ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 1 2019

УДК 517.977

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЙ СДВИГ НА СОПУТСТВУЮЩИЕ ТОЧКИ В ПОЗИЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

М. И. Гомоюнов

Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра двух лиц. Движение динамической системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$. Показатель качества состоит из двух слагаемых: первое зависит от движения системы, реализовавшегося к терминальному моменту времени, второе включает в себя интегральную оценку реализаций управлений игроков. В рамках позиционного подхода проведены формализации рассматриваемой дифференциальной игры в классах “стратегии — контрстратегии”, “контрстратегии — стратегии” и, при дополнительном условии седловой точки для маленькой игры, “стратегии — стратегии”. В каждом из случаев доказано существование цены и седловой точки игры. При этом основу доказательств составляет подходящая модификация метода экстремального сдвига на сопутствующие точки, учитывающая специфику систем дробного порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, производная Капуто, дифференциальная игра, цена игры, позиционная стратегия, контрстратегия, экстремальный сдвиг.

M. I. Gomoyunov. Extremal shift to accompanying points in a positional differential game for a fractional-order system.

A two-person zero-sum differential game is considered. The motion of the dynamical system is described by an ordinary differential equation with a Caputo fractional derivative of order $\alpha \in (0,1)$. The performance index consists of two terms: the first depends on the motion of the system realized by the terminal time and the second includes an integral estimate of the realizations of the players’ controls. The positional approach is applied to formalize the game in the “strategies — counter-strategies” and “counter-strategies — strategies” classes as well in the “strategies — strategies” class under the additional saddle point condition in the small game. In each case, the existence of the value and of the saddle point of the game is proved. The proofs are based on an appropriate modification of the method of extremal shift to accompanying points, which takes into account the specific properties of fractional-order systems.

Keywords: fractional-order differential equation, Caputo derivative, differential game, game value, positional strategy, counter-strategy, extremal shift.

MSC: 49N79, 34K37

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-1-11-34

Введение

В теории позиционных дифференциальных игр [1–5] метод экстремального сдвига на сопутствующие точки является одним из основных инструментов для построения оптимальных стратегий управления игроков и доказательства существования цены игры. Изначально этот метод был разработан для динамических систем, движение которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями [3; 4], и в дальнейшем был развит для функционально-дифференциальных систем запаздывающего [6] и нейтрального [7] типов, а также для систем среднего поля [8]. В настоящей работе дается модификация метода экстремального сдвига на сопутствующие точки для систем дробного порядка.

Рассматривается антагонистическая дифференциальная игра двух лиц, в которой движение динамической системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ (см., например, [9–11]). Показатель качества состоит из двух слагаемых: первое зависит от движения системы, реализовавшегося к терминальному моменту времени, второе включает в себя интегральную оценку реализаций управлений игроков. Формализация дифференциальной игры проводится в классах чистых позиционных стратегий первого игрока и позиционных контрстратегий второго игрока в рамках подхода [1–4]. Заметим, что в силу нелокального характера дробной производной Капуто под позицией системы естественно, по аналогии с [5;6], понимать пару, состоящую из текущего момента времени и истории движения системы, сложившейся к этому моменту. Следуя схеме рассуждений из [3, теорема 29.1], получаем, что рассматриваемая дифференциальная игра имеет цену и седловую точку из оптимальных стратегий. Основу доказательства составляет модификация метода экстремального сдвига на сопутствующие точки, учитывающая специфику систем дробного порядка. При этом одним из ключевых моментов является подходящий выбор функции Ляпунова, определяющей окрестность для поиска сопутствующих точек. Кроме того, в работе рассмотрены формализации дифференциальной игры в классах "контрстратегии — стратегии" и, при дополнительном условии седловой точки для маленькой игры (см., например, [3, с. 79]), в классах "стратегии — стратегии". В каждом из случаев проведены соответствующие доказательства существования цены и седловой точки игры.

Отметим, что в [12] рассматриваемая дифференциальная игра изучалась в классах стратегий управления с поводырем. При этом для построения оптимальных стратегий игроков использовались подходящие аппроксимации [13] конфликтно-управляемых систем с дробными производными при помощи функционально-дифференциальных систем запаздывающего типа с производными первого порядка. Другие типы дифференциальных игр в системах дробного порядка исследовались, например, в [14–17] (см. также библиографию к этим статьям).

1. Интегралы и производные дробного порядка

1.1. Основные обозначения

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство n-мерных векторов со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\|\cdot\|$. Для отрезка $[t_0, \vartheta] \subset \mathbb{R}$ через $L^\infty([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ обозначаем банахово пространство (классов эквивалентности) существенно ограниченных измеримых по Лебегу функций $x : [t_0, \vartheta] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x(\cdot)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{t \in [t_0, \vartheta]} \|x(t)\|$, а через $C([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных функций $x : [t_0, \vartheta] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Далее, пусть $\mathrm{Lip}^0([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ — множество функций $x(\cdot) \in C([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих равенству $x(t_0) = 0$ и условию Липшица $\|x(t) - x(\tau)\| \leqslant \lambda |t - \tau|$, $t, \tau \in [t_0, \vartheta]$, с некоторым своим числом $\lambda \geqslant 0$. Для заданного числа $\lambda \geqslant 0$ через $\mathrm{Lip}^0([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n; \lambda)$ обозначаем множество функций $x(\cdot) \in \mathrm{Lip}^0([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$, для которых условие Липшица выполняется с этим числом λ.

1.2. Дробный интеграл Римана — Лиувилля

Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Для функции $\varphi : [t_0, \vartheta] \to \mathbb{R}^n$ *левосторонним дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка α на отрезке* $[t_0, \vartheta]$ называется величина (см., например, [9, с. 42])

$$(I^\alpha \varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{\varphi(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

где Γ — гамма-функция. Отметим, что для любой функции $\varphi(\cdot) \in L^\infty([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ величина $(I^\alpha \varphi)(t)$ определена при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, справедливо включение $(I^\alpha \varphi)(\cdot) \in C([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ (см., например, [9, замечание 3.3]) и имеет место равенство (см., например, [9, теорема 2.5])

$$\big(I^{1-\alpha}(I^\alpha \varphi)\big)(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau) \mathrm{d}\tau, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{1.1}$$

Рассмотрим множество

$$I^{\alpha}(L^{\infty}([t_0,\vartheta],\mathbb{R}^n)) = \Big\{x(\cdot) \in C([t_0,\vartheta],\mathbb{R}^n)\colon x(t) = (I^{\alpha}\varphi)(t),\ t \in [t_0,\vartheta],\ \varphi(\cdot) \in L^{\infty}([t_0,\vartheta],\mathbb{R}^n)\Big\}. \tag{1.2}$$

Утверждение 1. *Для функции $x : [t_0,\vartheta] \to \mathbb{R}^n$ включение $x(\cdot) \in I^{\alpha}(L^{\infty}([t_0,\vartheta],\mathbb{R}^n))$ имеет место тогда и только тогда, когда $x(\cdot) \in C([t_0,\vartheta],\mathbb{R}^n)$ и $(I^{1-\alpha}x)(\cdot) \in \mathrm{Lip}^0([t_0,\vartheta],\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство утверждения проводится по схеме из [9, теорема 2.3].

Утверждение 2. *Пусть $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и функция $\Psi(\cdot) \in C([t_0,\vartheta],\mathbb{R})$ такова, что*

$$\Psi(t) = a(I^{\alpha}\Psi)(t) + b\int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau + 1, \quad t \in [t_0,\vartheta]. \tag{1.3}$$

Пусть $c \in \mathbb{R}$ и для функции $\psi(\cdot) \in C([t_0,\vartheta],\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\psi(t) \leqslant a(I^{\alpha}\psi)(t) + b\int\limits_{t_0}^{t} \psi(\tau)\mathrm{d}\tau + c, \quad t \in [t_0,\vartheta]. \tag{1.4}$$

Тогда имеет место оценка

$$\psi(t) \leqslant c\Psi(t), \quad t \in [t_0,\vartheta]. \tag{1.5}$$

Доказательство. Зафиксируем числа $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Во-первых, докажем, что интегральное уравнение (1.3) действительно имеет непрерывное на отрезке $[t_0,\vartheta]$ решение $\Psi(\cdot)$ и что такое решение единственно. Следуя схеме из [18, теорема 3.10] (также см., например, [19, теорема 2.3] для случая уравнений дробного порядка), рассмотрим банахово пространство $C_e([t_0,\vartheta],\mathbb{R})$ непрерывных функций $\Psi : [t_0,\vartheta] \to \mathbb{R}$ со взвешенной нормой (нормой Билецкого)

$$\|\Psi(\cdot)\|_e = \max_{t \in [t_0,\vartheta]} \big(|\Psi(t)| e^{-(t-t_0)\omega}\big),$$

где число $\omega > 0$ удовлетворяет неравенству $a\omega^{-\alpha} + b\omega^{-1} < 1$. Тогда определяемое по правилу

$$A(\Psi(\cdot))(t) = a(I^{\alpha}\Psi)(t) + b\int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\tau)\mathrm{d}\tau + 1, \quad t \in [t_0,\vartheta], \quad \Psi(\cdot) \in C_e([t_0,\vartheta],\mathbb{R}),$$

отображение $A\colon C_e([t_0,\vartheta],\mathbb{R}) \to C_e([t_0,\vartheta],\mathbb{R})$ будет сжимающим. Стало быть, по принципу сжимающих отображений (см., например, [20, гл. II, § 4, теорема 1]) это отображение имеет единственную неподвижную точку, которая является единственным решением уравнения (1.3).

Зафиксируем число $c \in \mathbb{R}$ и функцию $\psi(\cdot) \in C([t_0,\vartheta],\mathbb{R})$, удовлетворяющую неравенству (1.4). Доказательство оценки (1.5) следует схеме из [11, лемма 6.19]. Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функцию $\Psi_{\varepsilon}(t) = (c+\varepsilon)\Psi(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$. Имеем $\Psi_{\varepsilon}(\cdot) \in C([t_0,\vartheta],\mathbb{R})$ и

$$\Psi_{\varepsilon}(t) = a(I^{\alpha}\Psi_{\varepsilon})(t) + b\int\limits_{t_0}^{t} \Psi_{\varepsilon}(\tau)\mathrm{d}\tau + c + \varepsilon, \quad t \in [t_0,\vartheta]. \tag{1.6}$$

Покажем, что $\psi(t) < \Psi_{\varepsilon}(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$. Рассуждая от противного, предположим что это неравенство не выполняется. Поскольку $\psi(t_0) \leqslant c < c + \varepsilon = \Psi_{\varepsilon}(t_0)$ в силу оценки (1.4) и функции $\psi(\cdot)$ и $\Psi_{\varepsilon}(\cdot)$ непрерывны, то найдется такое число $t_* \in (t_0,\vartheta]$, что

$$\psi(t_*) = \Psi_{\varepsilon}(t_*), \quad \psi(t) < \Psi_{\varepsilon}(t), \quad t \in [t_0,t_*). \tag{1.7}$$

Тогда, учитывая оценку (1.4) и равенство (1.6), выводим

$$\psi(t_*) \leqslant a(I^\alpha \psi)(t_*) + b\int\limits_{t_0}^{t_*} \psi(\tau)\mathrm{d}\tau + c \leqslant a(I^\alpha \Psi_\varepsilon)(t_*) + b\int\limits_{t_0}^{t_*} \Psi_\varepsilon(\tau)\mathrm{d}\tau + c = \Psi_\varepsilon(t_*) - \varepsilon < \Psi_\varepsilon(t_*),$$

что противоречит равенству в (1.7). Таким образом, для любого числа $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство $\psi(t) < (c+\varepsilon)\Psi(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, откуда следует справедливость оценки (1.5). □

Отметим, что схожие обобщения леммы Беллмана — Гронуолла на случай неравенств вида (1.4) даны, например, в [21, теорема 1.4; 22, лемма 3.2].

