ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.51

НЕРАВЕНСТВО РАЗНЫХ МЕТРИК В ОБОБЩЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА[1]

Г. Акишев

Основная цель статьи — доказать неравенство Джексона — Никольского для кратных тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца $L_{\psi,\theta}(\mathbb{T}^m)$. В первом разделе статьи приведены определения симметричного пространства функций, фундаментальной функции и индекса Бойда пространства. В частности, определены обобщенные пространства Лоренца, Лоренца — Зигмунда. Кроме того даны определения слабо меняющейся функции, пространства Лоренца — Караматы. Во втором разделе доказан аналог неравенства разных метрик для кратных тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца $L_{\psi,\theta}(\mathbb{T}^m)$ с одинаковыми индексами Бойда, но разными фундаментальными функциями. В пространстве Лоренца — Караматы получено точное по порядку неравенство Джексона — Никольского для кратных тригонометрических полиномов.

Ключевые слова: пространство Лоренца — Караматы, неравенство Джексона — Никольского, тригонометрический полином.

G. Akishev. An inequality of different metrics in the generalized Lorentz space.

The main goal of the paper is to prove the Jackson–Nikol'skii inequality for multiple trigonometric polynomials in the generalized Lorentz space $L_{\psi,\theta}(\mathbb{T}^m)$. In the first section we give definitions of a symmetric space of functions, a fundamental function, and the Boyd index of a space. In particular, we define the generalized Lorentz and Lorentz–Zygmund spaces. In addition, definitions of a weakly varying function and of the Lorentz–Karamata space are given. In the second section we prove an analog of the inequality of different metrics for multiple trigonometric polynomials in generalized Lorentz spaces $L_{\psi,\theta}(\mathbb{T}^m)$ with identical Boyd indices but different fundamental functions. In the Lorentz–Karamata space, the order-exact Jackson–Nikol'skii inequality for multiple trigonometric polynomials is obtained.

Keywords: Lorentz–Karamata space, Jackson–Nikol'skii inequality, trigonometric polynomial.

MSC: 42A05, 42A10, 46E30

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-5-18

Введение

Статья посвящена неравенствам Джексона — Никольского для кратных тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $I^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \le x_j \le 1;\ j = 1, \ldots, m\}$; m — мерный куб.

Банахово пространство X измеримых по Лебегу на I^m функций называется *симметричным*, если

1) из того, что $|f(\bar{x})| \le |g(\bar{x})|$ почти всюду на I^m и $g \in X$ следует, что $f \in X$ и $\|f\|_X \le \|g\|_X$;

2) из $f \in X$ и равноизмеримости функций $|f(\bar{x})|$ и $|g(\bar{x})|$ следует, что $g \in X$ и $\|f\|_X = \|g\|_X$ (см. [1, с.123]).

Здесь и в дальнейшем $\|f\|_X$ означает норму элемента $f \in X$.

Пусть $\chi_e(t)$ — характеристическая функция множества $e \subset I^m$. Функция $\varphi(\mu e) = \|\chi_e\|_X$ называется *фундаментальной функцией пространства* X, где μe — мера Лебега множества $e \subset I^m$. Таким образом, фундаментальная функция симметричного пространства X есть функция $\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_X$, определенная на отрезке $[0, 1]$. Фундаментальную функцию $\varphi(t)$

[1]Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

симметричного пространства можно считать вогнутой, неубывающей, непрерывной на $[0,1]$ функцией, причем $\varphi(0)=0$ (см. [1, с. 137]). Такие функции называются Φ-*функциями.* Далее $X(\varphi)$ означает симметричное пространство с фундаментальной функцией φ.

Примеры сепарабельных симметричных пространств:

1. $L_q(\mathbb{T}^m)=L_q$ — пространство Лебега с нормой $\|f\|_q=\left(\int_{I^m}|f(2\pi\bar{x})|^q d\bar{x}\right)^{1/q}$, $1\le q<\infty$.

Здесь и дальнейшем $\mathbb{T}^m=[0,2\pi]^m$, функции f — 2π-периодические по каждой переменной.

2. Пространство Лоренца $L_{q,\theta}(\mathbb{T}^m)$ с нормой (см. [2, с. 228])

$$\|f\|_{q,\theta}=\left(\frac{\theta}{q}\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^t f^*(\tau)d\tau\right)^\theta t^{\theta(\frac{1}{q}-1)-1}dt\right)^{1/\theta}<\infty,$$

где $f^*(\tau)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|, \bar{x}\in I^m$ (см. [1, с. 83]), $1<q<\infty$, $1\leqslant\theta<+\infty$.

Известно, что существуют постоянные $C_1,C_2>0$ такие, что (см. [2, с. 229])

$$C_1\|f\|_{q,\theta}\leqslant\left(\int\limits_0^1 {f^*}^\theta(t)t^{\frac{\theta}{q}-1}dt\right)^{1/\theta}\leqslant C_2\|f\|_{q,\theta}.$$

Для данной функции $\varphi(t), t\in[0,1]$, положим

$$\alpha_\varphi=\underline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)},\quad \beta_\varphi=\overline{\lim}_{t\to 0}\frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}.$$

Известно, что для любого симметричного пространства $X(\varphi)$ справедливы неравенства $1\le\alpha_\varphi\le\beta_\varphi\le 2$ [3]. Числа $\alpha_\varphi,\beta_\varphi$ называются соответственно *нижним и верхним индексами фундаментальной функции* φ.

Для пространств Лебега и Лоренца фундаментальные функции $\varphi(t)=t^{1/p}$ и $\alpha_\varphi=\beta_\varphi=2^{1/p}$.

Отметим, что пространства $L_{q,\theta_2}(\mathbb{T}^m), L_{p,\theta_1}(\mathbb{T}^m)$ при $p\neq q$ имеют разные фундаментальные функции $\varphi_{L_{p,\theta_1}}(t)=t^{1/p}$, $\varphi_{L_{q,\theta_2}}(t)=t^{1/q}$ и их индексы соответственно равны $2^{1/p}$, $2^{1/q}$.

В случае $p=q$ пространства $L_{p,\theta_2}(\mathbb{T}^m), L_{p,\theta_1}(\mathbb{T}^m)$ имеют одинаковые фундаментальные функции $\varphi_{L_{p,\theta_1}}(t)=\varphi_{L_{p,\theta_2}}(t)=t^{1/p}$ и их индексы соответственно равны $2^{1/p}$.

В первом разделе дана краткая история исследований неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов. Основные результаты изложены во втором разделе. В нем доказаны неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца.

1. Неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов в некоторых пространствах

Рассмотрим кратный тригонометрический полином

$$T_{\overline{n}}(\overline{x})=T_{n_1,\ldots,n_m}(\overline{x})=\sum_{k_1=-n_1}^{n_1}\cdots\sum_{k_m=-n_m}^{n_m}a_{\overline{k}}e^{i\langle\overline{k},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle\bar{k},\bar{x}\rangle=\sum_{j=1}^m k_jx_j$, $n_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\ldots,m$.

Для тригонометрического полинома одной переменной $T_n(x)$ хорошо известно неравенство Джексона — Никольского

$$\|T_n\|_q\leqslant 2n^{1/p-1/q}\|T_n\|_p,\quad 1\leqslant p<q\leqslant\infty. \tag{1.1}$$

Формула (1.1) называется неравенством разных метрик для тригонометрических полиномов. Это неравенство для $q=\infty$ доказал в 1933 году Д. Джексон [4], при $1 \leqslant p < q < \infty$ С. М. Никольский [5].

Для кратного тригонометрического полинома $T_{\bar n}$ в пространстве $L_p(\mathbb{T}^m)$ С. М. Никольским [5] доказано неравенство

$$\|T_{\bar n}\|_q \leqslant 3^m \prod_{j=1}^m n_j^{1/p-1/q} \|T_{\bar n}\|_p \tag{1.2}$$

для $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$.

Неравенствам разных метрик посвящено большое число исследований: Н. К. Бари (см. [6]), С. Б. Стечкин, М. К. Потапов, И. И. Ибрагимов, Дж. И. Мамедханов, А. П. Унинский, Б. И. Голубов, А. П. Терехин, М. Ф. Тиман, В. И. Иванов (см. [7]), В. В. Арестов (см. [8]), В. В. Арестов и М. В. Дейкалова (см. [9]), В. Н. Темляков (см. [10]), М. З. Берколайко, В. А. Родин (см. [11]), Е. С. Смаилов (см. [12]), Е. Д. Нурсултанов (см. [13]) и др. — см. библиографию в [14].

Исследования по этой теме велись в разных направлениях, в том числе неравенство Джексона — Никольского распространялось на другие функциональные пространства.

В случае $0 < p < q \leqslant \infty$ аналог неравенства (1.1) в пространстве L_p с весом доказан В. И. Ивановым [7]. В. В. Арестовым [8] дано простое доказательство неравенства (1.1) в пространстве L_p, основанное на идее С. Б. Стечкина (см. [6, с. 172]).

В [8] В. В. Арестовым неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов доказано и в случае $p = 0 < q < \infty$ с точной константой.

Неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов доказаны и в пространствах Лоренца.

Если $1 \leqslant p < q < \infty$, то $L_{q,\theta_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\theta_1}(\mathbb{T}^m)$ при $1 \leqslant \theta_1, \theta_2 < \infty$.

В 1984 году для тригонометрического полинома одной переменной T_n Л. А. Шерстнева [15] доказала

$$\|T_n\|_{q,\theta_2} \leqslant C n^{1/p-1/q} \|T_n\|_{p,\theta_1}, \tag{1.3}$$

если $0 < p < q < \infty$, $0 < \theta_1, \theta_2 < \infty$.

Здесь и в дальнейшем C — положительные числа, не зависящие от n. Запись $A\,(n) \asymp B\,(n)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$ и такие, что $C_1 A\,(n) \leq B\,(n) \leq C_2 A\,(n)$. Постоянные C разных формулах могут быть различными.

Отметим, что в 1976 году Н. В. Швелидзе [16] сформулировал неравенство (1.3) при условиях $1 < p < q < \infty$, $1 \leqslant \theta_1, \theta_2 < \infty$, $\theta_1/p \leqslant \theta_2/q$.

Известно, что если $1 \leqslant p = q < \infty$, то $L_{p,\theta_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\theta_1}(\mathbb{T}^m)$ при $1 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$.

В этом случае Л. А. Шерстнева [15] доказала точное по порядку неравенство

$$\|T_n\|_{p,\theta_2} \leqslant C(\log(n+1))^{1/\theta_2 - 1/\theta_1} \|T_n\|_{p,\theta_1}. \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем $\log y$ — логарифм с основанием 2 от числа y.

Многомерный вариант неравенства (1.3) и аналог (1.2) имеет вид

$$\|T_{\bar n}\|_{q,\theta_2} \leqslant C \prod_{j=1}^m n_j^{1/p-1/q} \|T_{\bar n}\|_{p,\theta_1}. \tag{1.5}$$

В работе автора (см. статью в Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2017, Т. 23, № 3, С. 3–21) доказан многомерный вариант неравенства (1.4)

$$\|T_{\bar n}\|_{p,\theta_2} \leqslant C\Big(\log \prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)^{1/\theta_2 - 1/\theta_1} \|T_{\bar n}\|_{p,\theta_1} \tag{1.6}$$

при $1 < p < \infty$, $1 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$ и показана точность по порядку в случае $n_1 = \ldots = n_m$.

З а м е ч а н и е 1. В неравенстве (1.6) зависимость константы C от параметров p, θ_1, θ_2, m неизвестна. Это отдельная сложная, интересная задача.

Для пространств Лебега и Лоренца фундаментальные функции $\varphi(t) = t^{1/p}$ и $\alpha_\varphi = \beta_\varphi = 2^{1/p}$.

Отметим, что пространства $L_{q,\theta_2}(\mathbb{T}^m), L_{p,\theta_1}(\mathbb{T}^m)$ при $p \neq q$ имеют разные фундаментальные функции $\varphi_{L_{p,\theta_1}}(t) = t^{1/p}$, $\varphi_{L_{q,\theta_2}}(t) = t^{1/q}$ и их индексы соответственно равны $2^{1/p}$, $2^{1/q}$.

В случае $p = q$ пространства $L_{p,\theta_2}(\mathbb{T}^m), L_{p,\theta_1}(\mathbb{T}^m)$ имеют одинаковые фундаментальные функции $\varphi_{L_{p,\theta_1}}(t) = \varphi_{L_{p,\theta_2}}(t) = t^{1/p}$ и их индексы соответственно равны $2^{1/p}$.

Для двух симметричных пространств $X(\varphi), Y(\psi)$ с различными индексами растяжения известно, что если $1 < \alpha_\psi \leqslant \beta_\psi < \alpha_\varphi \leqslant \beta_\varphi < 2$, то для любого тригонометрического полинома $T_{\bar{n}}$ выполняется неравенство

$$\|T_{\bar{n}}\|_Y \leqslant C \frac{\psi\big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}\big)}{\varphi\big(\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}\big)} \|T_{\bar{n}}\|_X, \tag{1.7}$$

точное по порядку (см. [17, лемма 6]).

