h = I_F$ (см. теорему 3), граница ∂I_h диаграммы I_h содержит особые точки \mathcal{F} , а их лишь конечное число. Поэтому I_h — многоугольник, последовательность вершин которого $(p_j, \tilde{\Delta}_j)$, $j = 1, \dots, k$, где (см. замечания к определениям 1, 2)

$\tilde{\Delta}_j = \{e^{i\theta}, \theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j]\}$, определяется ориентацией ∂I_h . Следовательно, $h - 2\pi$ -периодическое продолжение в \mathbb{R} функции вида

$$h(\theta) = \Re p_j e^{i\rho\theta}, \quad \theta \in [\theta_{j-1}, \theta_j], \quad p_j \neq p_{j+1} \text{ (если } k > 1), \quad j = 1, \dots, k, \quad \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_k. \quad (4.3)$$

Здесь $p_{k+1} = p_1$, $\theta_k = \theta_0 + 2\pi$ (см. [3, предложение 4.1.1; 12]). Кроме того, $\{p_j = r(z_j)\}_1^k \subset \mathbb{C}$; $X := \{z_j\}_1^k \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — подмножество точек ветвления $r: S \rightarrow S$, т. е. $r'(z_j) = 0$, $j = 1, \dots, k$.

Пусть $m := (v, \tilde{\Delta}_v) \in \partial I_h$. Так как $r \circ \mathcal{F} = \tilde{\varphi}_h$ (см. теорему 4), то в круговой окрестности V точки v существует функциональный элемент $(v, f_u(p)) \in \mathfrak{R}(r^{-1})$ вида (4.2), такой что

$$\lim_{(p, \tilde{\Delta}) \rightarrow m} \mathcal{F}(p, \tilde{\Delta}) = \lim_{p \rightarrow v} f_u(p) = u, \quad (p, \tilde{\Delta}) \in D \subset I_h^8.$$

Здесь D — любая окрестность m со свойством $\tilde{\varphi}_h(D) \subset V$. Итак, доказана возможность непрерывного продолжения \mathcal{F} в любую точку $m \in \partial I_h$, каков бы ни был элемент (v, f_u) , регулярный при $\nu = 1$ или особый при $\nu > 1$.

По лемме (см. 3.1) аналитическое продолжение \mathcal{F} ряда F в I_h определяется системой интегралов $\{F_\theta = F(p; e^{i\theta}), \theta \in \mathbb{R}\}$ (3.1). Но $F_\theta = \mathcal{F} \circ \tilde{\varphi}_h^{-1}: \Pi_h(\theta) \rightarrow \mathbb{C}$ — биголоморфная ветвь r^{-1} для всех $\theta \in \mathbb{R}$ (см. замечание к определению 2). Поэтому множество $\mathcal{F}[I_h \setminus \{\lambda_\infty\}] \subset \mathbb{C}$ не содержит точек ветвления $r: S \rightarrow S$. Следовательно, $\mathcal{F}: I_h \setminus \{\lambda_\infty\} \rightarrow \mathbb{C}$ — конформное отображение. Функция $z = G(q) := F(1/q^\rho)$ — ряд Тейлора⁹, причем $r \circ G(q) \equiv 1/q^\rho$ в окрестности $q = 0$. Поэтому в обозначениях теоремы 4 обратной для G является функция $q = Q(z) := z/[s(z)]^{1/\rho}$ в окрестности $z = 0$, где рассматривается некоторая ветвь $\nu^{1/\rho}$. Отсюда выводим $G'(0) = 1/Q'(0) \neq 0$, так как по условию $s(0) \neq 0$. Итак, \mathcal{F} — конформное отображение в многоугольнике I_h , непрерывное в $\bar{I}_h = I_h \cup \partial I_h$.

Пусть $X = \mathcal{F}(I_h) \subset \mathbb{C}$. Но ∂I_h — связное множество, и таким же является множество $\partial X = \mathcal{F}(\partial I_h)$. Следовательно, X — односвязная область в \mathbb{C} . Первая часть утверждения 2 теоремы 4 вытекает теперь из [3, лемма 4.4.6].