1.3. Дробные производные Римана — Лиувилля и Капуто

Для функции $x : [t_0, \vartheta] \to \mathbb{R}^n$ *левосторонними дробными производными Римана — Лиувилля и Капуто порядка* $\alpha \in (0, 1)$ *на отрезке* $[t_0, \vartheta]$ называются соответственно величины (см., например, [9, с. 43; 10, с. 91])

$$\begin{aligned}(D^\alpha x)(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I^{1-\alpha}x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{x(\tau)}{(t-\tau)^\alpha}\mathrm{d}\tau,\\ ({}^C D^\alpha x)(t) &= (D^\alpha(x(\cdot) - x(t_0)))(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{x(\tau)-x(t_0)}{(t-\tau)^\alpha}\mathrm{d}\tau, \quad t \in [t_0, \vartheta].\end{aligned} \tag{1.8}$$

Отметим, что для любой функции $x(\cdot) \in I^\alpha(L^\infty([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n))$ величина $(D^\alpha x)(t)$ определена при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$, справедливо включение $(D^\alpha x)(\cdot) \in L^\infty([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ и имеет место равенство (см., например, [9, теорема 2.4])

$$\big(I^\alpha(D^\alpha x)\big)(t) = x(t), \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{1.9}$$

Утверждение 3. *Для любого числа $M > 0$ найдется такое число $R > 0$, что, каковы бы ни были число $\varepsilon > 0$ и функция $x(\cdot) \in I^\alpha(L^\infty([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n))$, из неравенств $\|(D^\alpha x)(\cdot)\|_\infty \leqslant M$ и $\|(I^{1-\alpha}x)(\cdot)\|_\infty \leqslant \varepsilon$ следует оценка*

$$\|x(\cdot)\|_\infty \leqslant R\varepsilon^\alpha. \tag{1.10}$$

Доказательство. Пусть $x(\cdot) \in I^\alpha(L^\infty([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n))$ и $\varphi(t) = (D^\alpha x)(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Тогда, во-первых, имеем $\|\varphi(\cdot)\|_\infty \leqslant M$, а во-вторых, с учетом (1.1) и (1.9) получаем

$$\Big\|\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\Big\| = \big\|\big(I^{1-\alpha}(I^\alpha\varphi)\big)(t)\big\| = \|(I^{1-\alpha}x)(t)\| \leqslant \varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Опираясь на эти оценки и рассуждая по схеме из [9, теорема 14.11], выводим $\|(I^\alpha\varphi)(\cdot)\|_\infty \leqslant R\varepsilon^\alpha$ для $R = (2+\alpha^{-1})M^{1-\alpha}/\Gamma(\alpha)$, откуда заключаем справедливость неравенства (1.10). □

Утверждение 4. *Пусть $x(\cdot) \in I^\alpha(L^\infty([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n))$ и $V(t) = \|x(t)\|^2$, $t \in [t_0, \vartheta]$. Тогда $V(\cdot) \in I^\alpha(L^\infty([t_0, \vartheta], \mathbb{R}))$ и $(D^\alpha V)(t) \leqslant 2\langle x(t), (D^\alpha x)(t)\rangle$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$. Кроме того, для любого числа $M > 0$ можно указать такое число $M_V > 0$, что, какова бы ни была функция $x(\cdot) \in I^\alpha(L^\infty([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n))$, удовлетворяющая неравенству $\|(D^\alpha x)(\cdot)\|_\infty \leqslant M$, для функции $V(t) = \|x(t)\|^2$, $t \in [t_0, \vartheta]$, справедлива оценка $\|(D^\alpha V)(\cdot)\|_\infty \leqslant M_V$.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения вытекает из результатов работы [23] (см. следствие 3.2, а также лемму 3.1 и ее доказательство). □

2. Дифференциальная игра

2.1. Динамическая система

Рассмотрим *динамическую систему*, движение которой на промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ описывается дробным дифференциальным уравнением с производной Капуто порядка $\alpha \in (0, 1)$:

$$({}^C D^\alpha x)(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)), \quad x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^r, \quad v(t) \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^s, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \quad (2.1)$$

Здесь t — время; $x(t)$ — значение фазового вектора в момент времени t; $u(t)$ и $v(t)$ — текущие управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно; $\mathbb{U}$ и $\mathbb{V}$ — компакты.

Полагаем, что функция $f : [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}^n$ обладает следующими свойствами:

$(f.1)$ Функция f непрерывна.

$(f.2)$ Для любого числа $R > 0$ существует такое число $\lambda_f > 0$, что справедливо неравенство

$$\|f(t, x, u, v) - f(t, y, u, v)\| \leqslant \lambda_f \|x - y\|, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x, y \in B(R), \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V},$$

где через $B(R)$ обозначен замкнутый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом R.

$(f.3)$ Существует такое число $c_f > 0$, что имеет место оценка

$$\|f(t, x, u, v)\| \leqslant (1 + \|x\|)c_f, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

Позицией системы (2.1) называем пару $(t, w(\cdot))$, состоящую из момента времени $t \in [t_0, \vartheta]$ и функции $w : [t_0, t] \to \mathbb{R}^n$, играющей роль истории движения системы (2.1) на отрезке $[t_0, t]$. При этом предполагаем выполненным включение $w(\cdot) \in \{w(t_0)\} + I^\alpha(L^\infty([t_0, t], \mathbb{R}^n))$. В согласии с (1.2) это включение означает, что $w(\tau) = w(t_0) + (I^\alpha \varphi)(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$, для некоторой функции $\varphi(\cdot) \in L^\infty([t_0, t], \mathbb{R}^n)$. Отметим, что $w(\cdot) \in C([t_0, t], \mathbb{R}^n)$. Определим множество позиций

$$G = \big\{(t, w(\cdot)) \colon t \in [t_0, \vartheta], \ w(\cdot) \in \{w(t_0)\} + I^\alpha(L^\infty([t_0, t], \mathbb{R}^n))\big\}.$$

Пусть выбраны начальная позиция $(t_*, w_*(\cdot)) \in G$ и момент времени $t^* \in [t_*, \vartheta]$. *Допустимыми реализациями управления* первого $u(\cdot)$ и второго $v(\cdot)$ игроков на промежутке $[t_*, t^*)$ считаем измеримые по Лебегу функции $u : [t_*, t^*) \to \mathbb{U}$ и $v : [t_*, t^*) \to \mathbb{V}$. Множества всех таких реализаций обозначаем через $\mathcal{U}(t_*, t^*)$ и $\mathcal{V}(t_*, t^*)$ соответственно. Под *движением системы* (2.1), порожденным из позиции $(t_*, w_*(\cdot))$ реализациями $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, t^*)$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, t^*)$, понимаем функцию $x(\cdot) \in \{w_*(t_0)\} + I^\alpha(L^\infty([t_0, t^*], \mathbb{R}^n))$, которая удовлетворяет начальному условию $x(t) = w_*(t)$, $t \in [t_0, t_*]$, и вместе с $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ при почти всех $t \in [t_*, t^*]$ удовлетворяет уравнению (2.1). В силу условий $(f.1)$–$(f.3)$ такое движение $x(\cdot)$ существует и единственно (см., например, [12, утверждение 2]). Кроме того, справедливо интегральное представление:

$$x(t) = w_*(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_0}^{t_*} \frac{({}^C D^\alpha w_*)(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_*}^{t} \frac{f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau))}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau, \quad t \in [t_*, t^*]. \quad (2.2)$$

2.2. Множество допустимых позиций и свойства движений системы

Задавшись достаточно большим числом $R_0 > 0$, определим *множество G_* допустимых позиций системы* (2.1) следующим образом:

$$G_* = \Big\{(t, w(\cdot)) \in G \colon \|w(t_0)\| \leqslant R_0, \ \|({}^C D^\alpha w)(\tau)\| \leqslant (1 + \|w(\tau)\|)c_f \text{ при п.в. } \tau \in [t_0, t]\Big\},$$

где c_f — число из условия $(f.3)$.

Утверждение 5. *Пусть* $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, $t^* \in [t_*, \vartheta]$ *и* $x(\cdot)$ — *движение системы* (2.1), *порожденное из позиции* $(t_*, w_*(\cdot))$ *реализациями* $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, t^*)$ *и* $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, t^*)$. *Тогда для любого* $t \in [t_0, t^*]$ *справедливо включение* $(t, x_t(\cdot)) \in G_*$, *где обозначено*

$$x_t(\tau) = x(\tau), \quad \tau \in [t_0, t]. \tag{2.3}$$

Кроме того, существуют такие числа $R_x > 0$, $H_x > 0$ *и* $M_x > 0$, *что, каковы бы ни были* $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, $t^* \in [t_*, \vartheta]$, $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, t^*)$ *и* $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, t^*)$, *для соответствующего движения* $x(\cdot)$ *системы* (2.1) *имеют место неравенства*

$$\|x(t)\| \leqslant R_x, \quad \|x(t) - x(\tau)\| \leqslant H_x |t - \tau|^\alpha, \quad t, \tau \in [t_0, t^*],$$
$$\|({}^C D^\alpha x)(t)\| \leqslant M_x \text{ при п.в. } t \in [t_0, t^*].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость этого утверждения вытекает из результатов работы [12] (см. утверждения 1, 2 и следствие 1). □

Утверждение 6. *Существует такое число* $L_x > 0$, *что для движений* $x(\cdot)$ *и* $y(\cdot)$ *системы* (2.1), *порожденных из позиций* $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$ *и* $(t_*, r_*(\cdot)) \in G_*$ *соответственно одной и той же парой реализаций* $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$ *и* $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, \vartheta)$, *имеет место оценка*

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant L_x \max_{\tau \in [t_0, t_*]} \|w_*(\tau) - r_*(\tau)\|, \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Взяв число R_x из утверждения 5, определим число λ_f в согласии с условием $(f.2)$ и положим $L_x = 3E_\alpha((\vartheta - t_0)^\alpha \lambda_f)$, где E_α — функция Миттаг-Леффлера (см., например, [9, с. 33]). Рассмотрим движения $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ системы (2.1), порожденные из позиций $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$ и $(t_*, r_*(\cdot) \in G_*$ соответственно парой реализаций $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, \vartheta)$. Заметим, что при $t \in [t_0, t_*]$ неравенство (2.4) автоматически выполняется, так как $L_x \geqslant 1$. Пусть $t \in [t_*, \vartheta]$. Принимая во внимание интегральное представление (2.2), выводим

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant \|w_*(t_0) - r_*(t_0)\| + \Big\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_0}^{t_*} \frac{({}^C D^\alpha w_*)(\tau) - ({}^C D^\alpha r_*)(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau \Big\|$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_*}^{t} \frac{\|f(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) - f(\tau, y(\tau), u(\tau), v(\tau))\|}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau.$$

Рассуждая по схеме из [9, теорема 14.10 и следствие 1 из нее], можно показать, что

$$\Big\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_0}^{t_*} \frac{({}^C D^\alpha w_*)(\tau) - ({}^C D^\alpha r_*)(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau \Big\| \leqslant \max_{\tau \in [t_0, t_*]} \big\| \big(I^\alpha ({}^C D^\alpha w_*)\big)(\tau) - \big(I^\alpha ({}^C D^\alpha r_*)\big)(\tau) \big\|.$$

Тогда с учетом определения (1.8), равенства (1.9) и выбора числа λ_f имеем

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant 3 \max_{\tau \in [t_0, t_*]} \|w_*(\tau) - r_*(\tau)\| + \frac{\lambda_f}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{t_*}^{t} \frac{\|x(\tau) - y(\tau)\|}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \mathrm{d}\tau.$$

Так как эта оценка верна при всех $t \in [t_*, \vartheta]$, то по лемме Беллмана — Гронуолла для интегралов дробного порядка (см., например, [11, лемма 6.19], а также [23, лемма 1.1]), заключаем

$$\|x(t) - y(t)\| \leqslant 3 \max_{\tau \in [t_0, t_*]} \|w_*(\tau) - r_*(\tau)\| E_\alpha((t - t_*)^\alpha \lambda_f) \leqslant L_x \max_{\tau \in [t_0, t_*]} \|w_*(\tau) - r_*(\tau)\|, \quad t \in [t_*, \vartheta].$$

Утверждение доказано. □

Для $t \in [t_0, \vartheta]$ рассмотрим сечение $G_*(t) = \{w(\cdot) : (t, w(\cdot)) \in G_*\}$ множества позиций G_*.

Утверждение 7. *Для любого* $t \in [t_0, \vartheta]$ *множество* $G_*(t)$ *компактно в* $C([t_0, t], \mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Зафиксируем $t \in [t_0, \vartheta]$. Из утверждения 5, в частности, следует, что для всех функций $w(\cdot) \in G_*(t)$ имеют место неравенства

$$\begin{gathered}\|w(\tau)\| \leqslant R_x, \quad \|w(\tau) - w(\xi)\| \leqslant H_x|\tau - \xi|^\alpha, \quad \tau, \xi \in [t_0, t], \\ \|(D^\alpha(w(\cdot) - w(t_0)))(\tau)\| = \|(^C D^\alpha w)(\tau)\| \leqslant M_x \text{ при п.в. } \tau \in [t_0, t].\end{gathered} \tag{2.5}$$

В силу первых двух неравенств по теореме Арцела (см., например, [20, гл. II, § 7, теорема 4]) множество $G_*(t)$ является предкомпактным в пространстве $C([t_0, t], \mathbb{R}^n)$. Стало быть, для доказательства утверждения достаточно проверить замкнутость $G_*(t)$. Пусть последовательность функций $\{w_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset G_*(t)$ сходится равномерно на отрезке $[t_0, t]$ к некоторой функции $w_0(\cdot) \in C([t_0, t], \mathbb{R}^n)$. Покажем, что $w_0(\cdot) \in G_*(t)$. Во-первых, отметим, что $\|w_0(t_0)\| \leqslant R_0$, так как $\|w_i(t_0)\| \leqslant R_0$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $w_i(t_0) \to w_0(t_0)$ при $i \to \infty$.

Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим $z_i(\tau) = (I^{1-\alpha}(w_i(\cdot) - w_i(t_0)))(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$. В силу непрерывности оператора дробного интегрирования $I^{1-\alpha}$ как оператора из $L^\infty([t_0, t], \mathbb{R}^n)$ в $C([t_0, t], \mathbb{R}^n)$ (см., например, [9, замечание 3.3]) последовательность $\{z_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{N}}$ равномерно на $[t_0, t]$ сходится к функции $z_0(t) = (I^{1-\alpha}(w_0(\cdot) - w_0(t_0)))(\tau)$, $\tau \in [t_0, t]$. С учетом равенств (1.1) и (1.9) имеем

$$z_i(\tau) = \int\limits_{t_0}^{\tau} D^\alpha(w_i(\cdot) - w_i(t_0))(\xi) \mathrm{d}\xi, \quad \tau \in [t_0, t], \quad i \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

откуда в силу третьего из неравенств в (2.5) выводим $z_i(\cdot) \in \mathrm{Lip}^0([t_0, t], \mathbb{R}^n; M_x)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $z_0(\cdot) \in \mathrm{Lip}^0([t_0, t], \mathbb{R}^n)$, и по утверждению 1 заключаем $w_0(\cdot) \in \{w_0(t_0)\} + I^\alpha(L^\infty([t_0, t], \mathbb{R}^n))$.