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что из условия $\beta_\psi < \alpha_\varphi$ следует, что $Y(\psi) \subset X(\varphi)$. Поэтому в случае $Y(\psi) = L_q$ и $X(\varphi) = L_p$, $1 \leqslant p < q < \infty$, из (1.7) следует неравенство (1.5).

В связи с неравенством (1.6) возникает вопрос: каким будет аналог неравенства (1.6) для симметричных пространств $Y(\psi), X(\varphi)$ с одинаковыми фундаментальными функциями?

Отметим, что в этом случае неизвестно, как отличить два симметричных пространства. Поэтому мы рассмотрим некоторый класс пространств Лоренца с одинаковыми фундаментальными функциями.

Пусть функция ψ непрерывна, не убывает, вогнута на $[0,1]$, $\psi(0) = 0$ и $0 < \theta < \infty$. *Обобщенным пространством Лоренца* $L_{\psi,\theta}(\mathbb{T}^m)$ называется множество измеримых на $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$, имеющих 2π-период по каждой переменной $x_j, j = 1, \ldots, m$, функций $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_m)$, для которых

$$\|f\|_{\psi,\theta} = \bigg(\int\limits_0^1 f^{*^\theta}(t)\psi^\theta(t)\frac{dt}{t}\bigg)^{1/\theta} < \infty.$$

Отметим, что при $\psi(t) = t^{1/q}$ пространство $L_{\psi,\theta}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством $L_{q,\theta}(\mathbb{T}^m)$, $1 < q, \theta < \infty$ (см. разд. “Введение”).

Известно, что $L_{\psi,\theta_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{\psi,\theta_1}(\mathbb{T}^m)$ при $0 < \theta_2 < \theta_1 < \infty$ и фундаментальные функции этих пространств эквивалентны функции ψ. Значит, индексы тоже равны.

Л. А. Шерстнева [18] доказала для тригонометрического полинома одной переменной T_n точное по порядку неравенство

$$\|T_n\|_{\psi,\theta_2} \leqslant C(\ln(n+1))^{1/\theta_2 - 1/\theta_1}\|T_n\|_{\psi,\theta_1}, \quad 0 < \theta_2 < \theta_1 < \infty.$$

В данной статье это неравенство обобщим на пространства Лоренца с разными фундаментальными функцями, но равными индексами.

2. Основные результаты

2.1. Неравенство Джексона — Никольского для тригонометрических полиномов в обобщенном пространстве Лоренца

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $1 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$ *и функции* ψ_1, ψ_2 *удовлетворяют условиям* $\alpha_{\psi_1} = \alpha_{\psi_2}$, $\beta_{\psi_1} = \beta_{\psi_2}$ *и*

$$C_0 = \sup_{t\in(0,1]} \frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} < \infty.$$

Тогда $L_{\psi_1,\tau_1}(\mathbb{T}^m) \subset L_{\psi_2,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ *и* $\|f\|_{\psi_2,\tau_2} \leqslant C\|f\|_{\psi_1,\tau_1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in L_{\psi_1,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$. Положим $f^{**}(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f^*(t)dt$, $x \in (0,1]$. Известно, что f^{**} невозрастает (для краткости обозначаем $f^{**}\downarrow$) . Поэтому, учитывая, что $\dfrac{\psi_1(t)}{t}\downarrow$, имеем

$$\|f\|_{\psi_1,\tau_1}^{\tau_1} = \int_0^1 (f^{**}(t))^{\tau_1}\psi_1^{\tau_1}(t)\frac{dt}{t} \geqslant \int_0^x (f^{**}(t))^{\tau_1}\psi_1^{\tau_1}(t)\frac{dt}{t}$$

$$\geqslant (f^{**}(x))^{\tau_1}\int_0^x \psi_1^{\tau_1}(t)\frac{dt}{t} \geqslant (f^{**}(x))^{\tau_1}\Big(\frac{\psi_1(x)}{x}\Big)^{\tau_1}\int_0^x t^{\tau_1-1} = \frac{1}{\tau_1}(f^{**}(x))^{\tau_1}\psi_1^{\tau_1}(x).$$

Таким образом,

$$\|f\|_{\psi_1,\tau_1}^{\tau_1} \geqslant \frac{1}{\tau_1}(f^{**}(x))^{\tau_1}\psi_1^{\tau_1}(x), \quad x \in (0,1]. \tag{2.1}$$

Теперь, пользуясь неравенством (2.1), будем иметь

$$\|f\|_{\psi_2,\tau_2}^{\tau_2} = \int_0^1 (f^{**}(x)\psi_1(x))^{\tau_2-\tau_1}\Big(\frac{\psi_2(x)}{\psi_1(x)}\Big)^{\tau_2}(f^{**}(x))^{\tau_1}\,\psi_1^{\tau_1}(x)\frac{dx}{x}$$

$$\leqslant C_0^{\tau_2}\int_0^1 (f^{**}(x)\psi_1(x))^{\tau_2-\tau_1}(f^{**}(x))^{\tau_1}\psi_1^{\tau_1}(x)\frac{dx}{x}$$

$$\leqslant C_{\tau_1,\tau_2}\|f\|_{\psi_1,\tau_1}^{\tau_2-\tau_1}\int_0^1 (f^{**}(x))^{\tau_1}\psi_1^{\tau_1}(x)\frac{dx}{x} \leqslant C_{\tau_1,\tau_2}\|f\|_{\psi_1,\tau_1}^{\tau_2}.$$

Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. В случае $\psi_1(t) = \psi_2(t)$ лемму 1 доказал Р. Шарпли [19].

Теорема 1. *Пусть* $1 \leqslant q_1 < q_2 < \infty$, Φ *— функции* ψ_1, ψ_2 *такие, что*

$$\sup_{0<t\leqslant 1}\frac{\psi_2(t)}{\psi_1(t)} < \infty.$$

Тогда для любого тригонометрического полинома $T_{\overline{n}}$ *имеет место неравенство*

$$\|T_{\overline{n}}\|_{\psi_1,q_1} \leqslant C\left[\int_{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}^1 \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}\right]^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}}\|T_{\overline{n}}\|_{\psi_2,q_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пространство Лоренца $L_{\psi,q}(\mathbb{T}^m)$ является одним из примеров симметричного пространства, и его фундаментальная функция эквивалентна функции $\psi(t)$, $t \in (0,1]$. Следовательно, по [17, лемма 5] справедливо неравенство

$$\|T_{\overline{n}}\|_\infty = \max_{\overline{x}\in\mathbb{T}^m}|T_{\overline{n}}(\overline{x})| \leqslant C\frac{1}{\psi\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}\|T_{\overline{n}}\|_{\psi,q}. \tag{2.2}$$

