ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 519.65

ПРИМЕР ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СПЛАЙН ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ОГРАНИЧЕННОЙ КОНСТАНТОЙ ЛЕБЕГА[1]

Ю. С. Волков

Рассматривается пример последовательности геометрических сеток данных, для которых константа Лебега интерполяции классическими параболическими сплайнами (схема Субботина) с периодическими краевыми условиями не является ограниченной, т. е. интерполяционный процесс может расходиться. Предложена альтернативная схема выбора узлов параболического сплайна. Если в схеме Субботина на каждом промежутке сетки данных узел сплайна выбирается строго посередине, то в альтернативной схеме положение узла определяется пропорционально величинам соседних промежутков (рассмотрены 2 варианта). При интерполяции по альтернативной схеме в рассмотренном примере имеет место сходимость процесса интерполяции для любой непрерывной функции, т. е. константа Лебега ограничена. Рассмотренная последовательность сеток является “худшей” с точки зрения сходимости процесса интерполяции в классическом случае.

Ключевые слова: параболические сплайны, интерполяция, сходимость, константа Лебега.

Yu. S. Volkov. Example of parabolic spline interpolation with bounded Lebesgue constant.

We consider an example of a sequence of geometric data grids for which the Lebesgue constant of interpolation by the classical parabolic splines (Subbotin's scheme) with periodic boundary conditions is unbounded; i.e., the interpolation process may diverge. We propose an alternative scheme for choosing the knots of a parabolic spline. In Subbotin's scheme, knots of a spline are chosen as the midpoints of intervals of the data grid, whereas the location of a knot in the alternative scheme is defined proportionally to the lengths of the adjacent intervals (we consider two variants). In the case of interpolation by the alternative scheme in the example under consideration, the process converges for any continuous function; i.e., the Lebesgue constant is bounded. The sequence of grids studied in the paper is the “worst” from the viewpoint of the convergence of the interpolation process in the classical case.

Keywords: parabolic splines, interpolation, convergence, Lebesgue constant.

MSC: 41A05, 41A15, 41A25

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-85-91

Профессору В. В. Арестову посвящается в связи 75-летним юбилеем

Введение

Рассматривается задача интерполяции дискретных значений некоторой функции $f(x)$ на отрезке. Классическим решением этой задачи полиномиальными сплайнами нечетной степени являются сплайны наименьшего дефекта 1 с узлами на той же сетке. Однако при интерполяции сплайнами четной степени узлы сплайна выбираются строго посередине между точками интерполяции (схема Субботина) [1]. Известно, что в этих классических схемах интерполяции константа Лебега (норма оператора интерполяции) не может быть ограничена константой, не зависящей от количества или расположения узлов сетки данных уже для сплайнов начиная со второй степени. Примеры последовательности сеток, для которых константа Лебега стремится к бесконечности, для сплайнов нечетной степени построены в [2], а в работе [3] приведен пример расходимости процесса интерполяции для параболических и кубических сплайнов.

Ранее автор изучал [4] общую задачу интерполяции полиномиальными сплайнами такую, где сетка узлов выбирается произвольным образом и не связана с исходной сеткой данных.

[1]Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № 0314-2016-0013.

Конечно, совсем эти сетки произвольными быть не могут — должны быть выполнены условия Шёнберга — Уитни [5]. В работе [4] был сформулирован вопрос о возможности в задаче интерполяции за счет выбора сетки узлов сплайна добиться улучшения аппроксимативных свойств сплайна, например, добиться ограниченности константы Лебега. В настоящей заметке в задаче интерполяции параболическими сплайнами мы предлагаем альтернативный по отношению к схеме Субботина способ выбора узлов сплайна. На каждом промежутке сетки данных узел сплайна выбирается с учетом величины соседних промежутков. Мы показываем, что в этом случае на последовательности сеток из примера расходимости [2] последовательность периодических интерполяционных параболических сплайнов будет сходиться для любой непрерывной периодической функции $f(x)$ того же периода, т. е. константа Лебега будет ограничена, в то время как интерполяционные параболические сплайны по Субботину не всегда будут сходиться на такой последовательности сеток. Отметим, что для сеток с равноотстоящими узлами в классической схеме интерполяции сплайнами второй степени асимптотически точное значение константы Лебега равно $\sqrt{2}$ [6].