Далее, для любого $i \in \mathbb{N}$ в силу включения $w_i(\cdot) \in G_*(t)$ и равенства (2.6) имеем

$$\|\mathrm{d}z_i(\tau)/\mathrm{d}\tau\| = \|(^C D^\alpha w_i)(\tau)\| \leqslant (1 + \|w_i(\tau)\|)c_f \text{ при п.в. } \tau \in [t_0, t].$$

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и момент времени $\tau \in (t_0, t)$, для которого существует производная $\mathrm{d}z_0(\tau)/\mathrm{d}\tau$ функции $z_0(\cdot)$. Учитывая равномерную на $[t_0, t]$ сходимость последовательности $\{w_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{N}}$ к $w_0(\cdot)$ и непрерывность функции $w_0(\cdot)$, выберем число $\delta > 0$ так, чтобы при всех достаточно больших $i \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство

$$\|\mathrm{d}z_i(\xi)/\mathrm{d}\xi\| \leqslant (1 + \|w_0(\tau)\|)c_f + \varepsilon \text{ при п.в. } \xi \in (\tau - \delta, \tau + \delta) \cap [t_0, t].$$

Тогда в силу [24, § 5, лемма 13] будет справедлива оценка $\|\mathrm{d}z_0(\tau)/\mathrm{d}\tau\| \leqslant (1 + \|w_0(\tau)\|)c_f + \varepsilon$. Так как эта оценка верна при почти всех $\tau \in [t_0, t]$ для любого числа $\varepsilon > 0$, заключаем

$$\|(^C D^\alpha w_0)(\tau)\| = \|\mathrm{d}z_0(\tau)/\mathrm{d}\tau\| \leqslant (1 + \|w_0(\tau)\|)c_f \text{ при п.в. } \tau \in [t_0, t].$$

Утверждение доказано. □

2.3. Показатель качества

Пусть $x(\cdot)$ — движение системы (2.1), порожденное из начальной позиции $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$ реализациями управления игроков $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$ и $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, \vartheta)$. Тройку $\{x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\}$ будем называть *реализацией игры*. Пусть *качество* такой реализации оценивается *показателем*

$$\gamma = \gamma(x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma(x(\cdot)) + \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \chi(t, x(t), u(t), v(t)) \mathrm{d}t. \tag{2.7}$$

При этом полагаем выполненными следующие свойства:

(σ) Функция $\sigma : C([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ непрерывна.

(χ.1) Функция $\chi : [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ непрерывна.

(χ.2) Для любого числа $R > 0$ существует такое число $\lambda_\chi > 0$, что справедливо неравенство

$$|\chi(t, x, u, v) - \chi(t, y, u, v)| \leqslant \lambda_\chi \|x - y\|, \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x, y \in B(R), \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}.$$

Для системы (2.1) и показателя качества (2.7) рассмотрим антагонистическую *дифференциальную игру*, в которой первый игрок нацелен на минимизацию показателя качества, а цель второго игрока, соответственно, противоположна.

3. Формализация игры в классах "стратегии — контрстратегии"

Следуя, например, [3, § 7, 8], формализацию дифференциальной игры (2.1), (2.7) проведем в классах чистых позиционных стратегий U первого игрока и позиционных контрстратегий V_{cs} второго игрока. Отметим, что в разд. 8 и 9 обсуждаются другие классы стратегий игроков.

3.1. Чистые позиционные стратегии первого игрока

Чистой позиционной стратегией (кратко, стратегией) U первого игрока называется любая функция

$$G_* \times (0, \infty) \ni (t, w(\cdot), \varepsilon) \mapsto U(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \mathbb{U}.$$

Здесь пара $(t, w(\cdot))$ — позиция системы (2.1), а число ε имеет смысл параметра точности.

Пусть зафиксированы начальная позиция $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, число $\varepsilon > 0$ и разбиение

$$\Delta_\delta = \big\{\tau_j : \tau_1 = t_*,\ 0 < \tau_{j+1} - \tau_j \leqslant \delta,\ j \in \overline{1, k},\ \tau_{k+1} = \vartheta\big\} \tag{3.1}$$

промежутка времени $[t_*, \vartheta]$. Тройка $\{U, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ называется *законом управления* первого игрока. Этот закон последовательно по шагам разбиения Δ_δ формирует кусочно-постоянную реализацию $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$ в соответствии с правилом

$$u(t) = U(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j \in \overline{1, k}, \tag{3.2}$$

где в согласии с (2.3) обозначено $x_{\tau_j}(t) = x(t)$, $t \in [t_0, \tau_j]$. В паре с реализацией управления второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, \vartheta)$ закон $\{U, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ однозначно определяет реализацию игры $\{x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\}$. Через $\gamma(t_*, w_*(\cdot); U, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot))$ обозначим соответствующее значение показателя качества (2.7).

Определим *гарантированный результат стратегии* U

$$\rho_u(t_*, w_*(\cdot); U) = \limsup_{\varepsilon \downarrow 0} \limsup_{\delta \downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, \vartheta)} \gamma(t_*, w_*(\cdot); U, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*, \tag{3.3}$$

и *оптимальный гарантированный результат* первого игрока в классе стратегий

$$\rho_u^0(t_*, w_*(\cdot)) = \inf_U \rho_u(t_*, w_*(\cdot); U), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*. \tag{3.4}$$

Стратегия U^0 называется *оптимальной*, если

$$\rho_u(t_*, w_*(\cdot); U^0) = \rho_u^0(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*.$$

3.2. Позиционные контрстратегии второго игрока

Позиционной контрстратегией (кратко, контрстратегией) V_{cs} второго игрока называется любая функция

$$G_* \times \mathbb{U} \times (0, \infty) \ni (t, w(\cdot), u, \varepsilon) \mapsto V_{\mathrm{cs}}(t, w(\cdot), u, \varepsilon) \in \mathbb{V},$$

которая при фиксированных $(t, w(\cdot))$ и ε измерима по Борелю по u.

Пусть $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, $\varepsilon > 0$ и Δ_δ — разбиение (3.1). Тройка $\{V_{\mathrm{cs}}, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ называется *законом управления* второго игрока. Этот закон формирует реализацию $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, \vartheta)$ по правилу

$$v(t) = V_{\mathrm{cs}}(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot), u(t), \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j \in \overline{1, k}, \tag{3.5}$$

где $u(t)$ — текущее управляющее воздействие первого игрока. Отметим, что такая реализация $v(\cdot)$ действительно будет допустимой, так как контрстратегия V_{cs} измерима по Борелю по u. В паре с реализацией $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$ закон $\{V_{\mathrm{cs}}, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ однозначно определяет реализацию игры $\{x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\}$ и значение $\gamma(t_*, w_*(\cdot); u(\cdot); V_{\mathrm{cs}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ показателя качества (2.7).

Определим *гарантированный результат контрстратегии* V_{cs}

$$\rho_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot); V_{\mathrm{cs}}) = \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{\delta \downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)} \gamma(t_*, w_*(\cdot); u(\cdot); V_{\mathrm{cs}}, \varepsilon, \Delta_\delta), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*, \tag{3.6}$$

и *оптимальный гарантированный результат* второго игрока в классе контрстратегий

$$\rho^0_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)) = \sup_{V_{\mathrm{cs}}} \rho_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot); V_{\mathrm{cs}}), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*. \tag{3.7}$$

Контрстратегия V^0_{cs} называется *оптимальной*, если

$$\rho_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot); V^0_{\mathrm{cs}}) = \rho^0_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*.$$

3.3. Цена и седловая точка игры

Из соотношений (3.3), (3.4), (3.6) и (3.7) следует неравенство (см., например, [3, лемма 8.1])

$$\rho^0_u(t_*, w_*(\cdot)) \geqslant \rho^0_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*. \tag{3.8}$$

В случае, когда имеет место равенство

$$\rho^0_u(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^0_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*, \tag{3.9}$$

говорят, что дифференциальная игра (2.1), (2.7) *имеет цену* в классах “стратегии — контрстратегии”, а пару $\{U^0, V^0_{\mathrm{cs}}\}$ из оптимальных стратегии U^0 первого игрока и контрстратегии V^0_{cs} второго игрока называют *седловой точкой* этой игры. Основным результатом работы является

Теорема 1. *Дифференциальная игра* (2.1), (2.7) *имеет цену и седловую точку в классах “стратегии — контрстратегии”.*

Доказательство теоремы следует схеме рассуждений из [3, теорема 29.1] и приведено в разд. 7. Его основу составляет модификация метода экстремального сдвига на сопутствующие точки, учитывающая специфику систем дробного порядка. Одним из ключевых моментов является подходящий выбор функции Ляпунова, определяющей окрестность для поиска сопутствующих точек.

4. Окрестность для поиска сопутствующих точек

Взяв число $R_x > 0$ из утверждения 5, во-первых, определим числа $\lambda_f > 0$ и $\lambda_\chi > 0$ в согласии с условиями $(f.2)$ и $(\chi.2)$, а во-вторых, с учетом условия $(\chi.1)$ выберем число $R_h > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$2|\chi(t,x,u,v)| \leqslant R_h, \quad t \in [t_0,\vartheta], \quad x \in B(R_x), \quad u \in \mathbb{U}, \quad v \in \mathbb{V}. \tag{4.1}$$

Пусть $t \in [t_0,\vartheta]$, $w(\cdot), r(\cdot) \in G_*(t)$ и $h(\cdot) \in \mathrm{Lip}^0([t_0,t],\mathbb{R};R_h)$. Обозначим

$$V(\tau) = \|w(\tau) - r(\tau)\|^2, \quad \tau \in [t_0,t], \tag{4.2}$$

и для каждого $\tau \in [t_0,t]$ положим

$$\mu(\tau,w(\cdot),r(\cdot),h(\cdot)) = (I^{1-\alpha}V)(\tau) + h^2(\tau) - (2\lambda_f + \lambda_\chi)\int\limits_{t_0}^{\tau} V(\xi)\mathrm{d}\xi - \lambda_\chi \int\limits_{t_0}^{\tau} h^2(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и для каждой позиции $(t,w(\cdot)) \in G_*$ определим множество

$$\begin{gathered}\Omega(t,w(\cdot),\varepsilon) = \Big\{(r(\cdot),h(\cdot)) \in G_*(t) \times \mathrm{Lip}^0([t_0,t],\mathbb{R};R_h)\colon \\ r(t_0) = w(t_0),\ \max_{\tau\in[t_0,t]} \mu(\tau,w(\cdot),r(\cdot),h(\cdot)) \leqslant (t-t_0)\varepsilon\Big\}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

Утверждение 8. *Для любых числа $\varepsilon > 0$ и позиции $(t,w(\cdot)) \in G_*$ множество $\Omega(t,w(\cdot),\varepsilon)$ является компактным в пространстве $C([t_0,t],\mathbb{R}^n) \times C([t_0,t],\mathbb{R})$.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из утверждения 7 и свойств непрерывности функции μ. □

Лемма 1. *Существует такое число $L_\Omega > 0$, что, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$, $w(\cdot) \in G_*(\vartheta)$ и $(r(\cdot),h(\cdot)) \in \Omega(\vartheta,w(\cdot),\varepsilon)$, имеют место неравенства $\|w(\cdot)-r(\cdot)\|_\infty \leqslant L_\Omega\varepsilon^{\alpha/2}$ и $|h(\vartheta)| \leqslant L_\Omega\varepsilon^{1/2}$.*

Доказательство. Взяв число M_x из утверждения 5, по числу $M = 2M_x$ определим число $M_V > 0$ в согласии с утверждением 4. По числу M_V выберем число $R > 0$ по утверждению 3. Положим $a = 2\lambda_f + \lambda_\chi$, $b = \lambda_\chi$ и рассмотрим функцию $\Psi(\cdot) \in C([t_0,\vartheta],\mathbb{R})$, удовлетворяющую равенству (1.3). Пусть $M_\Psi = \max_{t\in[t_0,\vartheta]} \Psi(t)$. Отметим, что $M_\Psi \geqslant \Psi(t_0) = 1 > 0$. Выберем число $L_\Omega > 0$ из условия $L_\Omega^2 \geqslant \max\{R(\vartheta-t_0)^\alpha M_\Psi^\alpha, (\vartheta-t_0)M_\Psi\}$.