Пусть $\nu_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m$, такие, что $2^{\nu_j - 1} \leqslant n_j < 2^{\nu_j}, j = 1, \dots, m$. Положим $V = \sum_{j=1}^{m} \nu_j$. Тогда по свойству интеграла и невозрастающей перестанановки функции имеем

$$\|T_{\overline{n}}\|_{\psi_1,q_1}^{q_1} = \int_0^1 (T_{\overline{n}}^*(t))^{q_1} \psi_1^{q_1}(t) \frac{dt}{t} = \int_{2^{-V}}^1 (T_{\overline{n}}^*(t))^{q_1} \psi_1^{q_1}(t) \frac{dt}{t} + \int_0^{2^{-V}} (T_{\overline{n}}^*(t))^{q_1} \psi_1^{q_1}(t) \frac{dt}{t} = I_1 + I_2. \quad (2.3)$$

Оценим I_1. Так как $\theta = q_2/q_1 > 1$, то, применяя неравенство Гёльдера, получим

$$I_1 = \int_{2^{-V}}^1 \left(T_{\overline{n}}^*(t)\right)^{q_1} \psi_1^{q_1}(t) \frac{dt}{t} = \int_{2^{-V}}^1 \left(T_{\overline{n}}^*(t)\psi_2(t)\right)^{q_1} \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{q_1} t^{-1/\theta} t^{-1/\theta'} dt$$

$$\leqslant \Big[\int_{2^{-V}}^1 \left(T_{\overline{n}}^*(t)\psi_2(t)\right)^{q_1\theta} \frac{dt}{t}\Big]^{1/\theta} \Big[\int_{2^{-V}}^1 \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{q_1\theta'} \frac{dt}{t}\Big]^{1/\theta'}$$

$$= \Big[\int_{2^{-V}}^1 \left(T_{\overline{n}}^*(t)\right)^{q_2} \psi_2^{q_2}(t) \frac{dt}{t}\Big]^{q_1/q_2} \Big[\int_{2^{-V}}^1 \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1}} \frac{dt}{t}\Big]^{1 - q_1/q_2}$$

$$\leqslant C \|T_{\overline{n}}\|_{\psi_2,q_2}^{q_1} \Big[\int_{2^{-V}}^1 \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1}} \frac{dt}{t}\Big]^{\frac{q_2 - q_1}{q_2}}, \quad (2.4)$$

где $\theta' = \dfrac{\theta}{\theta - 1} = \dfrac{q_2}{q_2 - q_1}$.

Оценим I_2. Пользуясь оценкой (2.2), [18, лемма 3] и учитывая, что $\prod_{j=1}^{m} n_j < \prod_{i=1}^{m} 2^{\nu_i} = 2^V$, получим

$$I_2 = \int_0^{2^{-V}} \left(T_n^*(t)\right)^{q_1} \psi_1^{q_1}(t) \frac{dt}{t} \leqslant C\Big(\frac{1}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)} \|T_{\overline{n}}\|_{\psi_2,q_2}\Big)^{q_1} \int_0^{2^{-V}} \psi_1^{q_1}(t) \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant C\Big(\frac{1}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)} \|T_{\overline{n}}\|_{\psi_2,q_2}\Big)^{q_1} \int_0^{\prod_{j=1}^m n_j^{-1}} \psi_1^{q_1}(t) \frac{dt}{t} \leqslant C \|T_{\overline{n}}\|_{\psi_2,q_2}^{q_1} \left(\frac{\psi_1\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}\right)^{q_1}.$$

Теперь в силу этого неравенства и (2.4) из (2.3) получим

$$\|T_{\overline{n}}\|_{\psi_1,q_1} \leqslant C \|T_{\overline{n}}\|_{\psi_2,q_2} \left\{ \left(\frac{\psi_1\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}\right)^{q_1} + \Big[\int_{2^{-V}}^1 \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1}} \frac{dt}{t}\Big]^{\frac{q_2 - q_1}{q_2}} \right\}^{1/q_1}. \quad (2.5)$$

По выбору чисел $\nu_j \in \mathbb{N}$: $2^{\nu_j - 1} \leqslant n_j, \prod_{j=1}^m 2^{\nu_j} \leqslant 2^m \prod_{j=1}^m n_j$. Поэтому $2^{-V} \geqslant 2^{-m} \prod_{j=1}^m n_j^{-1}$.

Так как функция $\psi_2(t)$ не убывает, а функция $\dfrac{\psi_1(t)}{t} \downarrow$, то $\psi_2(t) \leqslant \psi_2(\prod_{j=1}^m n_j^{-1})$ и $\psi_1(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}) / \prod_{j=1}^m n_j^{-1} \leqslant \dfrac{\psi_1(t)}{t}$ для чисел $t \in (0, \prod_{j=1}^m n_j^{-1}]$. Поэтому, учитывая, что $q_2 - q_1 > 0$, получим

$$\int_{2^{-m} \prod_{j=1}^m n_j^{-1}}^1 \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1}} \frac{dt}{t} \geqslant \int_{2^{-m} \prod_{j=1}^m n_j^{-1}}^{\prod_{j=1}^m n_j^{-1}} \Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1 q_2}{q_2 - q_1}} \frac{dt}{t}$$

$$\geqslant C\Big(\frac{1}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\int\limits_{2^{-m}\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}^{\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}\Big(\frac{\psi_1(t)}{t}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}t^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}$$

$$\geqslant C\Big(\frac{1}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\left(\frac{\psi_1\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}{\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\int\limits_{2^{-m}\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}^{\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}t^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}-1}dt$$

$$\geqslant C\left(\frac{\psi_1\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m n_j^{-1}\big)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}. \tag{2.6}$$

Теперь из неравенств (2.5) и (2.6) следует, что

$$\big\|T_{\overline{n}}\big\|_{\psi_1,q_1}\leqslant C\big\|T_{\overline{n}}\big\|_{\psi_2,q_2}\left[\int\limits_{2^{-m}\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}^{1}\Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}\right]^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}}. \tag{2.7}$$

Так как функции $t/\psi_2(t)$, $\psi_1(t)$ неубывают на $(0,1]$ и $q_2-q_1>0$, то имеем

$$\int\limits_{2^{-m}\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}^{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}\Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}=\int\limits_{2^{-m}\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}^{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}\Big(\psi_1(t)\frac{t}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}t^{-\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}$$

$$\leqslant\left[\psi_1\Big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\Big)\frac{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)}\right]^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\int\limits_{2^{-m}\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}^{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}t^{-\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}\left[\Big(2^m\prod_{j=1}^m n_j\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}-\Big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\right]\left[\psi_1\Big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\Big)\frac{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)}\right]^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}$$

$$\leqslant\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}\big(2^{m\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}-1\big)\left(\frac{\psi_1\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}$$

и

$$\int\limits_{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}^{1}\Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}\geqslant\int\limits_{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}^{2\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}\Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}=\int\limits_{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}^{2\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}\Big(\psi_1(t)\frac{t}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}t^{-\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}$$

$$\geqslant\left[\psi_1\Big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\Big)\frac{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)}\right]^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\int\limits_{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}^{2\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}t^{-\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}\big(1-2^{-\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\big)\left(\frac{\psi_1\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)}{\psi_2\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}.$$

Из этих неравенств вытекает оценка

$$\int\limits_{2^{-m}\prod_{j=1}^m n_j^{-1}}^{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}\Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}\leqslant C\int\limits_{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}^{1}\Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}.$$

Поэтому из неравенства (2.7) следует утверждение теоремы. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 4. Автору неизвестна точность неравенства в теореме 1.