1. Две схемы интерполяции

В стандартной схеме интерполяции сплайнами четной степени по Субботину, если исходные значения функции $f(x)$ заданы на сетке $\Delta\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то узлы сплайна выбираются на каждом интервале строго посередине между узлами сетки Δ. Обозначим $\delta\colon \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < \xi_{n+1}$ сетку узлов интерполяционного сплайна четной степени, тогда в схеме Субботина

$$\xi_i = (x_{i-1} + x_i)/2, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

и $\xi_0 \le a$, $\xi_{n+1} \ge b$. Мы будем рассматривать интерполяцию периодической функции $f(x)$ периода $b-a$, поэтому будем считать сетки Δ и δ периодически продолженными за пределы отрезка $[a, b]$.

Наряду со схемой интерполяции по Субботину рассмотрим другую схему выбора узлов сетки δ, т. е. узлов сплайна, в которой положение этих узлов определяется величинами соседних промежутков. Например, узел ξ_i можно выбирать так, что он делит отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ в отношении

$$(x_{i-1} - x_{i-2}) : (x_{i+1} - x_i) \tag{2}$$

или

$$(x_i - x_{i-2}) : (x_{i+1} - x_{i-1}). \tag{3}$$

В общем случае при выборе узлов сетки δ по формулам (2) или (3) нам не удалось показать, что константу Лебега можно всегда ограничить величиной, не зависящей от количества и расположения узлов исходной сетки данных Δ, однако для "худших" сеток с точки зрения сходимости процессов интерполяции, а именно геометрических сеток примера расходимости [2], мы показываем ограниченность константы Лебега при альтернативной схеме интерполяции параболическими сплайнами, т. е. сходимость процесса интерполяции. Для сплайнов же по Субботину константа Лебега неограниченно растет.

Далее будем считать, что задана последовательность "плохих" сеток $\{\Delta_\nu\}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, примера расходимости [2], в узлах которых заданы значения интерполируемой $(b-a)$-периодической функции $f(x)$. Разделим отрезок $[a, b]$ на 2ν равных частей длиной $H_\nu = (b-a)/2\nu$. На каждом из отрезков $[a + 2mH_\nu, a + 2(m+1)H_\nu]$, $m = 0, \ldots, \nu-1$, построим разбиение

$$a + 2mH_\nu = x_{\nu,2m\nu} < x_{\nu,2m\nu+1} < \ldots < x_{\nu,2(m+1)\nu} = a + 2(m+1)H_\nu$$

так, что

$$\begin{aligned} x_{\nu,2m\nu+j+1} &= x_{\nu,2m\nu+j} + q^j h_\nu, && j = 0, \ldots, \nu-1, \\ x_{\nu,(2m+1)\nu+j+1} &= x_{\nu,(2m+1)\nu+j} + q^{\nu-1-j} h_\nu, && j = 0, \ldots, \nu-1, \end{aligned}$$

где $h_\nu = H_\nu/(1+q+\ldots+q^{\nu-1})$ для некоторой константы $q \geq 1$, не зависящей от ν, m и j. Ясно, что параметр q есть локальная характеристика сетки, т. е. наибольшее отношение соседних шагов сетки (при $q = 1$ сетка равномерная). Известно [3], что если локальные характеристики любой последовательности сеток не превышают какого-либо числа ρ, меньшего $\rho^* = 2+\sqrt{3}$, то интерполяционный процесс по схеме Субботина для параболических сплайнов всегда сходится, в противном случае возможна расходимость. Мы будем рассматривать в нашем примере случай $q > \rho^*$.

2. Схема Субботина

Пусть операторы $P_\nu\colon C \to C$ ставят в соответствие $(b-a)$-периодической функции $f(x)$ интерполирующие ее на сетках Δ_ν $(b-a)$-периодические параболические сплайны по Субботину, т. е. сплайны с узлами на сетках δ_ν, получаемых по формулам (1). Мы хотим показать неограниченность константы Лебега, т. е. нормы опрераторов P_ν, на рассматриваемой последовательности сеток.