Пусть $\varepsilon > 0$, $w(\cdot) \in G_*(\vartheta)$ и $(r(\cdot),h(\cdot)) \in \Omega(\vartheta,w(\cdot),\varepsilon)$. Определим функцию $V(\cdot)$ в согласии с соотношением (4.2). Заметим, что по выбору чисел M_x и M_V справедлива оценка

$$\|(D^\alpha V)(\cdot)\|_\infty \leqslant M_V. \tag{4.4}$$

Далее, по определению (4.3) множества $\Omega(\vartheta,w(\cdot),\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$(I^{1-\alpha}V)(t) + h^2(t) \leqslant (2\lambda_f + \lambda_\chi)\int\limits_{t_0}^{t} V(\tau)\mathrm{d}\tau + \lambda_\chi\int\limits_{t_0}^{t} h^2(\tau)\mathrm{d}\tau + (\vartheta-t_0)\varepsilon, \quad t \in [t_0,\vartheta].$$

Пусть $\psi(t) = (I^{1-\alpha}V)(t) + h^2(t)$, $t \in [t_0,\vartheta]$. Имеем $\psi(\cdot) \in C([t_0,\vartheta],\mathbb{R})$ и, учитывая (1.1), выводим

$$\begin{aligned}\psi(t) &\leqslant (2\lambda_f + \lambda_\chi)\big(I^\alpha(I^{1-\alpha}V)\big)(t) + \lambda_\chi\int\limits_{t_0}^{t} h^2(\tau)\mathrm{d}\tau + (\vartheta-t_0)\varepsilon \\ &\leqslant (2\lambda_f + \lambda_\chi)(I^\alpha\psi)(t) + \lambda_\chi\int\limits_{t_0}^{t}\psi(\tau)\mathrm{d}\tau + (\vartheta-t_0)\varepsilon, \quad t \in [t_0,\vartheta].\end{aligned}$$

Таким образом, функция $\psi(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (1.4) при выбранных числах a и b, если положить $c = (\vartheta - t_0)\varepsilon$. Следовательно, в силу утверждения 2 имеем

$$\psi(t) \leqslant (\vartheta - t_0)\Psi(t)\varepsilon \leqslant (\vartheta - t_0)M_\Psi\varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Из этой оценки, во-первых, выводим $h^2(\vartheta) \leqslant (\vartheta - t_0)M_\Psi\varepsilon \leqslant L_\Omega^2\varepsilon$, а во-вторых, получаем $\|(I^{1-\alpha}V)(\cdot)\|_\infty \leqslant (\vartheta - t_0)M_\Psi\varepsilon$, откуда, учитывая неравенство (4.4) и выбор числа R, заключаем

$$\|w(\cdot) - r(\cdot)\|_\infty^2 = \|V(\cdot)\|_\infty \leqslant R(\vartheta - t_0)^\alpha M_\Psi^\alpha\varepsilon^\alpha \leqslant L_\Omega^2\varepsilon^\alpha.$$

Лемма доказана. □

5. Леммы о близости движений

Следуя [2, с. 103, 245] (см. также [6, с. 184]), определим *экстремальные предстратегии* p первого и $q_{\rm cs}$ второго игроков исходя из соотношений

$$\begin{aligned} p(t,x,s,h) &\in \operatorname*{argmin}_{u\in\mathbb{U}} \max_{v\in\mathbb{V}} \big(\langle s, f(t,x,u,v)\rangle + h\chi(t,x,u,v)\big),\\ q_{\rm cs}(t,x,u,s,h) &\in \operatorname*{argmax}_{v\in\mathbb{V}} \big(\langle s, f(t,x,u,v)\rangle + h\chi(t,x,u,v)\big), \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, s \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$ и $u \in \mathbb{U}$. При этом предстратегию $q_{\rm cs}$ выберем измеримой по Борелю по u при фиксированных t, x, s и h (см., например, [2, с. 55, следствие из теоремы 1.8.1]).

Лемма 2. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что имеет место следующее утверждение. Пусть $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, $(r_*(\cdot), h_*(\cdot)) \in \Omega(t_*, w_*(\cdot), \varepsilon)$, $t^* \in [t_*, \vartheta]$ и $t^* - t_* \leqslant \delta$. Пусть движение $x(\cdot)$ системы* (2.1) *порождено из позиции $(t_*, w_*(\cdot))$ постоянной реализацией*

$$u_*(t) = p\big(t_*, w_*(t_*), w_*(t_*) - r_*(t_*), h_*(t_*)\big), \quad t \in [t_*, t^*), \tag{5.2}$$

и какой угодно реализацией $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, t^*)$. Пусть движение $y(\cdot)$ системы (2.1) *порождено из позиции $(t_*, r_*(\cdot))$ какой угодно реализацией $\widetilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, t^*)$ и реализацией*

$$\widetilde{v}_*(t) = q_{\rm cs}\big(t_*, w_*(t_*), \widetilde{u}(t), w_*(t_*) - r_*(t_*), h_*(t_*)\big), \quad t \in [t_*, t^*). \tag{5.3}$$

Тогда справедливо включение $(y_{t^*}(\cdot), h(\cdot)) \in \Omega(t^*, x_{t^*}(\cdot), \varepsilon)$, где

$$h(t) = \begin{cases} h_*(t), & t \in [t_0, t_*),\\ h_*(t_*) + \displaystyle\int_{t_*}^{t} \big(\chi(\tau, x(\tau), u_*(\tau), v(\tau)) - \chi(\tau, y(\tau), \widetilde{u}(\tau), \widetilde{v}_*(\tau))\big)\mathrm{d}\tau, & t \in [t_*, t^*]. \end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассуждения проводятся по схеме из [3, лемма 25.1] (см. также [6, лемма 17.1; 23, теорема 5.1]). Учитывая условия $(f.1)$ и $(\chi.1)$, положим

$$\varpi_f(\delta) = \max\|f(t,x,u,v) - f(\tau,x,u,v)\|, \quad \varpi_\chi(\delta) = \max|\chi(t,x,u,v) - \chi(\tau,x,u,v)|, \quad \delta > 0, \tag{5.4}$$

где максимумы вычисляются по t, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, $x \in B(R_x)$, $u \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$ при условии, что $|t - \tau| \leqslant \delta$. Здесь число R_x взято из утверждения 5. Отметим, что $\varpi_f(\delta) \to 0$ и $\varpi_\chi(\delta) \to 0$ при $\delta \downarrow 0$. Далее, по числу $\varepsilon > 0$ выберем число $\delta > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$4(1 + R_x)c_f H_x\delta^\alpha + 4R_x\big(\varpi_f(\delta) + \lambda_f H_x\delta^\alpha\big) + R_h^2\delta + 2(\vartheta - t_0)R_h\big(\varpi_\chi(\delta) + \lambda_\chi H_x\delta^\alpha\big) \leqslant \varepsilon/2, \tag{5.5}$$

где c_f и H_x — числа из условия $(f.3)$ и утверждения 5 соответственно, выбор чисел λ_f, λ_χ и R_h указан в начале разд. 4. Покажем, что такое число δ удовлетворяет утверждению леммы.

Во-первых, отметим, что $y_{t^*}(\cdot) \in G_*(t^*)$ в силу утверждения 5, и $y_{t^*}(t_0) = r_*(t_0) = w_*(t_0) = x_{t^*}(t_0)$. Далее, учитывая включение $h_*(\cdot) \in \mathrm{Lip}^0([t_0,t_*],\mathbb{R};R_h)$ и выбор (4.1) числа R_h, получаем $h(\cdot) \in \mathrm{Lip}^0([t_0,t^*],\mathbb{R};R_h)$. Кроме того, так как $(r_*(\cdot),h_*(\cdot)) \in \Omega(t_*,w_*(\cdot),\varepsilon)$, то для функции $\nu(t) = \mu(t,x(\cdot),y(\cdot),h(\cdot))$, $t \in [t_0,t^*]$, имеем

$$\nu(t) = \mu(t,w_*(\cdot),r_*(\cdot),h_*(\cdot)) \leqslant (t_* - t_0)\varepsilon, \quad t \in [t_0,t_*]. \tag{5.6}$$

Следовательно, для доказательства включения $(y_{t^*}(\cdot),h(\cdot)) \in \Omega(t^*,x_{t^*}(\cdot),\varepsilon)$ достаточно установить справедливость неравенства

$$\nu(t) \leqslant (t-t_0)\varepsilon, \quad t \in [t_*,t^*]. \tag{5.7}$$

Обозначим $s(t) = x(t) - y(t)$, $t \in [t_0,t^*]$, и в согласии с соотношением (4.2) положим $V(t) = \|s(t)\|^2$, $t \in [t_0,t^*]$. В силу утверждения 4 имеем $V(\cdot) \in I^\alpha(L^\infty([t_0,t^*],\mathbb{R}))$, откуда с учетом утверждения 1 получаем $(I^{1-\alpha}V)(\cdot) \in \mathrm{Lip}^0([t_0,t^*],\mathbb{R})$, а стало быть, $\nu(\cdot) \in \mathrm{Lip}^0([t_0,t^*],\mathbb{R})$. Кроме того, при почти всех $t \in [t_*,t^*]$ имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\nu(t)/\mathrm{d}t &= (D^\alpha V)(t) + \mathrm{d}h^2(t)/\mathrm{d}t - (2\lambda_f+\lambda_\chi)V(t) - \lambda_\chi h^2(t) \\ &\leqslant 2\big\langle s(t), f(t,x(t),u_*(t),v(t)) - f(t,y(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big\rangle \\ &+ 2h(t)\big(\chi(t,x(t),u_*(t),v(t)) - \chi(t,y(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big) - (2\lambda_f+\lambda_\chi)\|s(t)\|^2 - \lambda_\chi h^2(t). \end{aligned}$$

Таким образом, в силу оценки (5.6) для доказательства неравенства (5.7) осталось проверить, что для любого $t \in [t_*,t^*)$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} &2\big\langle s(t), f(t,x(t),u_*(t),v(t)) - f(t,y(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big\rangle \\ &+ 2h(t)\big(\chi(t,x(t),u_*(t),v(t)) - \chi(t,y(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big) \\ &\leqslant 2\lambda_f\|s(t)\|^2 + \lambda_\chi\big(\|s(t)\|^2 + h^2(t)\big) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Зафиксируем $t \in [t_*,t^*)$. Учитывая выбор чисел R_x, H_x, λ_f, λ_χ и R_h и определение (5.4) модулей непрерывности ϖ_f и ϖ_χ, выводим

$$\begin{aligned} &\big\langle s(t), f(t,x(t),u_*(t),v(t)) - f(t,y(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big\rangle \\ &\leqslant \big\langle s(t), f(t,x(t),u_*(t),v(t)) - f(t,x(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big\rangle + \lambda_f\|s(t)\|^2 \\ &\leqslant \big\langle s(t_*), f(t_*,w_*(t_*),u_*(t),v(t)) - f(t_*,w_*(t_*),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big\rangle \\ &+ 4(1+R_x)c_f H_x\delta^\alpha + 4R_x\big(\varpi_f(\delta) + \lambda_f H_x\delta^\alpha\big) + \lambda_f\|s(t)\|^2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} &h(t)\big(\chi(t,x(t),u_*(t),v(t)) - \chi(t,y(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big) \\ &\leqslant h(t)\big(\chi(t,x(t),u_*(t),v(t)) - \chi(t,x(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big) + \lambda_\chi h(t)\|s(t)\| \\ &\leqslant h(t_*)\big(\chi(t_*,w_*(t_*),u_*(t),v(t)) - \chi(t_*,w_*(t),\widetilde{u}(t),\widetilde{v}_*(t))\big) \\ &+ R_h^2\delta + 2(\vartheta - t_0)R_h\big(\varpi_\chi(\delta) + \lambda_\chi H_x\delta^\alpha\big) + \lambda_\chi\big(\|s(t)\|^2 + h^2(t)\big)/2. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Так как $s(t_*) = w_*(t_*) - r_*(t_*)$ и $h(t_*) = h_*(t_*)$, то в силу соотношений (5.1) и выбора (5.2) и (5.3) реализаций $u_*(\cdot)$ и $\widetilde{v}_*(\cdot)$ соответственно, во-первых, имеем

$$\begin{aligned} &\langle s(t_*), f(t_*,w_*(t_*),u_*(t),v(t))\rangle + h(t_*)\chi(t_*,w_*(t_*),u_*(t),v(t)) \\ &\leqslant \max_{v\in\mathbb{V}}\big(\langle s(t_*), f(t_*,w_*(t_*),u_*(t),v)\rangle + h(t_*)\chi(t_*,w_*(t_*),u_*(t),v)\big) \\ &= \min_{u\in\mathbb{U}}\max_{v\in\mathbb{V}}\big(\langle s(t_*), f(t_*,w_*(t_*),u,v)\rangle + h(t_*)\chi(t_*,w_*(t_*),u,v)\big), \end{aligned} \tag{5.11}$$

а во-вторых, получаем

$$\begin{aligned} &\langle s(t_*), f(t_*, w_*(t_*), \widetilde{u}(t), \widetilde{v}_*(t))\rangle + h(t_*)\chi(t_*, w_*(t_*), \widetilde{u}(t), \widetilde{v}_*(t)) \\ &= \max_{v\in\mathbb{V}} \big(\langle s(t_*), f(t_*, w_*(t_*), \widetilde{u}(t), v)\rangle + h(t_*)\chi(t_*, w_*(t_*), \widetilde{u}(t), v)\big) \\ &\geqslant \min_{u\in\mathbb{U}} \max_{v\in\mathbb{V}} \big(\langle s(t_*), f(t_*, w_*(t_*), u, v)\rangle + h(t_*)\chi(t_*, w_*(t_*), u, v)\big). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Оценка (5.8) следует из неравенств (5.9)–(5.12), если учесть выбор (5.5) числа δ. □

З а м е ч а н и е 1. Предположим, что функции f и χ по первой переменной удовлетворяют дополнительному локальному условию Гельдера порядка α. А именно пусть для некоторых чисел $H_f > 0$ и $H_\chi > 0$ справедливы оценки $\varpi_f(\delta) \leqslant H_f\delta^\alpha$ и $\varpi_\chi(\delta) \leqslant H_\chi\delta^\alpha$, $\delta > 0$, где модули непрерывности ϖ_f и ϖ_χ определяются согласно (5.4). Тогда из соотношения (5.5) следует существование такого числа K_1, что утверждение леммы 2 выполняется для любого числа $\delta > 0$, удовлетворяющего условию $K_1\delta^\alpha \leqslant \varepsilon$.