Следствие 1. *Если Φ — функция ψ удовлетворяет условиям $1 < \alpha_\psi \leqslant \beta_\psi \leqslant 2$ и $1 \leqslant q_1 < q_2 < \infty$, то для любого тригонометрического полинома $T_{\overline{n}}$ имеет место неравенство*

$$\left\|T_n\right\|_{\psi,q_1} \leqslant C\Big(\log\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)^{1/q_1-1/q_2}\left\|T_{\overline{n}}\right\|_{\psi,q_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\psi_1(t) = \psi_2(t) = \psi(t)$ по теореме 1 имеем

$$\left\|T_n\right\|_{\psi,q_1} \leqslant C\left\|T_n\right\|_{\psi,q_2}\Bigg(\int\limits_{\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}}^{1}\frac{dt}{t}\Bigg)^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}} \leqslant C\left\|T_n\right\|_{\psi,q_2}\Big(\log\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)^{1/q_1-1/q_2}.$$

Следствие доказано.

Теперь рассмотрим неравенство разных метрик в пространствах с разными фундаментальными функциями $\psi_1,\ \psi_2$, но с равными индексами $\alpha_{\psi_1} = \alpha_{\psi_2}$. Примерами таких пространств являются пространства Лоренца — Зигмунда и Лоренца — Караматы.

Пусть $\beta\in\mathbb{R}$, $1<p<\infty$, $0<q<\infty$. *Пространством Лоренца — Зигмунда* $L_{p,\theta}(\log L)^{\beta}(\mathbb{T}^m)$ называется множество функций f, для которых (см. [20])

$$\|f\|_{p,q,\beta} = \Bigg(\int\limits_{0}^{1}(f^*)^q(t)t^{q/p-1}(1-\log t)^{q\beta}dt\Bigg)^{1/q} < \infty.$$

Фундаментальная функция пространства Лоренца — Зигмунда эквивалентна функции $t^{1/p}(1-\log t)^{\beta},\ t\in(0,1]$.

Следствие 2 (неравенство разных метрик в пространстве Лоренца — Зигмунда). *Пусть* $\beta_1>\beta_2, \beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ *и* $1<p<\infty, 1\leqslant q_1<q_2<\infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома $T_{\overline{n}}$ справедливо неравенство*

$$\left\|T_{\overline{n}}\right\|_{p,q_1,\beta_1} \leqslant C\Big(\log\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)^{\beta_1-\beta_2+1/q_1-1/q_2}\left\|T_{\overline{n}}\right\|_{p,q_2,\beta_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\psi_1(t) = \Big(\log\dfrac{2}{t}\Big)^{\beta_1}, \psi_2(t) = \Big(\log\dfrac{2}{t}\Big)^{\beta_2}$ для $t\in(0,1]$. Так как $\beta_1>\beta_2$, то $(\beta_1-\beta_2)\dfrac{q_2q_1}{q_2-q_1}+1>0$. Поэтому

$$\Bigg[\int\limits_{\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}}^{1}\Big(\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}\Big)^{\frac{q_2-q_1}{q_2q_1}}\frac{dt}{t}\Bigg]^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}} = \Bigg[\int\limits_{\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)^{-1}}^{1}\Big(\log\frac{2}{t}\Big)^{(\beta_1-\beta_2)\frac{q_2q_1}{q_2-q_1}}\frac{dt}{t}\Bigg]^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}}$$

$$= \Bigg[\frac{2}{(\beta_1-\beta_2)\dfrac{q_2q_1}{q_2-q_1}+1}\Big(\log\Big(2\prod_{j=1}^{m}n_j\Big)\Big)^{(\beta_1-\beta_2)\frac{q_2q_1}{q_2-q_1}+1}-1\Bigg]^{1/q_1-1/q_2}$$

$$\leqslant C\Big(\log\prod_{j=1}^{m}(n_j+1)\Big)^{\beta_1-\beta_2+1/q_1-1/q_2}.$$

Пользуясь этой оценкой из теоремы 1, получим утверждение следствия 2. □

З а м е ч а н и е 5. При $n_1=\ldots=n_m$ следствие 2 доказано в [14].

2.2. Неравенство разных метрик в пространстве Лоренца — Караматы

В этом разделе докажем неравенство разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца — Караматы. Напомним некоторые необходимые определения.

О п р е д е л е н и е. Положительная и измеримая по Лебегу функция $b(t)$ называется слабо меняющейся (slowly varying) на $[1, +\infty)$ в смысле Караматы, если для любого $\varepsilon > 0$ функция $t^{\varepsilon} b(t)$ почти возрастает на $[1, \infty)$ и функция $t^{-\varepsilon} b(t)$ почти убывает на $[1, \infty)$ (см. [21]). Множество таких функций обозначается $SV[1, \infty)$.

П р и м е р 1 (см. [22]).

1. $l_1(t) = 1 + \log t \in SV[1, \infty)$, $\ l_2(t) = 1 + \log l_1(t)$, $\ l_3(t) = 1 + \log l_2(t)$.
2. $l_i(t) = 1 + l_{i-1}(t) \in SV[1, \infty)$, $\ i = 2, 3, \dots s$.

Для заданной слабо меняющейся функции $b(t)$ на $[1, \infty)$, через γ_b обозначается положительная функция определенная по формуле $\gamma_b(t) = b\Big(\max\Big\{t, \dfrac{1}{t}\Big\}\Big)$ для всех $t > 0$ т. е. $\gamma_b(t) = b(t)$, если $t \geqslant 1$ и $\gamma_b(t) = b\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$, если $t \in (0, 1)$.

Множество всех положительных, измеримых по Лебегу на $[1, \infty)$ функций $b(t) = (1+\log\, t)^{\alpha}$ или $b(t)$, для которых $(\log\, 2t)^{\varepsilon} b(t) \uparrow$ и $(\log\, 2t)^{-\varepsilon} b(t) \downarrow$ на $[1, \infty)$ для любого числа $\varepsilon > 0$, обозначим $SVL[1, \infty)$. Нетрудно убедиться, что $SVL[1, \infty) \subset SV[1, \infty)$.