Отображение \mathcal{F} реализует гомеоморфное и послойное вложение $\tilde{\varphi}_h: I_h \rightarrow S$ в накрытие $r: S \rightarrow S$ ($\tilde{\varphi}_h = r \circ \mathcal{F}$). С другой стороны, полагаем $Y: S \rightarrow \mathfrak{R}(r^{-1})$, $Y(z) = (r(z), f_z)$, где f_z — регулярный или особый элемент $\mathfrak{R}(r^{-1})$, в частности $Y(0) = (\infty, f_0) = \lambda_r$ (см. теорему 4). Это отображение определяет эквивалентность накрытий $r: S \rightarrow S$ и $\gamma: \mathfrak{R}(r^{-1}) \rightarrow S$, $\gamma[(r(z), f_z)] = r(z)$. Поэтому отображение $\mathcal{G} := Y \circ \mathcal{F}$ осуществляет искомое вложение I_h в $\mathfrak{R}(r^{-1})$. \square

З а м е ч а н и е 6. Близкий к утверждению 2 теоремы 4 результат для обращений многочленов Лорана вида (4.1) из некоторого класса имеется в [3, свойства 4.4.8, 4.4.12].

П р и м е р 2. Для иллюстрации теоремы 4 найдем конструктивные формулы функциональных элементов римановой поверхности $\mathfrak{R}(\alpha^{-1})$ обращения α^{-1} многочлена Лорана $p = \alpha(z)$ (4.1), исключая элементарный случай $p = (z - a)^\rho + p_0$, $\rho \in \mathbb{N}$, $a, p_0 \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим возможный способ локальной униформизации множества $\{(z, p) \in S \times S: \alpha(z) - p = 0\}$ в окрестности точки (∞, ∞) . Переходя к координатам $z = 1/u$, $p = 1/t^\rho$, преобразуем следующим образом (4.1), рассматривая ветвь $v^{1/\rho}$ со свойством $[P_n(0)]^{1/\rho} = 1$:

$$t = G(u) := [\alpha(1/u)]^{-1/\rho} = u/[P_n(u)]^{1/\rho}, \quad P_n(u) = 1 + \sum_{j=1}^n a_j u^j.$$

Из формулы Лагранжа, учитывая условие $G'(0) = 1$, получим разложение в ряд Тейлора в окрестности $t = 0$ обращения G^{-1} функции G

$$u = G^{-1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1}, \quad c_k = \frac{1}{(k+1)!} \frac{d^k}{d\zeta^k} \left\{ [\chi(\zeta)]^{k+1} \right\}_{|\zeta=0}; \quad \chi(\zeta) := \frac{\zeta}{G(\zeta)} = [P_n(\zeta)]^{1/\rho}.$$

⁸ Если $\nu > 1$, предел не зависит от выбора ветви f_u .

⁹ См. (1.1), рассуждения перед определением 6.

Опираясь на формулу Бруно для производных сложной функции [14, гл. 2], вычислим значения коэффициентов $\{c_k\}$, называемых *полиномами Белла*:

$$c_0 = 1; \quad c_k = \frac{\Upsilon_k}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \Upsilon_k = \sum_{(m,s) \in \Xi_k} \frac{\prod_{l=0}^{m-1} [(k+1)/\rho - l]}{s_1! \cdots s_n!} a_1^{s_1} \cdots a_n^{s_n}, \quad (4.4)$$

где $\Xi_k = \left\{ (m, s) : m \in \mathbb{N}, s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n, \sum_{j=1}^n s_j = m; \sum_{j=1}^n j s_j = k \right\}$. Ряд $u = F(p) := G^{-1}(p^{-1/\rho})$ сходится при $|p| > R$, где $R > 0$ — его радиус расходимости. По теореме 4 F , как ветвь обращения рациональной функции $r(u) = \alpha(1/u)$, $u \in S$, допускает конформное продолжение \mathcal{F} в $I_h \setminus \{\lambda_\infty\}$, где I_h — ρ -листный в окрестности λ_∞ вогнутый полигон. Здесь h — индикатор ассоциированной с F (см. (4.3), (4.4)) целой функции f (1.2):