Справедливость следующей леммы устанавливается по аналогии с леммой 2.

Лемма 3. *Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что имеет место следующее утверждение. Пусть $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, $(r_*(\cdot), h_*(\cdot)) \in \Omega(t_*, w_*(\cdot), \varepsilon)$, $t^* \in [t_*, \vartheta]$ и $t^* - t_* \leqslant \delta$. Пусть движение $x(\cdot)$ системы (2.1) порождено из позиции $(t_*, w_*(\cdot))$ какой угодно реализацией $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, t^*)$ и реализацией*

$$v_*(t) = q_{\mathrm{cs}}\big(t_*, w_*(t_*), u(t), r_*(t_*) - w_*(t_*), h_*(t_*)\big), \quad t \in [t_*, t^*).$$

Пусть движение $y(\cdot)$ системы (2.1) порождено из позиции $(t_*, r_*(\cdot))$ постоянной реализацией

$$\widetilde{u}_*(t) = p\big(t_*, w_*(t_*), r_*(t_*) - w_*(t_*), h_*(t_*)\big), \quad t \in [t_*, t^*), \tag{5.13}$$

и какой угодно реализацией $\widetilde{v}(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, t^*)$. Тогда $(y_{t^*}(\cdot), h(\cdot)) \in \Omega(t^*, x_{t^*}(\cdot), \varepsilon)$, где

$$h(t) = \begin{cases} h_*(t), & t \in [t_0, t_*), \\ h_*(t_*) + \displaystyle\int_{t_*}^{t} \big(\chi(\tau, y(\tau), \widetilde{u}_*(\tau), \widetilde{v}(\tau)) - \chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v_*(\tau))\big)\mathrm{d}\tau, & t \in [t_*, t^*]. \end{cases} \tag{5.14}$$

6. Экстремальный сдвиг на сопутствующие точки

Пусть функция $\rho : G_* \to \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами (см., например, [3, § 26]):

$(\rho.1^u)$ Выполняется терминальное условие: $\rho(\vartheta, w(\cdot)) \geqslant \sigma(w(\cdot))$, $w(\cdot) \in G_*(\vartheta)$.

$(\rho.2^u)$ Для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ функция $G_*(t) \ni w(\cdot) \mapsto \rho(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу в метрике пространства $C([t_0, t], \mathbb{R}^n)$.

$(\rho.3^u)$ Функция ρ является *u-стабильной* в следующем смысле. Каковы бы ни были позиция $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, момент времени $t^* \in [t_*, \vartheta]$, число $\eta > 0$ и измеримая по Борелю функция $v : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$, существует такая реализация $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, t^*)$, что для движения $x(\cdot)$ системы (2.1), порожденного из позиции $(t_*, w_*(\cdot))$ реализациями $u_*(\cdot)$ и $v_*(t) = v(u_*(t))$, $t \in [t_*, t^*)$, имеем

$$\rho(t^*, x_{t^*}(\cdot)) + \int_{t_*}^{t^*} \chi(\tau, x(\tau), u_*(\tau), v_*(\tau))\mathrm{d}\tau \leqslant \rho(t_*, w_*(\cdot)) + \eta.$$

Следуя [3, с. 209] (см. также [6, с. 184]), по функции ρ определим стратегию U^{e} первого игрока из условия *экстремального сдвига на сопутствующие точки.* А именно для каждого числа $\varepsilon > 0$, выбирая для позиции $(t, w(\cdot)) \in G_*$ сопутствующую точку $(r^u_\varepsilon(\cdot), h^u_\varepsilon(\cdot))$ из условия

$$(r^u_\varepsilon(\cdot), h^u_\varepsilon(\cdot)) \in \operatorname*{argmin}_{(r(\cdot),h(\cdot))\in\Omega(t,w(\cdot),\varepsilon)} \big(\rho(t, r(\cdot)) - h(t)\big), \tag{6.1}$$

полагаем

$$U^{\mathrm{e}}(t,w(\cdot),\varepsilon)=p\bigl(t,w(t),w(t)-r_\varepsilon^u(t),h_\varepsilon^u(t)\bigr), \tag{6.2}$$

где p — экстремальная предстратегия первого игрока, определяемая согласно (5.1). Отметим, что минимум в (6.1) достигается в силу условия $(\rho.2^u)$ и утверждения 8.

Лемма 4. *Пусть функция $\rho : G_* \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $(\rho.1^u)$–$(\rho.3^u)$ и стратегия U^{e} первого игрока определена по функции ρ экстремальным сдвигом на сопутствующие точки* (6.1), (6.2). *Тогда для любого числа $\zeta > 0$ существуют такие число $\varepsilon_* > 0$ и функция $(0,\varepsilon_*] \ni \varepsilon \mapsto \delta_*(\varepsilon) \in (0,\infty)$, что, каковы бы ни были позиция $(t_*,w_*(\cdot)) \in G_*$, число $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$, разбиение Δ_δ* (3.1) *при $\delta \leqslant \delta_*(\varepsilon)$ и реализация $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*,\vartheta)$, для значения $\gamma = \gamma(t_*,w_*(\cdot);U^{\mathrm{e}},\varepsilon,\Delta_\delta;v(\cdot))$ показателя качества* (2.7) *справедлива оценка*

$$\gamma \leqslant \rho(t_*,w_*(\cdot)) + \zeta. \tag{6.3}$$

В частности, гарантированный результат стратегии U^{e} удовлетворяет неравенству

$$\rho_u(t_*,w_*(\cdot);U^{\mathrm{e}}) \leqslant \rho(t_*,w_*(\cdot)), \quad (t_*,w_*(\cdot)) \in G_*. \tag{6.4}$$

Доказательство. Рассуждения проводятся по схеме из [3, лемма 26.1] с учетом ее модификации для систем с запаздыванием [6, теорема 17.1]. Учитывая условие (σ) и утверждение 7, положим

$$\varpi_\sigma(\xi) = \max|\sigma(w(\cdot)) - \sigma(r(\cdot))|, \quad \xi > 0, \tag{6.5}$$

где максимум вычисляется по $w(\cdot), r(\cdot) \in G_*(\vartheta)$ при условии $\|w(\cdot)-r(\cdot)\|_\infty \leqslant \xi$. Отметим, что $\varpi_\sigma(\xi) \to 0$ при $\xi \downarrow 0$. Далее, по числу $\zeta > 0$ выберем число $\xi > 0$ так, чтобы

$$\varpi_\sigma(\xi) \leqslant \zeta/2. \tag{6.6}$$

Взяв число L_Ω из леммы 1, определим число $\varepsilon_* > 0$ исходя из соотношений

$$L_\Omega \varepsilon_*^{\alpha/2} \leqslant \xi, \quad L_\Omega \varepsilon_*^{1/2} \leqslant \zeta/2. \tag{6.7}$$

Наконец, для каждого числа $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$ выберем число $\delta_*(\varepsilon)$ в согласии с леммой 2.

Пусть $(t_*,w_*(\cdot)) \in G_*$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_*]$ и Δ_δ — разбиение (3.1) при $\delta \leqslant \delta_*(\varepsilon)$. Рассмотрим реализацию игры $\{x(\cdot),u(\cdot),v(\cdot)\}$, определяемую начальной позицией $(t_*,w_*(\cdot))$, законом управления первого игрока $\{U^{\mathrm{e}},\varepsilon,\Delta_\delta\}$ и реализацией управления второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*,\vartheta)$. В согласии с соотношениями (3.2), (6.1) и (6.2) для каждого $j \in \overline{1,k}$ обозначим через $(r_j(\cdot),h_j(\cdot)) \in \Omega(\tau_j,x_{\tau_j}(\cdot),\varepsilon)$ сопутствующую точку, которая была выбрана для позиции $(\tau_j,x_{\tau_j}(\cdot))$ в процессе игры при действии закона $\{U^{\mathrm{e}},\varepsilon,\Delta_\delta\}$:

$$\rho(\tau_j,r_j(\cdot)) - h_j(\tau_j) = \min_{(r(\cdot),h(\cdot))\in\Omega(\tau_j,x_{\tau_j}(\cdot),\varepsilon)} \bigl(\rho(\tau_j,r(\cdot)) - h(\tau_j)\bigr), \tag{6.8}$$

$$u(t) = U^{\mathrm{e}}(\tau_j,x_{\tau_j}(\cdot),\varepsilon) = p\bigl(\tau_j,x(\tau_j),x(\tau_j)-r_j(\tau_j),h_j(\tau_j)\bigr), \quad t \in [\tau_j,\tau_{j+1}). \tag{6.9}$$

Кроме того, для терминальной позиции $(\vartheta,x(\cdot)) = (\tau_{k+1},x_{\tau_{k+1}}(\cdot))$ выберем сопутствующую точку $(r_{k+1}(\cdot),h_{k+1}(\cdot)) \in \Omega(\vartheta,x(\cdot),\varepsilon)$ так, чтобы равенство (6.8) выполнялось и при $j = k+1$.

Зададимся числом $\eta > 0$ и покажем, что для любого $j \in \overline{1,k}$ справедлива оценка

$$\rho(\tau_{j+1},r_{j+1}(\cdot)) - h_{j+1}(\tau_{j+1}) \leqslant \rho(\tau_j,r_j(\cdot)) - h_j(\tau_j) - \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \chi(\tau,x(\tau),u(\tau),v(\tau))\mathrm{d}\tau + \eta. \tag{6.10}$$

Зафиксируем $j \in \overline{1,k}$. Взяв предстратегию q_{cs} второго игрока (5.1), определим функцию

$$v_j(u) = q_{\mathrm{cs}}\bigl(\tau_j,x(\tau_j),u,x(\tau_j)-r_j(\tau_j),h_j(\tau_j)\bigr), \quad u \in \mathbb{U}. \tag{6.11}$$

Опираясь на условие ($\rho.3^u$), по позиции $(\tau_j, r_j(\cdot))$, моменту времени τ_{j+1}, числу η и функции v_j выберем реализацию управления первого игрока $\widetilde{u}_j(\cdot) \in \mathcal{U}(\tau_j, \tau_{j+1})$ и рассмотрим движение $y^{(j)}(\cdot)$ системы (2.1), порожденное из позиции $(\tau_j, r_j(\cdot))$ реализациями $\widetilde{u}_j(\cdot)$ и $\widetilde{v}_j(t) = v_j(\widetilde{u}_j(t))$, $t \in [\tau_j, \tau_{j+1})$. Тогда, во-первых, справедливо неравенство

$$\rho(\tau_{j+1}, y^{(j)}_{\tau_{j+1}}(\cdot)) + \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \chi(\tau, y^{(j)}(\tau), \widetilde{u}_j(\tau), \widetilde{v}_j(\tau)) \mathrm{d}\tau \leqslant \rho(\tau_j, r_j(\cdot)) + \eta,$$

а во-вторых, учитывая соотношения (6.9), (6.11) и выбор числа δ, в согласии с леммой 2 получаем $(y^{(j)}_{\tau_{j+1}}(\cdot), h(\cdot)) \in \Omega(\tau_{j+1}, x_{\tau_{j+1}}(\cdot), \varepsilon)$, где $h(t) = h_j(t)$ при $t \in [t_0, \tau_j)$ и

$$h(t) = h_j(\tau_j) + \int\limits_{\tau_j}^{t} \big(\chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) - \chi(\tau, y^{(j)}(\tau), \widetilde{u}_j(\tau), \widetilde{v}_j(\tau))\big) \mathrm{d}\tau, \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}].$$

Таким образом, принимая во внимание равенство (6.8), где вместо j подставляем $j+1$, имеем

$$\begin{aligned} \rho(\tau_{j+1}, r_{j+1}(\cdot)) - h_{j+1}(\tau_{j+1}) &\leqslant \rho(\tau_{j+1}, y^{(j)}_{\tau_{j+1}}(\cdot)) - h(\tau_{j+1}) \\ \leqslant \rho(\tau_j, r_j(\cdot)) - &\int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \chi(\tau, y^{(j)}(\tau), \widetilde{u}_j(\tau), \widetilde{v}_j(\tau)) \mathrm{d}\tau + \eta - h(\tau_{j+1}) \\ = \rho(\tau_j, r_j(\cdot)) - h_j(\tau_j) &- \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau)) \mathrm{d}\tau + \eta. \end{aligned}$$

Учитывая, что оценка (6.10) справедлива для любых $\eta > 0$ и $j \in \overline{1, k}$, выводим

$$\rho(\tau_{k+1}, r_{k+1}(\cdot)) - h_{k+1}(\tau_{k+1}) \leqslant \rho(\tau_1, r_1(\cdot)) - h_1(\tau_1) - \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \chi(t, x(t), u(t), v(t)) \mathrm{d}t. \tag{6.12}$$

Так как согласно определению (4.3) множество $\Omega(t_*, w_*(\cdot), \varepsilon)$ содержит точку $(w_*(\cdot), h_*(\cdot))$ при $h_*(t) = 0$, $t \in [t_0, t_*]$, то в силу равенства (6.8) для $j = 1$ имеем

$$\rho(\tau_1, r_1(\cdot)) - h_1(\tau_1) \leqslant \rho(t_*, w_*(\cdot)). \tag{6.13}$$