П р и м е р 2. Функции $l_2(t) = 1 + \log\, l_1(t) \in SVL[1, \infty)$ и $l_i(t) \in SVL[1, \infty)$.

Если $\psi(t) = t^{1/p} \gamma_b(t)$ и $b \in SV[1, \infty)$, то $L_{\psi,\tau}(\mathbb{T})^m$ называется *пространством Лоренца — Караматы* (см. [22]) и обозначается $L_{p,\tau,b}(\mathbb{T}^m)$, и

$$\|f\|_{\psi,\tau} = \|f\|_{p,\tau,b} = \bigg(\int\limits_0^1 f^{*^{\tau}}(t) (t^{1/p} \gamma_b(t))^{\tau} \frac{dt}{t}\bigg)^{1/\tau}.$$

В [22, теорема 3.2] доказано, что если $0 < p < \infty$, $0 < q_1 \leqslant q_2 < \infty$ и $b_1, b_2 \in SV[1, \infty)$,

$$\sup_{0<t\leqslant 1} \frac{b_2\Big(\dfrac{1}{t}\Big)}{b_1\Big(\dfrac{1}{t}\Big)} < \infty, \tag{2.8}$$

то $L_{p,q_1,b_1}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,q_2,b_2}(\mathbb{T}^m)$.

Докажем обобщение неравенства (1.6) на пространство Лоренца — Караматы.

Теорема 2. *Пусть функции* $b_1, b_2 \in SV[1, \infty)$, *выполнено условие* (2.8) *и* $\dfrac{b_1}{b_2} \in SVL[1, \infty)$, $1 < p < \infty, 1 \leqslant q_1 < q_2 < \infty$. *Тогда для любого тригонометрического полинома* $T_{\overline{n}}$ *имеет место неравенство*

$$\big\|T_{\overline{n}}\big\|_{p,q_1,b_1} \leqslant C \frac{\gamma_{b_1}\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)}{\gamma_{b_2}\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)} \Big(\log \prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)^{1/q_1 - 1/q_2} \big\|T_{\overline{n}}\big\|_{p,q_2,b_2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\dfrac{b_1}{b_2} \in SVL[1, \infty)$, то

$$\frac{\gamma_{b_1}(t)}{\gamma_{b_2}(t)} = \frac{b_1\Big(\dfrac{1}{t}\Big)}{b_2\Big(\dfrac{1}{t}\Big)} = \frac{b_1\Big(\dfrac{1}{t}\Big)}{b_2\Big(\dfrac{1}{t}\Big)} \Big(\log\frac{2}{t}\Big)^{\varepsilon} \frac{1}{\Big(\log\dfrac{2}{t}\Big)^{\varepsilon}} \leqslant C \frac{b_1\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)\big)}{b_2\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)\big)} \Big(\log\Big(2\prod_{j=1}^m n_j\Big)\Big)^{\varepsilon} \frac{1}{\Big(\log\dfrac{2}{t}\Big)^{\varepsilon}}$$

$$= C \frac{\gamma_{b_1}\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)}{\gamma_{b_2}\big(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\big)} \Big(\log\Big(2\prod_{j=1}^m n_j\Big)\Big)^{\varepsilon} \frac{1}{\Big(\log\dfrac{2}{t}\Big)^{\varepsilon}}$$

для $t \in \left[\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}, 1\right]$, $\forall \varepsilon > 0$. Поэтому, используя это неравенство при $\varepsilon = \dfrac{q_2-q_1}{2q_1q_2}$, получим

$$\left[\int\limits_{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}^{1} \left(\frac{\gamma_{b_1}(t)}{\gamma_{b_2}(t)}\right)^{\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}}$$

$$\leqslant C\Big(\log\Big(2\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)\Big)^{\frac{q_2-q_1}{2q_1q_2}} \frac{\gamma_{b_1}\left(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\right)}{\gamma_{b_2}\Big(\prod\limits_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\Big)} \left[\int\limits_{\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}}^{1} \Big(\log\frac{2}{t}\Big)^{-1/2} \frac{dt}{t}\right]^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}}$$

$$= C\Big(\log\Big(2\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)\Big)^{\frac{q_2-q_1}{2q_1q_2}} \frac{\gamma_{b_1}\left(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\right)}{\gamma_{b_2}\left(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\right)} \left[\frac{1}{2}\Big(\log\Big(2\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\Big)\Big)^{1/2} - \frac{1}{2}\right]^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}}$$

$$\leqslant C \frac{\gamma_{b_1}\left(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\right)}{\gamma_{b_2}\left(\prod_{j=1}^m (n_j+1)^{-1}\right)} \Big(\log\prod_{j=1}^m (n_j+1)\Big)^{1/q_1-1/q_2}.$$

Теперь, пользуясь теоремой 1, получим утверждение теоремы 2. □

Докажем точность по порядку неравенства в теореме 2 в случае $n_1 = \ldots = n_m = n$.

Следствие 3. *Для любого числа $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение*

$$\sup_{T_n\neq 0} \frac{\|T_n\|_{p,\tau_1,b_1}}{\|T_n\|_{p,\tau_2,b_2}} \asymp \frac{\gamma_{b_1}\left(\frac{1}{n}\right)}{\gamma_{b_2}\left(\frac{1}{n}\right)} (\log(n+1))^{1/\tau_1-1/\tau_2}$$

при $1 \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценка сверху

$$\sup_{T_n\neq 0} \frac{\|T_n\|_{p,\tau_1,b_1}}{\|T_n\|_{p,\tau_2,b_2}} \leqslant C \frac{\gamma_{b_1}\left(\frac{1}{n}\right)}{\gamma_{b_2}\left(\frac{1}{n}\right)} (\log(n+1))^{1/\tau_1-1/\tau_2}$$

следует из теоремы 2.