Теорема 1. *Последовательность констант Лебега $(b-a)$-периодических параболических сплайнов по Субботину на последовательности сеток $\{\Delta_\nu\}$ стремится к ∞ при $\nu \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку действие операторов можно представить в виде

$$(P_\nu f)(x) = \sum_{i=1}^{2\nu^2} f(x_{\nu,i}) F_{\nu,i}(x),$$

где $F_{\nu,i}$ — периодический фундаментальный параболический сплайн по Субботину для сетки Δ_ν, однозначно определяемый интерполяционными условиями $F_{\nu,i}(x_{\nu,j}) = \delta_{i,j}$, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, то

$$\|P_\nu\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{2\nu^2} f(x_{\nu,i}) F_{\nu,i} \right\|_\infty \geq \left\| \sum_{m=1}^{\nu} F_{\nu,2m\nu} \right\|_\infty. \tag{4}$$

Как обычно, считаем

$$\|g\|_\infty = \operatorname{ess}\sup_{a \leqslant x \leqslant b} \big|g(x)\big|.$$

Заметим, что функция

$$s_\nu(x) = \sum_{m=1}^{\nu} F_{\nu,2m\nu}(x) \tag{5}$$

является периодическим на $[a,b]$ параболическим сплайном и совпадает со сплайном по Субботину, заданным лишь на геометрической сетке

$$a = x_{\nu,0} < x_{\nu,1} < \ldots < x_{\nu,\nu} \tag{6}$$

значениями 1 в первом узле $x_{\nu,0}$ и 0 в остальных узлах, а также принимающим нулевые значения производных на концах, т. е. в точках $x_{\nu,0}$ и $x_{\nu,\nu}$. Таким образом, в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением сплайна (5) только на сетке (6), являющейся частью сетки Δ_ν, которую в дальнейшем будем обозначать $\bar{\Delta}_\nu$. Для упрощения узлы этой сетки будем обозначать лишь одним индексом, опуская индекс ν номера сетки.

Теперь задача состоит в оценке нормы параболического сплайна по Субботину, интерполирующего на сетке

$$\bar{\Delta}_\nu\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_\nu, \quad x_{j+1} = x_j + q^j h_\nu, \quad j = 0,\ldots,\nu-1,$$

такие данные: 1 в узле x_0 и 0 в остальных узлах, и принимающего на концах нулевые значения производной. К тому же, поскольку сетка $\bar{\Delta}_\nu$ является частью сетки Δ_ν, то мы знаем, как эти сетки $\bar{\Delta}_\nu$ и δ_ν продолжены за пределы отрезка $[x_0, x_\nu]$, а именно, симметрично относительно его концов.

Будем использовать представление искомого сплайна (5) в виде разложения по B-сплайнам с узлами на сетке δ_ν

$$s_\nu(x) = \sum_{i=-2}^{\nu} \alpha_i N_i(x).$$

Здесь $N_i(x)$ — нормализованный B-сплайн второй степени с узлами на сетке δ_ν и носителем $[\xi_i, \xi_{i+3}]$ (см. [1]).

Условия интерполяции и краевые условия приводят к следующей системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов $\alpha_{-2}, \dots, \alpha_\nu$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{-2} = \alpha_0,\\
&\alpha_{-2} + 2(2+q)\alpha_{-1} + \alpha_0 = 2(3+q),\\
&q^2(1+q)^2\alpha_{-1} + q[3(1+q)^2 + (2+q)(3+q)]\alpha_0 + (3+q)\alpha_1 = 0,\\
&q^3\alpha_{i-2} + 3q(1+q)\alpha_{i-1} + \alpha_i = 0, \qquad i = 2, \dots, \nu-2,\\
&q^3\alpha_{\nu-3} + q[(1+2q)(1+3q) + 3(1+q)^2]\alpha_{\nu-2} + (1+q)^2\alpha_{\nu-1} = 0,\\
&q\alpha_{\nu-2} + 2(1+2q)\alpha_{\nu-1} + q\alpha_\nu = 0,\\
&\alpha_{\nu-2} = \alpha_\nu.
\end{aligned}$$