С другой стороны, с учетом условия ($\rho.1^u$) и включения $(r_{k+1}(\cdot), h_{k+1}(\cdot)) \in \Omega(\vartheta, x(\cdot), \varepsilon)$ по выбору чисел ε и ξ получаем

$$\rho(\tau_{k+1}, r_{k+1}(\cdot)) - h_{k+1}(\tau_{k+1}) \geqslant \sigma(r_{k+1}(\cdot)) - h_{k+1}(\tau_{k+1}) \geqslant \sigma(x(\cdot)) - \zeta. \tag{6.14}$$

Справедливость оценки (6.3) вытекает из соотношений (6.12)–(6.14). Неравенство (6.4) следует из оценки (6.3) в силу определения (3.3) гарантированного результата $\rho_u(t_*, w_*(\cdot); U^{\mathrm{e}})$ стратегии U^{e}. Лемма доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 2. Предположим, что функция σ удовлетворяет дополнительному условию локальной липшицевости. А именно, пусть для некоторого числа $\lambda_\sigma > 0$ справедлива оценка $\varpi_\sigma(\xi) \leqslant \lambda_\sigma \xi$, $\xi > 0$, где модуль непрерывности ϖ_σ определяется согласно (6.5). Тогда из соотношений (6.6) и (6.7) следует существование такого числа $K_2 > 0$, что число $\varepsilon_* > 0$ в лемме 4 можно выбирать из условия $K_2 \varepsilon_*^{\alpha/2} \leqslant \zeta$. В частности, если выполняются также дополнительные предположения замечания 1, то справедлив следующий вариант леммы 4. Каковы бы ни были позиция $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$ и разбиение Δ_δ (3.1), для любой реализации управления второго игрока $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, \vartheta)$ закон управления первого игрока $\{U^{\mathrm{e}}, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ при $\varepsilon \in (0, K_1\delta^\alpha]$ гарантирует для соответствующего значения γ показателя качества (2.7) неравенство

$$\gamma \leqslant \rho(t_*, w_*(\cdot)) + K\delta^{\alpha^2/2}, \tag{6.15}$$

где $K = K_2 K_1^{\alpha/2}$, K_1 — число из замечания 1. Отметим, что показатель степени $\alpha^2/2$ в неравенстве (6.15) согласуется при $\alpha = 1$ с подобными оценками для случая систем первого порядка (см., например, [3, леммы 25.1, 26.1]).

Проведем аналогичные рассуждения с точки зрения второго игрока. Рассмотрим теперь функцию $\rho : G_* \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую следующим требованиям (см., например, [3, § 27]):

$(\rho.1^v)$ Выполняется терминальное условие: $\rho(\vartheta, w(\cdot)) \leqslant \sigma(w(\cdot))$, $w(\cdot) \in G_*(\vartheta)$.

$(\rho.2^v)$ Для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ функция $G_*(t) \ni w(\cdot) \mapsto \rho(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ полунепрерывна сверху в метрике пространства $C([t_0, t], \mathbb{R}^n)$.

$(\rho.3^v)$ Функция ρ является *v-стабильной* в следующем смысле. Каковы бы ни были позиция $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, момент времени $t^* \in [t_*, \vartheta]$, число $\eta > 0$ и реализация $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, t^*)$, существует такая реализация $v_*(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, t^*)$, что для движения $x(\cdot)$ системы (2.1), порожденного из позиции $(t_*, w_*(\cdot))$ реализациями $u(\cdot)$ и $v_*(\cdot)$, будет справедливо неравенство

$$\rho(t^*, x_{t^*}(\cdot)) + \int\limits_{t_*}^{t^*} \chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v_*(\tau))\mathrm{d}\tau \geqslant \rho(t_*, w_*(\cdot)) - \eta.$$

В согласии с [3, с. 217] (см. также [6, с. 184]) по функции ρ определим контрстратегию $V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}}$ второго игрока следующим образом. Для каждого числа $\varepsilon > 0$ и позиции $(t, w(\cdot)) \in G_*$ выберем *сопутствующую точку*

$$(r^v_\varepsilon(\cdot), h^v_\varepsilon(\cdot)) \in \underset{(r(\cdot),h(\cdot)) \in \Omega(t, w(\cdot), \varepsilon)}{\mathrm{argmax}} \big(\rho(t, r(\cdot)) + h(t)\big) \tag{6.16}$$

и, взяв экстремальную предстратегию второго игрока q_{cs} из (5.1), для каждого $u \in \mathbb{U}$ положим

$$V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}}(t, w(\cdot), u, \varepsilon) = q_{\mathrm{cs}}\big(t, w(t), u, r^v_\varepsilon(t) - w(t), h^v_\varepsilon(t)\big). \tag{6.17}$$

Отметим, что максимум в (6.16) достигается в силу условия $(\rho.2^v)$ и утверждения 8.

Лемма 5. *Пусть функция $\rho : G_* \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $(\rho.1^v)$–$(\rho.3^v)$ и контрстратегия $V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}}$ второго игрока определена по функции ρ экстремальным сдвигом на сопутствующие точки* (6.16), (6.17). *Тогда для любого числа $\zeta > 0$ существуют такие число $\varepsilon_* > 0$ и функция $(0, \varepsilon_*] \ni \varepsilon \mapsto \delta_*(\varepsilon) \in (0, \infty)$, что, каковы бы ни были позиция $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$, разбиение Δ_δ* (3.1) *при $\delta \leqslant \delta_*(\varepsilon)$ и реализация $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$, для значения $\gamma = \gamma(t_*, w_*(\cdot); u(\cdot); V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}}, \varepsilon, \Delta_\delta)$ показателя качества* (2.7) *справедлива оценка*

$$\gamma \geqslant \rho(t_*, w_*(\cdot)) - \zeta. \tag{6.18}$$

В частности, гарантированный результат контрстратегии $V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}}$ удовлетворяет неравенству

$$\rho_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot); V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}}) \geqslant \rho(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*. \tag{6.19}$$

Доказательство. По числу $\zeta > 0$ выберем число $\varepsilon_* > 0$ так же, как в доказательстве леммы 4, и для каждого числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ определим число $\delta_*(\varepsilon)$ согласно лемме 3. Рассмотрим реализацию игры $\{x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot)\}$, определяемую позицией $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, реализацией $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$ и законом $\{V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}}, \varepsilon, \Delta_\delta\}$ при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ и $\delta \leqslant \delta_*(\varepsilon)$. Согласно (3.5), (6.16) и (6.17) рассмотрим сопутствующие точки $(r_j(\cdot), h_j(\cdot)) \in \Omega(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon)$, $j \in \overline{1, k+1}$:

$$\rho(\tau_j, r_j(\cdot)) + h_j(\tau_j) = \max_{(r(\cdot),h(\cdot)) \in \Omega(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon)} \big(\rho(\tau_j, r(\cdot)) + h(\tau_j)\big), \quad j \in \overline{1, k+1}, \tag{6.20}$$

$$v(t) = V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}}(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot), u(t), \varepsilon) = q_{\mathrm{cs}}\big(\tau_j, x(\tau_j), u(t), r_j(\tau_j) - x(\tau_j), h_j(\tau_j)\big), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j \in \overline{1,k}.$$

Пусть $\eta > 0$ и $j \in \overline{1,k}$. По позиции $(\tau_j, r_j(\cdot))$, моменту времени τ_{j+1}, числу η и реализации

$$\widetilde{u}_j(t) = p\big(\tau_j, x(\tau_j), r_j(\tau_j) - x(\tau_j), h_j(\tau_j)\big), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}),$$

где p — предстратегия первого игрока (5.1), опираясь на условие $(\rho.3^v)$, выберем реализацию $\widetilde{v}_j(\cdot) \in \mathcal{V}(\tau_j, \tau_{j+1})$ и рассмотрим движение $y^{(j)}(\cdot)$ системы (2.1), порожденное из позиции $(\tau_j, r_j(\cdot))$ реализациями $\widetilde{u}_j(\cdot)$ и $\widetilde{v}_j(\cdot)$. Тогда, во-первых, имеем

$$\rho(\tau_{j+1}, y^{(j)}_{\tau_{j+1}}(\cdot)) + \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \chi(\tau, y^{(j)}(\tau), \widetilde{u}_j(\tau), \widetilde{v}_j(\tau))\mathrm{d}\tau \geqslant \rho(\tau_j, r_j(\cdot)) - \eta,$$

а во-вторых, по лемме 3 получаем $(y^{(j)}_{\tau_{j+1}}(\cdot), h(\cdot)) \in \Omega(\tau_{j+1}, x_{\tau_{j+1}}(\cdot), \varepsilon)$, где функция $h(\cdot)$ удовлетворяет равенству

$$h(\tau_{j+1}) = h_j(\tau_j) + \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \big(\chi(\tau, y^{(j)}(\tau), \widetilde{u}_j(\tau), \widetilde{v}_j(\tau)) - \chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau))\big)\mathrm{d}\tau.$$

Таким образом, учитывая равенство (6.20), выводим

$$\begin{aligned}
\rho(\tau_{j+1}, r_{j+1}(\cdot)) + h_{j+1}(\tau_{j+1}) &\geqslant \rho(\tau_{j+1}, y^{(j)}_{\tau_{j+1}}(\cdot)) + h(\tau_{j+1}) \\
&\geqslant \rho(\tau_j, r_j(\cdot)) - \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \chi(\tau, y^{(j)}(\tau), \widetilde{u}_j(\tau), \widetilde{v}_j(\tau))\mathrm{d}\tau - \eta + h(\tau_{j+1}) \\
&= \rho(\tau_j, r_j(\cdot)) + h_j(\tau_j) - \int\limits_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v(\tau))\mathrm{d}\tau - \eta. \qquad (6.21)
\end{aligned}$$

Так как оценка (6.21) выполняется для любых $\eta > 0$ и $j \in \overline{1,k}$, имеем

$$\rho(\tau_{k+1}, r_{k+1}(\cdot)) + h_{k+1}(\tau_{k+1}) \geqslant \rho(\tau_1, r_1(\cdot)) + h_1(\tau_1) - \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \chi(t, x(t), u(t), v(t))\mathrm{d}t. \qquad (6.22)$$

По аналогии с (6.13) и (6.14), во-первых, учитывая равенство (6.20) для $j = 1$, получаем

$$\rho(\tau_1, r_1(\cdot)) + h_1(\tau_1) \geqslant \rho(t_*, w_*(\cdot)), \qquad (6.23)$$

а во-вторых, принимая во внимание условие $(\rho.1^v)$, выводим

$$\rho(\tau_{k+1}, r_{k+1}(\cdot)) + h_{k+1}(\tau_{k+1}) \leqslant \sigma(r_{k+1}(\cdot)) + h_{k+1}(\tau_{k+1}) \leqslant \sigma(x(\cdot)) + \zeta. \qquad (6.24)$$

Из соотношений (6.22)–(6.24) следует справедливость оценки (6.18). Неравенство (6.19) выполняется в силу оценки (6.18) и определения (3.6) гарантированного результата $\rho_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot); V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}})$ контрстратегии $V^{\mathrm{e}}_{\mathrm{cs}}$. Лемма доказана. □

7. Квазистратегии второго игрока

Построим функцию $\rho^* : G_* \to \mathbb{R}$, которая одновременно удовлетворяет условиям $(\rho^u.1)$–$(\rho^u.3)$ и $(\rho^v.1)$–$(\rho^v.3)$. А именно, следуя [3, § 28, 29], для каждой позиции $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$ в качестве значения $\rho^*(t_*, w_*(\cdot))$ возьмем величину *оптимального гарантированного результата* второго игрока в классе квазистратегий, которая определяется следующим образом.