Докажем противоположное неравенство. Для этого сначала рассмотрим полином одной переменной

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-1/p}} \cos(2\pi kx), \quad x \in [0,1], \quad 1 < p < \infty.$$

Фундаментальная функция пространства Лоренца — Карамата эквивалентна функции

$$t^{1/p}\gamma_b(t), \quad t \in (0,1], \quad \text{и} \quad a_k = \frac{1}{k^{1-1/p}} \downarrow 0 \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Так как функция $b \in SVL[1,\infty)$, то нетрудно убедиться, что

$$\Big(\log\Big(\frac{1}{t}\Big)/\log\Big(\frac{2}{t}\Big)\Big)^{\varepsilon} \leqslant \frac{\gamma_b(2t)}{\gamma_b(t)} \leqslant \Big(\log\Big(\frac{2}{t}\Big)/\log\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)^{\varepsilon}, \quad t \in (0,1], \quad \varepsilon > 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{(2t)^{1/p}\gamma_b(2t)}{t^{1/p}\gamma_b(t)} = 2^{1/p} < 2$. Таким образом, условие [23, теорема 1] выполняется. Поэтому по [23, теорема 1] справедливо соотношение

$$\|T_n\|_{p,\tau,b} \asymp \Big(\sum_{k=1}^n k^{-\tau(1-1/p)}\, k^{(1-1/p)\tau} \gamma_b\Big(\frac{1}{k}\Big)\frac{1}{k}\Big)^{1/\tau} \tag{2.9}$$

для $1 < p < \infty, 1 < \tau < \infty, b \in SVL[1,\infty)$. Так как $b \in SVL[1,\infty)$, то

$$(\log 2k)^{\varepsilon}\,\gamma_b\Big(\frac{1}{k}\Big) \leqslant (\log 2n)^{\varepsilon}\,\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

для $0 < \varepsilon < 1/\tau, k = 1,2,\ldots,n$. Поэтому из соотношения (2.9) следует, что

$$\|T_n\|_{p,\tau,b} \leqslant C\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\gamma_b^{\tau}\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big)^{1/\tau} \leqslant C(\log 2n)^{\varepsilon}\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(\log 2k)^{-\varepsilon\tau}\Big)^{1/\tau}$$

$$\leqslant C(\log 2n)^{\varepsilon}\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big(\int_1^n(\log 2t)^{-\varepsilon\tau}\frac{dt}{t}\Big)^{1/\tau} \leqslant C\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)(\log 2n)^{1/\tau} \leqslant C(\log(n+1))^{1/\tau}\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Таким образом,

$$\|T_n\|_{p,\tau,b} \leqslant C\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)(\log(n+1))^{1/\tau}. \tag{2.10}$$

Докажем противоположное неравенство. Так как $b \in SVL[1,\infty)$, то $(\log 2n)^{-\varepsilon}b(n) \leqslant (\log 2k)^{-\varepsilon}b(k)$ для $0 < \varepsilon < 1/\tau, k = 1,2,\ldots,n$. Поэтому

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\,\gamma_b^{\tau}\Big(\frac{1}{k}\Big)\Big)^{1/\tau} \geqslant (\log 2n)^{-\varepsilon}\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{(\log 2k)^{\varepsilon\tau}}{k}\Big)^{1/\tau}$$

$$\geqslant (\log 2n)^{-\varepsilon}\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)(\log(n+1))^{\varepsilon+1/\tau} \geqslant C\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)(\log(n+1))^{1/\tau}.$$

Следовательно, из соотношения (2.9) получим

$$\|T_n\|_{p,\tau,b} \geqslant C\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)(\log(n+1))^{1/\tau}. \tag{2.11}$$

Таким образом, для заданного полинома T_n справедливо соотношение (см. (2.10), (2.11))

$$\|T_n\|_{p,\tau,b} \asymp \gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big)(\log(n+1))^{1/\tau}, \tag{2.12}$$

для $1 < p < \infty, 1 < \tau < \infty$.

Теперь в многомерном случае при $n_1 = \ldots = n_m = n$ рассмотрим полином

$$T_n(2\pi\overline{x}) = \prod_{j=2}^{m}e^{i2\pi n x_j}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1-1/p}}\cos 2\pi k x_1, \quad \overline{x} \in [0,1]^m.$$

Тогда в силу оценки (2.12) имеем

$$\|T_n\|_{p,\tau,b} = \Big\|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1-1/p}}\cos 2\pi x_1\Big\|_{p,\tau,b} \asymp C(\log(n+1))^{1/\tau}\gamma_b\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Далее, пользуясь этим соотношением, нетрудно доказать, что

$$\sup_{T_n\neq 0}\frac{\|T_n\|_{p,\tau_1,b}}{\|T_n\|_{p,\tau_2,b}} \geqslant C\frac{\gamma_{b_1}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)}{\gamma_{b_2}\Big(\dfrac{1}{n}\Big)}\Big(\log(n+1)\Big)^{1/\tau_1-1/\tau_2}.$$

Следствие доказано. □

Отметим, что в случае $\gamma_{b_1}(t) = \gamma_{b_2}(t) = 1,\ t \in (0,1]$, следствие 3 доказано автором раньше (см. статью в Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 2017, Т. 23, № 3, С. 3–21).

В частности, из следствия 3 следует точность по порядку неравенства в следствии 2.

В заключение отметим, что неравенство разных метрик известно не только по тригонометрической системе, но и по другим ортонормированным системам, в частности по системам Уолша, Хаара. А.А. Комиссаров [24] доказал неравенство разных метрик в пространстве L_p для полиномов по некоторым ортонормированным системам. В [25] даны общие методы доказательства неравенства Джексона — Никольского в пространстве Лоренца, а в [26] — в пространстве Лебега.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.** Интерполяция линейных операторов. Москва: Наука, 1978. 400 с.
2. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. Москва: Мир, 1974. 332 с.
3. **Семенов Е.М.** Интерполяция линейных операторов в симметричных пространствах // Докл. АН. 1965. Т. 164, №4. С. 746–749.
4. **Jackson D.** Certain problems of closest approximation // Bull. Amer. Math. Soc. 1933. Vol. 39, no. 12. P. 889–906. doi: 10.1090/S0002-9904-1933-05759-2 .
5. **Никольский С.М.** Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 244–278.
6. **Бари Н.К.** Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова // Изв. АН. Сер. математическая. 1954. Т. 18, №2. С. 159–176.
7. **Иванов В.И.** Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных в разных метриках // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 489–498.
8. **Арестов В.В.** О неравенстве разных метрик для тригонометрических полиномов // Мат. заметки. 1980. Т. 27, № 4. С. 539–547.
9. **Arestov V.V., Deikalova M.V.** Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. Vol. 284, suppl. 1. P. 9–23. doi: 10.1134/S0081543814020023 .
10. **Темляков В.Н.** Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. МИАН. 1986. Т. 178. С. 1–112.
11. **Родин В.А.** Неравенства Джексона и Никольского для тригонометрических полиномов в симметричном пространстве // Тр. VII зимней школы Дрогобыч (1974). Москва, 1976. С. 133–140.
12. **Смаилов Е.С.** О влиянии геометрических свойств спектра многочлена на неравенства разных метрик С. М. Никольского // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1158–1163.
13. **Нурсултанов Е.Д.** Неравенства разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 1–18.
14. **Gogatishvili A., Opic B., Tikhonov S., Trebels W.** Ulyanov-type inequalities between Lorentz–Zygmund spaces // J. Fourier Anal. Appl. 2014. Vol. 20, no. 5. P. 1020–1049. doi: 10.1007/s00041-014-9343-4 .
15. **Шерстнева Л.А.** Неравенства Никольского для тригонометрических полиномов в пространствах Лоренца // Вест. МГУ. 1984. № 4. С. 75–79.
16. **Швелидзе Н.В.** О теоремах вложения в некоторых функциональных пространствах // Сообщения АН Груз. ССР. 1976. Т. 83, № 2. С. 290–292.
17. **Акишев Г.** О порядках M-членных приближений классов функций симметричного пространства // Мат. журн. 2014. Т. 14, № 4. С. 46–71.
18. **Шерстнева Л.А.** О свойствах наилучших приближений Лоренца и некоторые теоремы вложения // Изв. вузов. Математика. 1987. Т. 10. С. 48–58.
19. **Sharpley R.** Space $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation // J. Func. Anal. 1972. Vol. 11, no. 4. P. 479–513. doi: 10.1016/0022-1236(72)90068-7 .
20. **Bennet C., Rudnik K.** On Lorentz–Zygmund spaces // Disser. Math. Vol. 175. Warszawa, 1979. 66 p. ISBN: 8301011114 .
21. **Edmunds D.E., Evans W.D.** Hardy operators, function spaces and embedding. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. 328 p.
22. **Neves J.S.** Lorentz–Karamata spaces, Bessel and Riesz potential and embeddings // Disser. Math. Vol. 405. 2002. 46 p. doi: 10.4064/dm405-0-1 .
23. **Родин В.А.** Теорема Харди–Литтлвуда для косинус-ряда в симметричном пространстве // Мат. заметки. 1976. Т. 20, вып. 2. С. 241–246.
24. **Комиссаров А.А.** О некоторых свойствах функциональных систем // Деп. ВИНИТИ. № 5827–83Деп. Москва, 1983. 28 с.