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k, \quad d_0 = c_0/\Gamma(1/\rho), \quad d_k = c_k/\Gamma[(k+1)/\rho] = \frac{\Upsilon_k}{\rho \Gamma\left(\frac{k+1}{\rho} + 1\right)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Но $\mathcal{F}(\lambda_\infty) = 0$, $\mathcal{F}(m) \neq 0$, $m \in I_h \setminus \{\lambda_\infty\}$ (иначе $1/\mathcal{F}(m_0) = \infty$ для некоторого $m_0 \in I_h$, что невозможно). Следовательно, многозначная функция $z = 1/F(p)$ имеет конформное продолжение $1/\mathcal{F}$ в $I_h \setminus \{\lambda_\infty\}$, непрерывное вплоть до границы ∂I_h .

З а м е ч а н и е 7. При $n > \rho$ имеем: $\alpha(0) = \infty$ и α — рациональная функция, удовлетворяющая условиям теоремы 4, если в ее формулировке параметр ρ заменить на $n - \rho$. Элемент $(\infty, f_0(p))$ поверхности $\mathfrak{R}(\alpha^{-1})$ находим тем же способом, вводя координату $p = 1/t^{n-\rho}$.

4.2. Приложение к решению алгебраических уравнений

В 1921 г. Меллин [15] нашел интегральное представление и разложение в кратный *степенной ряд* решения $y(x) = y(x_1, \dots, x_{n-1})$ уравнения $y^n + x_1 y^{n-1} + \dots + x_{n-1} y - 1 = 0$ в окрестности $U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ точки 0 с условием $y(0) = 1$. О дальнейшем развитии результатов Меллина см. [16].

Из результатов 4.1 (см. теорему 4, пример 2) вытекает метод решения алгебраического уравнения $\{z \in \mathbb{C} : \alpha(z) = 0\}$, где $\alpha = P_n$ — многочлен степени n вида (4.1) при $\rho = n$, который существенно отличается от известных способов его решения. Проблема определения этих решений эквивалентна проблеме нахождения многозначной обратной функции α_n^{-1} многочлена $p = \alpha_n(z)$, где $\alpha_n(z) = \alpha(z) - a_n$.

Теорема 5. Пусть в этих обозначениях $r_n(u) = \alpha_n(1/u)$, $u \in S$, а $u = F(p)$, $|p| > R$ — разложение обращения r_n^{-1} функции $p = r_n(u)$ в ряд Пуизе вида (1.1), где $\rho = n$, в окрестности $p = \infty$. Полагаем, что $h \in \mathfrak{P}_\rho \setminus \mathfrak{D}_\rho$ — индикатор вида (4.3) целой функции f (1.2) порядка n и нормального типа, ассоциированной с F . Тогда

1. Если $|a_n| > R$, то $z = 1/F(-a_n)$ — совокупность решений уравнения $P_n(z) = 0$, причем коэффициенты ряда F (см. (4.4), (4.5)) таковы:

$$c_0 = 1; \quad c_k = \sum_{(m,s) \in \Xi_k} \frac{\prod_{l=0}^{m-1} [(k+1)/n - l]}{s_1! \cdots s_{n-1}! (k+1)} a_1^{s_1} \cdots a_{n-1}^{s_{n-1}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

где в обозначениях (4.4) число n в Ξ_k заменяется на $n - 1$.

2. Если существует $\theta \in \mathbb{R}$ со свойством $-a_n \in \Pi_h(\theta)^{10}$ (см. (0.6), (3.1) при $\rho = n$), то $z = 1/F_\theta(-a_n)$ — решение уравнения $P_n(z) = 0$. Здесь $F_\theta(p) = n \int_0^{\infty(\text{Arg } z=\theta)} f(z) e^{-pz^n} dz$, $p \in \Pi_h(\theta)$.

¹⁰ Возможно, существует не одно такое значение параметра θ .

Подобные утверждения верны, если задан элемент $(v, f_u(p)) \in \mathfrak{R}(r_n^{-1})$, $u, v \in \mathbb{C}$ (4.2).