Исключая из уравнений по 2 крайних коэффициента, относительно оставшихся неизвестных $\alpha_0, \dots, \alpha_{\nu-2}$ получаем систему уравнений

$$q[2(1+q)^2 + (2+q)^2]\alpha_0 + (2+q)\alpha_1 = -q^2(1+q)^2, \tag{7}$$

$$q^3\alpha_{i-1} + 3q(1+q)\alpha_i + \alpha_{i+1} = 0, \qquad i = 1, \dots, \nu-3, \tag{8}$$

$$q^2(1+2q)\alpha_{\nu-3} + [(1+2q)^2 + 2(1+q)^2]\alpha_{\nu-2} = 0. \tag{9}$$

Решения такой системы уравнений можно искать в виде $\alpha_i = \lambda^i$. Находим корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$\lambda^2 + 3q(1+q)\lambda + q^3 = 0, \tag{10}$$

получаем

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2}q(1+q) + \frac{1}{2}\sqrt{9q^2(1+q)^2 - 4q^3}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}q(1+q) - \frac{1}{2}\sqrt{9q^2(1+q)^2 - 4q^3}.$$

Тогда $\alpha_j = c_1\lambda_1^j + c_2\lambda_2^j$, $j = 0, \dots, \nu-2$, причем коэффициенты c_1, c_2 можно найти из уравнений (7), (9). Но нам нет необходимости выписывать явные формулы для c_1 и c_2, мы хотим знать их поведение при $\nu \to \infty$. Легко установить, что $c_1 = O(1)$, $c_2 = O\Big(\Big|\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big|^\nu\Big)$, а для B-сплайн-коэффициентов

$$\alpha_j = \lambda_1^j O(1) + \lambda_2^j O\Big(\Big|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big|^\nu\Big), \quad j = 0, \dots, \nu-2.$$

Тогда значение сплайна (5) в точке x из среднего подынтервала $[\xi_m, \xi_{m+1}]$, $m = [\nu/2]$, промежутка $[a, a+H_\nu]$ таково:

$$\sum_{k=m-2}^{m} \Big[\lambda_1^k O(1) + \lambda_2^k O\Big(\Big|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big|^\nu\Big)\Big] N_k(x) = O(|\lambda_1|^m),$$

и, следовательно, в силу (4), при достаточно больших ν приходим к оценке

$$\|P_\nu\| > K|\lambda_1|^{\nu/2}$$

с некоторой константой $K > 0$, не зависящей от сетки, причем при $q > \rho^* = 2+\sqrt{3}$ выполняется неравенство $|\lambda_1| > 1$, означающее неограниченный рост константы Лебега на рассматриваемой последовательности сеток $\{\Delta_\nu\}$ с ростом ν.

Теорема доказана.

3. Альтернативная схема интерполяции

Теперь будем рассматривать ту же последовательность «плохих» сеток $\{\Delta_\nu\}$ с данными, описанную ранее, но сетку узлов параболического сплайна δ_ν выберем другой. На каждом промежутке $[x_{i-1}, x_i]$ узел сплайна ξ_i будем ставить не строго посередине (схема Субботина), а пропорционально длине соседних промежутков, т. е. по формулам (2) и (3). Поскольку любая наша сетка Δ_ν однозначно определяется куском $[a, a + H_\nu]$, то и узлы сплайна нам надо задать лишь на промежутках указанного куска. Во всех внутренних промежутках этого куска узел ξ_i ставим так, чтобы он делил промежуток $[x_{i-1}, x_i]$ в отношении (3), а в крайних — в отношении (2). В результате получаем, что все промежутки разбились в отношении $1 : q$.