Зафиксируем начальную позицию $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$. *Квазистратегией* второго игрока называется (см., например, [2, с. 24]) любая функция $\beta : \mathcal{U}(t_*, \vartheta) \to \mathcal{V}(t_*, \vartheta)$, удовлетворяющая следующему условию неупреждаемости: если $t^* \in [t_*, \vartheta]$, $u(\cdot), \widetilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$ и $u(t) = \widetilde{u}(t)$ при почти всех $t \in [t_*, t^*]$, то $v(t) = \widetilde{v}(t)$ при почти всех $t \in [t_*, t^*]$, где $v(\cdot) = \beta(u(\cdot))$, $\widetilde{v}(\cdot) = \beta(\widetilde{u}(\cdot))$. В паре с реализацией $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$ квазистратегия β единственным образом определяет реализацию игры $\{x(\cdot), u(\cdot), v(\cdot) = \beta(u(\cdot))\}$ и, следовательно, значение показателя качества (2.7), которое обозначим через $\gamma(t_*, w_*(\cdot); u(\cdot); \beta)$. Положим

$$\rho^*(t_*, w_*(\cdot)) = \sup_{\beta} \inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)} \gamma(t_*, w_*(\cdot); u(\cdot); \beta). \tag{7.1}$$

Лемма 6. *Функция $\rho^* : G_* \to \mathbb{R}$ оптимального гарантированного результата второго игрока в классе квазистратегий* (7.1) *удовлетворяет условиям* $(\rho.1^u)$–$(\rho.3^u)$ *и* $(\rho.1^v)$–$(\rho.3^v)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость леммы устанавливается по аналогии с рассуждениями из [3, § 29]. При этом для доказательства непрерывности функции $G_*(t) \ni w(\cdot) \mapsto \rho^*(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$, где $t \in [t_0, \vartheta]$, следует воспользоваться утверждением 6. $\square$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Экстремальным сдвигом на сопутствующие точки, выбираемые по функции ρ^*, в соответствии с соотношениями (6.1), (6.2) и (6.16), (6.17) определим стратегию U^0 первого игрока и контрстратегию $V^0_{\rm cs}$ второго игрока. Опираясь на леммы 4 и 5 с учетом леммы 6, из определений (3.4) и (3.7) оптимальных гарантированных результатов игроков и неравенства (3.8) выводим цепочку неравенств

$$\rho^0_u(t_*, w_*(\cdot)) \leqslant \rho_u(t_*, w_*(\cdot); U^0) \leqslant \rho^*(t_*, w_*(\cdot)) \leqslant \rho_{v,\rm cs}(t_*, w_*(\cdot); V^0_{\rm cs}) \leqslant \rho^0_{v,\rm cs}(t_*, w_*(\cdot)) \leqslant \rho^0_u(t_*, w_*(\cdot)),$$

которая доказывает равенство (3.9) и оптимальность стратегии U^0 и контрстратегии $V^0_{\rm cs}$. $\square$

Отметим, что при доказательстве теоремы установлено совпадение *цены дифференциальной игры* в классах "стратегии — контрстратегии"

$$\rho^0(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^0_u(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^0_{v,\rm cs}(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*, \tag{7.2}$$

с оптимальным гарантированным результатом второго игрока в классе квазистратегий (7.1):

$$\rho^0(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^*(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*. \tag{7.3}$$

З а м е ч а н и е 3. При $\alpha = 1$ предложенная в работе модификация метода экстремального сдвига на сопутствующие точки может использоваться наряду с конструкциями из [6, § 17] для построения оптимальных стратегий управления игроков в дифференциальной игре для системы первого порядка (2.1) и нетерминального показателя качества (2.7). В этом случае окрестность $\Omega(t, w(\cdot), \varepsilon)$ для поиска сопутствующих точек (4.3) будет задаваться неравенством

$$\max_{\tau \in [t_0, t]} \Big(\|w(\tau) - r(\tau)\|^2 + h^2(\tau) - (2\lambda_f + \lambda_\chi) \int\limits_{t_0}^{\tau} \|w(\xi) - r(\xi)\|^2 \mathrm{d}\xi - \lambda_\chi \int\limits_{t_0}^{\tau} h^2(\xi) \mathrm{d}\xi \Big) \leqslant (t - t_0)\varepsilon.$$

8. Дифференциальная игра в классах "контрстратегии — стратегии"

В согласии с [3, § 8] рассмотрим формализацию дифференциальной игры (2.1), (2.7) в классах "контрстратегии — стратегии". По аналогии с разд. 3 под контрстратегией U_{cs} первого игрока и стратегией V второго игрока понимаем любые функции

$$G_* \times \mathbb{V} \times (0,\infty) \ni (t, w(\cdot), v, \varepsilon) \mapsto U_{\mathrm{cs}}(t, w(\cdot), v, \varepsilon) \in \mathbb{U},$$
$$G_* \times (0,\infty) \ni (t, w(\cdot), \varepsilon) \mapsto V(t, w(\cdot), \varepsilon) \in \mathbb{V}.$$

При этом предполагаем, что функция U_{cs} измерима по Борелю по v для любых $(t, w(\cdot))$ и ε.

Для позиции $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$ определим гарантированный результат контрстратегии U_{cs} и оптимальный гарантированный результат первого игрока в классе контрстратегий:

$$\rho_{u,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot); U_{\mathrm{cs}}) = \limsup_{\varepsilon\downarrow 0} \limsup_{\delta\downarrow 0} \sup_{\Delta_\delta} \sup_{v(\cdot)\in\mathcal{V}(t_*,\vartheta)} \gamma(t_*, w_*(\cdot); U_{\mathrm{cs}}, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot)), \tag{8.1}$$

$$\rho^0_{u,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)) = \inf_{U_{\mathrm{cs}}} \rho_{u,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot); U_{\mathrm{cs}}). \tag{8.2}$$

В соотношении (8.1) значение $\gamma(t_*, w_*(\cdot); U_{\mathrm{cs}}, \varepsilon, \Delta_\delta; v(\cdot))$ показателя качества (2.7) отвечает реализации игры, которая определяется законом $\{U_{\mathrm{cs}}, \Delta_\delta, \varepsilon\}$, формирующим в паре с $v(\cdot)$ реализацию $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$ согласно правилу

$$u(t) = U_{\mathrm{cs}}(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot), v(t), \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j \in \overline{1,k}.$$

Рассмотрим гарантированный результат стратегии V и оптимальный гарантированный результат второго игрока в классе стратегий:

$$\rho_v(t_*, w_*(\cdot); V) = \liminf_{\varepsilon\downarrow 0} \liminf_{\delta\downarrow 0} \inf_{\Delta_\delta} \inf_{u(\cdot)\in\mathcal{U}(t_*,\vartheta)} \gamma(t_*, w_*(\cdot); u(\cdot); V, \varepsilon, \Delta_\delta), \tag{8.3}$$

$$\rho^0_v(t_*, w_*(\cdot)) = \sup_V \rho_v(t_*, w_*(\cdot); V), \tag{8.4}$$

где $\gamma(t_*, w_*(\cdot); u(\cdot); V, \varepsilon, \Delta_\delta)$ — значение показателя качества (2.7), отвечающее реализации $u(\cdot)$ и закону $\{V, \varepsilon, \Delta_\delta\}$, действующему по правилу

$$v(t) = V(\tau_j, x_{\tau_j}(\cdot), \varepsilon), \quad t \in [\tau_j, \tau_{j+1}), \quad j \in \overline{1,k}. \tag{8.5}$$

Соответственно контрстратегия U^0_{cs} первого игрока и стратегия V^0 второго игрока называются оптимальными, если

$$\rho_{u,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot); U^0_{\mathrm{cs}}) = \rho^0_{u,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)), \quad \rho_v(t_*, w_*(\cdot); V^0) = \rho^0_v(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*.$$

Из соотношений (8.1)–(8.4) следует неравенство (см., например, [3, лемма 8.2])

$$\rho^0_{u,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)) \geqslant \rho^0_v(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*. \tag{8.6}$$

В случае, когда имеет место равенство

$$\rho^0_{u,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^0_v(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*, \tag{8.7}$$

говорят, что дифференциальная игра (2.1), (2.7) имеет цену в классах "контрстратегии — стратегии", а пару $\{U^0_{\mathrm{cs}}, V^0\}$ называют седловой точкой этой игры.

Теорема 2. *Дифференциальная игра* (2.1), (2.7) *имеет цену и седловую точку в классах "контрстратегии — стратегии".*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы, по сути, повторяет доказательство теоремы 1.

Для каждой позиции $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$ рассматривается величина оптимального гарантированного результата первого игрока в классе квазистратегий

$$\rho_*(t_*, w_*(\cdot)) = \inf_{\kappa} \sup_{v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, \vartheta)} \gamma(t_*, w_*(\cdot); \kappa; v(\cdot)). \tag{8.8}$$

При этом под квазистратегией первого игрока понимается функция $\kappa : \mathcal{V}(t_*, \vartheta) \to \mathcal{U}(t_*, \vartheta)$, удовлетворяющая условию неупреждаемости: если $t^* \in [t_*, \vartheta]$, $v(\cdot), \widetilde{v}(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, \vartheta)$ и $v(t) = \widetilde{v}(t)$ при почти всех $t \in [t_*, t^*]$, то $u(t) = \widetilde{u}(t)$ при почти всех $t \in [t_*, t^*]$, где $u(\cdot) = \kappa(v(\cdot))$, $\widetilde{u}(\cdot) = \kappa(\widetilde{v}(\cdot))$. В соотношении (8.8) значение $\gamma(t_*, w_*(\cdot); \kappa; v(\cdot))$ показателя качества (2.7) отвечает реализации игры $\{x(\cdot), u(\cdot) = \kappa(v(\cdot)), v(\cdot)\}$. По аналогии с леммой 6 устанавливается, что функция $\rho_* : G_* \to \mathbb{R}$ обладает следующими свойствами:

(ρ_*.1) Выполняется терминальное условие: $\rho_*(\vartheta, w(\cdot)) = \sigma(w(\cdot))$, $w(\cdot) \in G_*(\vartheta)$.

(ρ_*.2) Для любого $t \in [t_0, \vartheta]$ функция $G_*(t) \ni w(\cdot) \mapsto \rho_*(t, w(\cdot)) \in \mathbb{R}$ непрерывна в метрике пространства $C([t_0, t], \mathbb{R}^n)$.

(ρ_*.3) Функция ρ_* является u-стабильной в следующем смысле. Каковы бы ни были позиция $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, момент времени $t^* \in [t_*, \vartheta]$, число $\eta > 0$ и реализация $v(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, t^*)$, существует такая реализация $u_*(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, t^*)$, что для движения $x(\cdot)$ системы (2.1), порожденного из позиции $(t_*, w_*(\cdot))$ реализациями $u_*(\cdot)$ и $v(\cdot)$, будет справедливо неравенство

$$\rho_*(t^*, x_{t^*}(\cdot)) + \int\limits_{t_*}^{t^*} \chi(\tau, x(\tau), u(\tau), v_*(\tau)) \mathrm{d}\tau \leqslant \rho_*(t_*, w_*(\cdot)) + \eta.$$

(ρ_*.4) Функция ρ_* является v-стабильной в следующем смысле. Каковы бы ни были позиция $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, момент времени $t^* \in [t_*, \vartheta]$, число $\eta > 0$ и измеримая по Борелю функция $u : \mathbb{V} \to \mathbb{U}$, существует такая реализация $v_*(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, t^*)$, что для движения $x(\cdot)$ системы (2.1), порожденного из позиции $(t_*, w_*(\cdot))$ реализациями $u_*(t) = u(v_*(t))$, $t \in [t_*, t^*)$, и $v_*(\cdot)$, имеем

$$\rho_*(t^*, x_{t^*}(\cdot)) + \int\limits_{t_*}^{t^*} \chi(\tau, x(\tau), u_*(\tau), v_*(\tau)) \mathrm{d}\tau \geqslant \rho_*(t_*, w_*(\cdot)) - \eta.$$

Далее, экстремальным сдвигом на сопутствующие точки, выбираемые по функции ρ_*, определяются контрстратегия U^0_{cs} первого игрока и стратегия V^0 второго игрока

$$\begin{gathered} U^0_{\mathrm{cs}}(t, w(\cdot), v, \varepsilon) = p_{\mathrm{cs}}\big(t, w(t), v, w(t) - r^{u,0}_\varepsilon(t), h^{u,0}_\varepsilon(t)\big), \\ V^0(t, w(\cdot), \varepsilon) = q\big(t, w(t), r^{v,0}_\varepsilon(t) - w(t), h^{v,0}_\varepsilon(t)\big), \end{gathered} \tag{8.9}$$

где $(t, w(\cdot)) \in G_*$, $v \in \mathbb{V}$, $\varepsilon > 0$ и

$$\begin{aligned} (r^{u,0}_\varepsilon(\cdot), h^{u,0}_\varepsilon(\cdot)) &\in \operatorname*{argmin}_{(r(\cdot), h(\cdot)) \in \Omega(t, w(\cdot), \varepsilon)} \big(\rho_*(t, r(\cdot)) - h(t)\big), \\ (r^{v,0}_\varepsilon(\cdot), h^{v,0}_\varepsilon(\cdot)) &\in \operatorname*{argmax}_{(r(\cdot), h(\cdot)) \in \Omega(t, w(\cdot), \varepsilon)} \big(\rho_*(t, r(\cdot)) + h(t)\big). \end{aligned} \tag{8.10}$$

Экстремальные предстратегии p_{cs} первого и q второго игроков выбираются исходя из условий

$$\begin{gathered} p_{\mathrm{cs}}(t, x, v, s, h) \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathbb{U}} \big(\langle s, f(t, x, u, v) \rangle + h\chi(t, x, u, v)\big), \\ q(t, x, s, h) \in \operatorname*{argmax}_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \big(\langle s, f(t, x, u, v) \rangle + h\chi(t, x, u, v)\big), \end{gathered}$$

где $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, s \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}$ и $v \in \mathbb{V}$. При этом предстратегия p_{cs} измерима по Борелю по v при фиксированных t, x, s и h.

Опираясь на свойства (ρ_*.1)–(ρ_*.4), по аналогии с леммами 4 и 5, на основе подходящей модификации лемм 2 и 3 доказываются неравенства

$$\rho_{u,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot); U^0_{\mathrm{cs}}) \leqslant \rho_*(t_*, w_*(\cdot)) \leqslant \rho_v(t_*, w_*(\cdot); V^0), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*,$$

из которых в силу определений (8.2), (8.4) и неравенства (8.6) следует равенство (8.7) и оптимальность контрстратегии U^0_{cs} и стратегии V^0. Теорема доказана. □

В частности, цена дифференциальной игры в классах "контрстратегии — стратегии"

$$\rho_0(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^0_{u,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^0_v(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*, \tag{8.11}$$

совпадает с оптимальным гарантированным результатом первого игрока в классе квазистратегий (8.8):

$$\rho_0(t_*, w_*(\cdot)) = \rho_*(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*. \tag{8.12}$$

9. Дифференциальная игра в классах "стратегии — стратегии"

Пусть в дифференциальной игре (2.1), (2.7) в дополнение к условиям (f.1)–(f.3), (σ), (χ.1) и (χ.2) выполнено также *условие седловой точки для маленькой игры* (см., например, [3, с. 79]):

(f, χ) Для любых $t \in [t_0, \vartheta]$, $x, s \in \mathbb{R}^n$ и $h \in \mathbb{R}$ имеет место равенство

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \big(\langle s, f(t,x,u,v) + h\chi(t,x,u,v) \big) = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \big(\langle s, f(t,x,u,v) + h\chi(t,x,u,v) \big).$$

В этом случае имеет место следующий вариант леммы 3 (см. в этой связи [3, лемма 25.3]).