З а м е ч а н и е 8. При исследовании упомянутой проблемы любой коэффициент $a_\rho \neq 0$ многочлена P_n , помимо a_n , можно выбрать в качестве свободного неизвестного, учитывая, что уравнения $P_n(z) = 0$ и $\alpha(z) = 0$, где $\alpha(z) := P_n(z)/z^{n-\rho}$ — многочлен Лорана (см. (4.1)), имеют одни и те же принадлежащие $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ решения. Проблема нахождения этих решений уравнения $\alpha(z) = 0$ эквивалентна проблеме нахождения обращения α_ρ^{-1} многочлена $p = \alpha_\rho(z)$, где $\alpha_\rho(z) = \alpha(z) - a_\rho$. Для α_ρ справедливо утверждение, аналогичное теореме 5.

З а к л ю ч е н и е

Найдена новая модификация широко известной теоремы Д. Пойа, предлагающая способы аналитического продолжения рядов Пуизе — Лорана, Пуизе — Тэйлора, порождаемых степенной функцией $z = w^{1/\rho}$, $\rho \neq 1$. Получено ее приложение к нахождению нового метода решения алгебраического уравнения.

С чувством глубокой благодарности вспоминаю Валентина Константиновича Иванова, на семинарах которого в Уральском университете я узнал о теореме Пойа и о ее впечатляющих приложениях. Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю признательность С. Р. Насырову и Н. Н. Тарханову за полезные обсуждения, связанные с некоторыми вопросами этой работы. Автор благодарен В. А. Степаненко за информацию о библиографии по теме статьи и М. Н. Завьялову за техническую помощь при наборе текста рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Borel E.** Leçons sur les séries divergentes. Paris: Gaunter-Villars, 1901. 184 p.; 2nd ed. Paris: Gaunter-Villars, 1928. 260 p. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions).
2. **Polya G.** Untersuchungen über Lücken and Singularitäten von Potenzsrihen // Math. Zeits. 1929. Bd. 29, no. 1. P. 549–640. doi: 10.1007/BF01180553.
3. **Maergoiz L.S.** Asymptotic characteristics of entire functions and their applications in mathematics and biophysics. 2nd ed. (revised and enlarged). Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2003. 362 p.
4. **Bernstein V.** Sulle proprieta caratteristiche delle indicatrici di crescita delle transcendententi intere d'ordine finito // Memoire della classe di scien. fis. mat. e natur. 1936. Vol. 6. P. 131–189.
5. **Levin B.Ya.** Lectures on entire functions. Providence: Amer. Math. Soc., 1996. 248 p. (Transl. Math. Monographs; vol. 150).
6. **Rockafellar R.T.** Convex analysis. Princeton: Princeton University Press, 1970. 451 p.
7. **Маергойз Л.С.** Многолистные варианты теорем Пойа — Бернштейна, Бореля для целых функций порядка $\rho \neq 1$ и их приложения // Докл. АН. 2018. Т. 478, № 3. С. 266–270. doi: 10.1134/S1064562418010131.
8. **Maergoiz L.S.** Ways of analytic continuation of many-valued function of one variable. Applications // Internat. conf. “Complex analysis and its applications“ dedicated to the 90th birth anniversary of I. P. Mityuk (Gelendzhik — Krasnodar, Russia, June 2 to 9, 2018). P. 75.
9. **Maergoiz L.S.**, Manysheeted variants of Polya–Bernstein and Borel theorems for entire functions of order $\rho \neq 1$ and some applications: Preprint / Siberian Federal University. Krasnoyarsk, 2017. 28 p.
10. **Forster O.** Riemannsche Flächen. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1977. 226 p. doi: 10.1007/978-3-642-66547-9.
11. **Левин Б.Я.** Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.
12. **Маергойз Л.С.** О структуре индикатора целой функции конечного порядка и нормального типа // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 301–313.
13. **Джрбашян М.М.** Интегральные преобразования и представления в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.
14. **Riordan J.** An Introduction to combinatorial analysis, N Y: Jorn Wiley and Sons, 1958. 244 p.
15. **Mellin H.J.** Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. 1921. Vol. 172. P. 658–661.

16. Садиков Т.М., Цих А.К. Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных. М.: Наука, 2014. 408 с.