Теорема 2. *Последовательность констант Лебега альтернативной схемы интерполяции $(b-a)$-периодическими параболическими сплайнами на последовательности сеток $\{\Delta_\nu\}$ ограничена некоторой константой.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограниченность нормы оператора интерполяции на последовательности сеток эквивалентна сходимости процесса интерполяции для любой непрерывной функции отрезка $[a, b]$, в нашем случае $(b-a)$-периодической. Мы покажем сходимость процесса интерполяции на рассматриваемой последовательности сеток Δ_ν. В работе [4] установлены оценки погрешности интерполяции при произвольном расположении узлов сплайна через чебышёвскую или sup-норму обратной матрицы системы уравнений относительно коэффициентов разложения интерполяционного сплайна по B-сплайнам. Ограниченность нормы такой матрицы для нормализованных B-сплайнов второй степени с узлами на сетке δ_ν константой, не зависящей ни от q, ни от ν, и будет означать сходимость процесса интерполяции для любой непрерывной функции $f(x)$, а следовательно, и ограниченность константы Лебега.

Хотя сетки Δ_ν и δ_ν однозначно определяются сеткой куска $[a, a+H_\nu]$, условия интерполяции следует записать для всех точек данных отрезка $[a, b]$, так как интерполируемая функция имеет период $b - a$. Условие интерполяции в точке x_0 имеет вид

$$\frac{1}{4(1+q)}\alpha_{-2} + \frac{1+2q}{2(1+q)}\alpha_{-1} + \frac{1}{4(1+q)}\alpha_0 = f(x_0), \tag{11}$$

такие же уравнения, отличающиеся лишь правой частью и сдвигом индексов, будут и во всех точках $x_{2m\nu}$, $m = 0, \ldots, \nu$. В точке x_ν условие интерполяции таково:

$$\frac{q}{4(1+q)}\alpha_{\nu-2} + \frac{2+q}{2(1+q)}\alpha_{\nu-1} + \frac{q}{4(1+q)}\alpha_\nu = f(x_\nu), \tag{12}$$

и опять это же уравнение с точностью до сдвига индексов справедливо и для точек $x_{2m\nu+\nu}$, $m = 1, \ldots, \nu$. А во всех остальных узлах сетки $\bar{\Delta}_\nu$ уравнения будут иметь вид

$$\frac{q}{4(1+q)}\alpha_{i-2} + \frac{3}{4}\alpha_{i-1} + \frac{1}{4(1+q)}\alpha_i = f(x_i), \tag{13}$$

$i = 1, \ldots, \nu - 1$. На куске $[a + H_\nu, a + 2H_\nu]$ с симметричной сеткой уравнения также будут симметричны:

$$\frac{1}{4(1+q)}\alpha_{i-2} + \frac{3}{4}\alpha_{i-1} + \frac{q}{4(1+q)}\alpha_i = f(x_i), \quad i = \nu+1, \ldots, 2\nu-1. \tag{14}$$

Таким образом, с учетом периодичности матрица системы уравнений относительно всех неизвестных $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2\nu^2}$ является циклической трехдиагональной, в которой строки образованы всего четырьмя различными тройками ненулевых элементов. Заметим, что во всех строках присутствует диагональное преобладание, однако в строках вида (12) величина диагонального преобладания равна $1/(1+q)$, которая стремится к 0 с увеличением q, что не позволяет говорить об ограниченности нормы обратной матрицы независимо от q.

Тем не менее для рассматриваемой конструкции константа Лебега все-таки ограничена. Оказывается, хорошую оценку нормы обратной матрицы системы уравнений (11)–(14), которую обозначим $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, можно установить, рассмотрев диагональное преобладание по столбцам. Оценка элементов обратной матрицы может быть установлена [7, теорема 1] через характеристику столбцевого диагонального преобладания

$$\sigma = \max_j \frac{1}{|a_{jj}|} \sum_{i \neq j} |a_{ij}|,$$

что в трехдиагональном случае приводит к оценке

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \leq \frac{1+\sigma}{(1-\sigma)^2} \max_i \frac{1}{|a_{ii}|}.$$

В нашем случае $\sigma = 1/2$, поэтому $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty \leq 12$.

Теорема доказана.

Заметим, что оценку элементов обратной к $\boldsymbol{A}$ матрицы можно получить и из циклического аналога теоремы Демко [8]. Величина столбцевого диагонального преобладания во всех столбцах одинакова и равна $1/2$, поэтому в силу [9] имеем $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_1 = 2$, а для нормы самой матрицы имеет место оценка $\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq 3/2$.