Лемма 7. *При выполнении условия* (f, χ) *для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\delta > 0$, *что справедливо следующее утверждение. Пусть* $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$, $(r_*(\cdot), h_*(\cdot)) \in \Omega(t_*, w_*(\cdot), \varepsilon)$, $t^* \in [t_*, \vartheta]$ *и* $t^* - t_* \leqslant \delta$. *Пусть движение* $x(\cdot)$ *системы* (2.1) *порождено из позиции* $(t_*, w_*(\cdot))$ *какой угодно реализацией* $u(\cdot) \in \mathcal{U}(t_*, t^*)$ *и постоянной реализацией*

$$v_*(t) = q\big(t_*, w_*(t_*), r_*(t_*) - w_*(t_*), h_*(t_*)\big), \quad t \in [t_*, t^*).$$

Пусть движение $y(\cdot)$ *системы* (2.1) *порождено из позиции* $(t_*, r_*(\cdot))$ *постоянной реализацией* $\widetilde{u}_*(\cdot)$ (5.13) *и какой угодно реализацией* $\widetilde{v}(\cdot) \in \mathcal{V}(t_*, t^*)$. *Тогда справедливо включение* $(y_{t^*}(\cdot), h(\cdot)) \in \Omega(t^*, x_{t^*}(\cdot), \varepsilon)$, *где функция* $h(\cdot)$ *определяется согласно* (5.14).

Рассмотрим стратегию V^0_* второго игрока, определяемую согласно соотношениям (8.9), (8.10) экстремальным сдвигом на сопутствующие точки, выбираемые по функции $\rho^* : G_* \to \mathbb{R}$ оптимального гарантированного результата второго игрока в классе квазистратегий (7.1):

$$V^0_*(t, w(\cdot), \varepsilon) = q\big(t, w(t), r^{v,0}_{\varepsilon,*}(t) - w(t), h^{v,0}_{\varepsilon,*}(t)\big),$$

$$(r^{v,0}_{\varepsilon,*}(\cdot), h^{v,0}_{\varepsilon,*}(\cdot)) \in \operatorname*{argmax}_{(r(\cdot),h(\cdot)) \in \Omega(t,w(\cdot),\varepsilon)} \big(\rho^*(t, r(\cdot)) + h(t)\big), \quad (t, w(\cdot)) \in G_*, \quad \varepsilon > 0.$$

По аналогии с леммой 5, используя лемму 7 вместо леммы 3, для каждой начальной позиции $(t_*, w_*(\cdot)) \in G_*$ устанавливается справедливость неравенства (см. в этой связи [3, лемма 27.2])

$$\rho_v(t_*, w_*(\cdot); V^0_*) \geqslant \rho^*(t_*, w_*(\cdot)).$$

Далее, так как в соответствии с соотношениями (3.5)–(3.7) и (8.3)–(8.5) имеет место оценка

$$\rho^0_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)) \geqslant \rho^0_v(t_*, w_*(\cdot)),$$

то с учетом определения (8.4) и равенств (7.2), (7.3) выводим

$$\rho_v(t_*, w_*(\cdot); V^0_*) = \rho^0_v(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^0_{v,\mathrm{cs}}(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^*(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^0_u(t_*, w_*(\cdot)). \tag{9.1}$$

В частности, справедливо равенство $\rho^0_u(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^0_v(t_*, w_*(\cdot))$ и стратегия V^0_* оптимальна.

Таким образом, принимая во внимание теорему 1, получаем следующий результат.

Теорема 3. *При выполнении дополнительного условия* (f, χ) *дифференциальная игра* (2.1), (2.7) *имеет цену и седловую точку в классах "стратегии — стратегии".*

Заметим, что из соотношений (8.11), (8.12) и (9.1) следует, что при условии (f, χ) для цены дифференциальной игры (2.1), (2.7) в классах "стратегии — стратегии"

$$\widehat{\rho}\,(t_*, w_*(\cdot)) = \rho_u^0(t_*, w_*(\cdot)) = \rho_v^0(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*,$$

справедливы равенства

$$\widehat{\rho}\,(t_*, w_*(\cdot)) = \rho^*(t_*, w_*(\cdot)) = \rho_*(t_*, w_*(\cdot)), \quad (t_*, w_*(\cdot)) \in G_*.$$

В частности, в этом случае игра имеет цену в классах "квазистратегии — квазистратегии".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Красовский Н.Н., Субботин А.И.** Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. **Субботин А.И., Ченцов А.Г.** Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
3. **Красовский Н.Н.** Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
4. **Krasovskii N.N., Krasovskii A.N.** Control under lack of information. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995. 322 p. ISBN: 0-8176-3698-6.
5. **Осипов Ю.С.** Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.
6. **Лукоянов Н.Ю.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и задачи управления с наследственной информацией. Екатеринбург: Изд-во УрФУ, 2011. 243 с.
7. **Лукоянов Н.Ю., Гомоюнов М.И., Плаксин А.Р.** Функциональные уравнения Гамильтона — Якоби и дифференциальные игры для систем нейтрального типа // Докл. АН. 2017. Т. 477, № 3. С. 287–290. doi: 10.7868/S0869565217330064 .
8. **Averboukh Yu.V.** Krasovskii–Subbotin approach to mean field type differential games // Dyn. Games Appl. 2018. P. 1–21. doi: 10.1007/s13235-018-0282-6 .
9. **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
10. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** Theory and applications of fractional differential equations. N Y: Elsevier, 2006. 540 p.
11. **Diethelm K.** The analysis of fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010. 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2 .
12. **Gomoyunov M.I.** Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations // Dyn. Games Appl. [ArXiv:1902.02951].
13. **Gomoyunov M.I.** Approximation of fractional order conflict-controlled systems // Progr. Fract. Differ. Appl. 2019. Vol. 5, № 3. [ArXiv:1805.10838].
14. **Chikrii A., Matychyn I.** Riemann–Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games // Advances in dynamic games: theory, applications, and numerical methods for differential and stochastic games. Boston: Birkhäuser, 2011. P. 61–81. doi: 10.1007/978-0-8176-8089-3_4 .
15. **Mamatov M., Alimov K.** Differential games of persecution of frozen order with separate dynamics // J. Appl. Math. Phys. 2018. Vol. 6. P. 475–487. doi: 10.4236/jamp.2018.63044 .
16. **Банников А.С.** Уклонение от группы преследователей в задаче группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27, вып. 3. С. 309–314. doi: 10.20537/vm170302 .
17. **Петров Н.Н.** Одна задача группового преследования с дробными производными и фазовыми ограничениями // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьют. науки. 2017. Т. 27, вып. 1. С. 54–59. doi: 10.20537/vm170105 .
18. **Kartsatos A.G.** Advanced ordinary differential equations (third edition). N Y: Hindawi Publ., 2005. 221 p.

19. **Diethelm K., Siegmund S., Tuan H.T.** Asymptotic behavior of solutions of linear multi-order fractional differential systems // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. Vol. 20, № 5. P. 1165–1195. doi: 10.1515/fca-2017-0062 .
20. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.
21. **Lin S.** Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // J. Inequal. Appl. 2013. Vol. 2013. P. 1–9. doi: 10.1186/1029-242X-2013-549 .
22. **Aghajani A., Jalilian Y., Trujillo J.J.** On the existence of solutions of fractional integro-differential equations // Fract. Calc. Appl. Anal. 2012. Vol. 15, № 1. P. 44–69. doi: 10.2478/s13540-012-0005-4 .
23. **Gomoyunov M.I.** Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Frac. Calc. Appl. Anal. 2018. Vol. 21, № 5. P. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066 .
24. **Филиппов А.Ф.** Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.

Поступила 22.11.2018
После доработки 20.01.2019
Принята к публикации 21.01.2019

Гомоюнов Михаил Игоревич
канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
доцент
Уральский федеральный университет
г. Екатеринбург
e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com

REFERENCES

1. Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Game-theoretical control problems.* N Y, Springer, 1988, 517 p. ISBN: 978-1-4612-8318-8. Original Russian text published in Krasovskii N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnye differentsial'nye igry*, Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
2. Subbotin A.I., Chentsov A.G. *Optimizatsiya garantii v zadachakh upravleniya* [Guarantee optimization in control problems]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 288 p.
3. Krasovskii N.N. *Upravlenie dinamicheskoi sistemoi* [Control of a dynamical system]. Moscow, Nauka Publ., 1985, 520 p.
4. Krasovskii N.N., Krasovskii A.N. *Control under lack of information.* Berlin etc.: Birkhäuser, 1995, 322 p. ISBN: 0-8176-3698-6 .
5. Osipov Yu.S. Differential games of systems with aftereffect. *Sov. Math., Dokl.*, 1971, vol. 12, pp. 262–266.
6. Lukoyanov N.Yu. *Funktsional'nye uravneniya Gamil'tona–Yakobi i zadachi upravleniya s nasledstvennoi informatsiei* [Functional Hamilton–Jacobi equations and control problems with hereditary information]. Ekaterinburg, Ural Federal University Publ., 2011, 243 p.
7. Lukoyanov N.Yu., Gomoyunov M.I., Plaksin A.R. Hamilton—Jacobi functional equations and differential games for neutral-type systems. *Dokl. Math.*, 2017, vol. 96, no. 3, pp. 654–657. doi: 10.1134/S1064562417060114 .
8. Averboukh Yu.V. Krasovskii–Subbotin approach to mean field type differential games. *Dyn. Games Appl.*, 2018, pp. 1–21. doi: 10.1007/s13235-018-0282-6 .
9. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications.* Yverdon: Gordon and Breach Science Publ., 1993, 976 p. ISBN: 9782881248641 . Original Russian text published in Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya*, Minsk: Nauka i tekhnika Publ., 1987, 638 p.
10. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations.* N Y: Elsevier, 2006, 540 p. ISBN: 0444518320 .
11. Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations.* Berlin: Springer, 2010, 247 p. doi: 10.1007/978-3-642-14574-2 .
12. Gomoyunov M.I. Solution to a zero-sum differential game with fractional dynamics via approximations. *Dyn. Games Appl.* [ArXiv:1902.02951].

13. Gomoyunov M.I. Approximation of fractional order conflict-controlled systems. *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2019, vol. 5, no. 3. [ArXiv:1805.10838].
14. Chikrii A., Matychyn I. Riemann–Liouville, Caputo, and sequential fractional derivatives in differential games. In: *Advances in dynamic games: theory, applications, and numerical methods for differential and stochastic games*. Boston: Birkhäuser, 2011, pp. 61–81. doi: 10.1007/978-0-8176-8089-3_4 .
15. Mamatov M., Alimov K. Differential games of persecution of frozen order with separate dynamics. *J. Appl. Math. Phys.*, 2018, vol. 6, no. 3, pp. 475–487. doi: 10.4236/jamp.2018.63044 .
16. Bannikov A.S. Evasion from pursuers in a problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints. *Vestn. Udmurt. Univer. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 309–314 (in Russian). doi: 10.20537/vm170302 .
17. Petrov N.N. One problem of group pursuit with fractional derivatives and phase constraints. *Vestn. Udmurt. Univer. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 1, pp. 54–59 (in Russian). doi: 10.20537/vm170105 .
18. Kartsatos A.G. *Advanced ordinary differential equations* (third ed.). N Y: Hindawi Publ., 2005, 221 p. ISBN: 977-5945-15-1 .
19. Diethelm K., Siegmund S., Tuan H.T. Asymptotic behavior of solutions of linear multi-order fractional differential systems. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2017, vol. 20, no. 5, pp. 1165–1195. doi: 10.1515/fca-2017-0062 .
20. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*. [Two volumes in one, translated from the first Russian edition 1957–1961]. Martino Fine Books, United States. 2012. 280 p. ISBN: 1614273049 . The 5th edition of Russian text published in Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza*. Moscow, Nauka Publ., 1981, 544 p.
21. Lin S. Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations. *J. Inequal. Appl.*, 2013, vol. 2013, pp. 1–9. doi: 10.1186/1029-242X-2013-549 .
22. Aghajani A., Jalilian Y., Trujillo J.J. On the existence of solutions of fractional integro-differential equations. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2012, vol. 15, no. 1, pp. 44–69. doi: 10.2478/s13540-012-0005-4 .
23. Gomoyunov M.I. Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems. *Frac. Calc. Appl. Anal.*, 2018, vol. 21, no. 5, pp. 1238–1261. doi: 10.1515/fca-2018-0066 .
24. Filippov A.F. *Differential equations with discontinuous righthand sides*. Dordrecht, Kluwer, 304 p. ISBN: 90-277-2699-X. Original Russian text published in Filippov A.F. *Differentsial'nye uravneniya s razryvnoi pravoi chast'yu*, Moscow, Nauka Publ., 1985, 224 p.

Received November 21, 2018
Revised January 20, 2019
Accepted January 21, 2019

Mikhail Igorevich Gomoyunov, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: m.i.gomoyunov@gmail.com .