Поступила 14.11.2018

После доработки 17.01.2019

Принята к публикации 21.01.2019

Маергойз Лев Сергеевич

д-р физ.-мат. наук, профессор

Федеральный исследовательский центр

“Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук”

(ФИЦ КНЦ СО РАН) г. Красноярск

e-mail: bear.lion@mail.ru

REFERENCES

1. Borel E. *Leçons sur les séries divergentes*. In: *Collection de monographies sur la théorie des fonctions*. Paris: Gaunter-Villars, 1901, 184 p.; 2nd ed. Paris: Gauthier-Villars, 1928, 260 p.
2. Polya G. Untersuchungen über Lücken and Singularitäten von Potenzsrihen. *Math. Zeits.*, 1929, vol. 29, no. 1, pp. 549–640. doi: 10.1007/BF01180553.
3. Maergoiz L.S. *Asymptotic characteristics of entire functions and their applications in mathematics and biophysics*. 2nd ed. Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 2003, 362 p. ISBN: 1-4020-1462-7/hbk.
4. Bernstein V. Sulle proprieta caratteristiche delle indicatrici di crescita delle trascendenti intere d'ordine finito. *Memoire della classe di scien. fis. mat. e natur.*, 1936, vol. 6, pp. 131–189.
5. Levin B.Ya. *Lectures on entire functions*. Providence: Amer. Math. Soc., 1996, 248 p. ISBN: 0-8218-0282-8.
6. Rockafellar R. *Convex analysis*. Princeton: Princeton University Press, 1970, 451 p. ISBN: 0691015864.
7. Maergoiz L.S. Many-sheeted versions of the Polya–Bernstein and Borel theorems for entire functions of order $\rho \neq 1$ and their appl. *Dokl. Math.*, 2018, vol. 97, no. 1, pp. 42–46. doi: 10.1134/S1064562418010131.
8. Maergoiz L.S. Ways of analytic continuation of many-valued function of one variable. Applications. *Int. conf. “Complex analysis and its applications”* dedicated to the 90th birth anniversary of I. P. Mityuk (Gelendzhik – Krasnodar, Russia, June 2 to 9, 2018), p. 75.
9. Maergoiz L.S. *Manysheeted variants of Polya–Bernstein and Borel theorems for entire functions of order $\rho \neq 1$ and some applications*, Preprint, Krasnoyarsk: Siberian Federal University Publ., 2017. 28 p.
10. Forster O. *Riemannsche Flächen*. Berlin; Heidelberg; N Y: Springer-Verlag, 1977, 226 p. doi: 10.1007/978-3-642-66547-9.
11. Levin B.Ya. *Distribution of zeros of entire functions*. Providence: Amer. Math. Soc., 1964, 523 p. ISBN: 978-0-8218-4505-9. Original Russian text published in Levin B.Ya., *Raspredelenie kornei tselnykh funktsii*, Moscow, Gostekhizdat Publ., 1956, 632 p.
12. Maergoiz L.S. The structure of the indicator of an entire function of finite order and normal type. *Siberian Math. J.*, 1975, vol. 16, no. 2, pp. 232–241. doi: 10.1007/BF00967507.
13. Dzhrbashyan M.M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti* [Integral transformations and expansions of functions in a complex domain]. Moscow: Nauka Publ. 1966, 672 p.
14. Riordan J. *An introduction to combinatorial analysis*. N Y: John Wiley and Sons, 1958, 244 p.
15. Mellin H.J. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma. *C. R. Acad. Sci.*, 1921, vol. 172, pp. 658–661.
16. Sadykov T.M., Tsikh A.K. *Gipergeometricheskie i algebraicheskie funktsii mnogikh peremennykh* [Hypergeometric and algebraic functions of many variables]. Moscow: Nauka Publ., 2014, 408 p. ISBN: 978-5-02-039082-9.

Received November 14, 2018

Revised January 17, 2019

Accepted January 21, 2019

Lev Sergeevich Maergoiz, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Federal Research Center “Krasnoyarsk Science Center of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences”, Academgorodok, 50, Krasnoyarsk, 660036 Russia, e-mail: bear.lion@mail.ru.