Заключение

На примере интерполяции параболическими сплайнами мы показали, что, выбирая подходящим образом сетку узлов сплайна, можно добиться сходимости процесса интерполяции (ограниченности константы Лебега), в то время как использование классической схемы интерполяции ведет к расходящемуся интерполяционному процессу. Успеха удалось добиться за счет того, что в альтернативной схеме при выборе узлов сплайна учитываются величины соседних промежутков сетки данных. Однако нам не удалось показать, что при предложенной альтернативной схеме интерполяции константа Лебега будет всегда ограничена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.** Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.
2. **Волков Ю.С.** Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени // Вычисл. системы / ИМ СО АН СССР. Новосибирск, 1984. Вып. 106: Приближение сплайнами. С. 41–56.
3. **Зматраков Н.Л.** Сходимость интерполяционного процесса для параболических и кубических сплайнов // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 71–93.
4. **Volkov Yu.S.** The general problem of polynomial spline interpolation // Proc. Steklov Inst. Math. 2018. Vol. 300, Suppl. 1. P. S187–S198. doi: 10.1134/S0081543818020190 .
5. **Schoenberg I. J., Whitney A.** On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 74, no. 2. P. 246–259. doi: 10.2307/1990881 .
6. **Richards F. B.** Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approxim. Theory. 1973. Vol. 7, no. 3. P. 302–317.
7. **Волков Ю. С.** Новый способ построения интерполяционых кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.

8. **Волков Ю. С.** Обратные циклических ленточных матриц и сходимость процессов интерполяции для производных периодических интерполяционных сплайнов // Сиб. журн. вычисл. математики. 2010. Т. 13, № 3. С. 243–253.
9. **Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.** Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1248–1254.

Поступила 01.09.2018
После доработки 08.10.2018
Принята к публикации 15.10.2018

Волков Юрий Степанович
д-р физ.-мат. наук, доцент
гл. науч. сотрудник
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск;
профессор
Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск
e-mail: volkov@math.nsc.ru

REFERENCES

1. Stechkin S.B., Subbotin Yu.N. *Splainy v vychislitel'noi matematike* [Splines in numerical mathematics]. Moscow: Nauka Publ., 1976, 248 p.
2. Volkov Yu.S. Divergence of interpolational splines of odd degree. *Vychisl. Sist.*, 1984, vol. 106, pp. 41–56.
3. Zmatrakov N.L. Convergence of an interpolation process for parabolic and cubic splines. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 75–99.
4. Volkov Yu.S. The general problem of polynomial spline interpolation. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, vol. 300, suppl. 1, pp. 187–198. doi: 10.1134/S0081543818020190 .
5. Schoenberg I.J., Whitney A. On Pólya frequency functions. III. The positivity of translation determinants with an application to the interpolation problem by spline curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1953, vol. 74, no. 2, pp. 246–259. doi: 10.2307/1990881 .
6. Richards F. B. Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator. *J. Approxim. Theory.*, 1973, vol. 7, no. 3, pp. 302–317.
7. Volkov Yu.S. A new method for constructing cubic interpolating splines. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2004, vol. 44, no. 2, pp. 215–224.
8. Volkov Yu.S. Inverses of cyclic band matrices and the convergence of interpolation processes for derivatives of periodic interpolation splines. *Num. Anal. Appl.*, 2010, vol. 3, no. 3, pp. 199–207. doi: 10.1134/S1995423910030018 .
9. Volkov Yu.S., Miroshnichenko V.L. Norm estimates for the inverses of matrices of monotone type and totally positive matrices. *Siberian Math. J.*, 2009, vol. 50, no. 6, pp. 982–987. doi: 10.1007/s11202-009-0108-2 .

Received September 01, 2018
Revised October 08, 2018
Accepted October 15, 2018

Funding Agency: This work was supported by Program 0314-2016-0013 for Fundamental Research of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences.

Yuriy Stepanovich Volkov, Dr. Phys.-Math. Sci, Prof., Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia; Novosibirsk State University, Novosibirsk, 630090 Russia, e-mail: volkov@math.nsc.ru .