25. **Ditzian Z., Prymak A.** Nikol'skii inequalities for Lorentz spaces // Rocky Mountain J. Math. 2010. Vol. 40, no. 1. P. 209–223.
26. **Сабзиев Н.М.** Некоторые экстремальные свойства функции из класса L_p // Деп. ВИНИТИ. № 5252–82Деп. Баку, 1982. 12 с.

Поступила 29.08.2018
После доработки 23.11.2018
Принята к публикации 26.11.2018

Акишев Габдолла
д-р физ.-мат. наук, профессор
Евразийский Национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Астана;
Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург
e-mail: akishev_g@mail.ru

REFERENCES

1. Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M. *Interpolation of linear operators.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1982, Ser. Translations of Mathematical Monographs, vol. 54, 375 p. Original Russian text published in Krein S.G., Petunin Yu.I., Semenov E.M., *Interpolyatsiya lineinykh operatorov*, Moscow: Nauka Publ., 1978, 400 p.
2. Stein E.M. and Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh.* Moscow, Mir Publ., 1974, 332 p.
3. Semenov E.M. Interpolation of linear operators in symmetric spaces. *Sov. Math., Dokl.*, 1965, vol. 6, pp. 1294–1298.
4. Jackson D. Certain problems of closest approximation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1933, vol. 39, no. 12, pp. 889–906. doi: 10.1090/S0002-9904-1933-05759-2 .
5. Nikol'skii S.M. Inequalities for entire functions of finite degree and their application to the theory of differentiable functions of several variables. In: Azarin V.S. et al (eds.), *Thirteen papers on functions of real and complex variables.* Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1969, pp. 1–38, ISBN: 978-1-4704-3291-1 .
6. Bari N.K. Generalization of inequalities of S. N. Bernstein and A. A. Markov. *Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat.*, 1954, vol. 18, no. 2, pp. 159–176 (in Russian).
7. Ivanov V.I. Certain inequalities in various metrics for trigonometric polynomials and their derivatives. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 4, pp. 880–885. doi: 10.1007/BF01153038 .
8. Arestov V.V. Inequality of different metrics for trigonometric polynomials. *Math. Notes*, 1980, vol. 27, no. 4, pp. 265–269. doi: 10.1007/BF01140526 .
9. Arestov V.V., Deikalova M.V. Nikol'skii inequality for algebraic polynomials on a multidimensional Euclidean sphere. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2014, vol. 284, suppl. 1, pp. 9–23. doi: 10.1134/S0081543814020023 .
10. Temlyakov V.N. Approximation of functions with a bounded mixed derivative. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1989, vol. 178, pp. 1–121.
11. Rodin V.A. Jackson and Nikol'skii inequalities for trigonometric polynomials in a symmetric space. *Proc. Seventh Winter School "Mathematical Programming and Related Questions", Drogobych, 1974*, Vol. 1: Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Central. Ekonom.-Mat. Inst. Akad. Nauk SSSR, 1976, pp. 133–140 (in Russian).
12. Smailov E.S. On the effect of the geometric properties of the spectrum of a polynomial on S. M. Nikol'skii inequalities of different metrics. *Siberian Math. J.*, 1998, vol. 39, no. 5, pp. 1000–1006. doi: 10.1007/BF02672923 .
13. Nursultanov E.D. Nikol'skii inequality for different metrics and properties of the sequence of norms of the fourier sums of a function in the Lorentz space. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2006, vol. 255, pp. 185–202. doi: 10.1134/S0081543806040158 .
14. Gogatishvili A., Opic B., Tikhonov S., Trebels W. Ulyanov-type inequalities between Lorentz–Zygmund spaces. *J. Fourier Anal. Appl.*, 2014, vol. 20, no. 5, pp. 1020–1049. doi: 10.1007/s00041-014-9343-4 .
15. Sherstneva L.A. Nikol'skij inequalities for trigonometric polynomials in Lorentz spaces. *Mosc. Univ. Math. Bull.*, 1984, vol. 39, no. 4, pp. 75–81.

16. Shvelidze N.V. On imbedding theorems in some functional spaces. *Bull. Acad. Sci. Georgian SSR*, 1976, vol. 83, no. 2, pp. 290–292 (in Russian).
17. Akishev G. On the orders of $M-$terms approximations of classes of functions of the symmetrical space. *Mat. Zh.*, 2014, vol. 14, no. 4, pp. 46–71 (in Russian).
18. Sherstneva L.A. On the properties of best Lorentz approximations and certain embedding theorems. *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1987, vol. 31, no. 10, pp. 62–73.
19. Sharpley R. Space $\Lambda_\alpha(X)$ and interpolation. *J. Func. Anal.*, 1972, vol. 11, no. 4, pp. 479–513. doi: 10.1016/0022-1236(72)90068-7 .
20. Bennet C., Rudnik K. *On Lorentz–Zygmund spaces.* Disser. Math., vol. 175, Warszawa, 1979, 66 p. ISBN: 8301011114 .
21. Edmunds D.E., Evans W.D. *Hardy operators, function spaces and embedding.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, 328 p. ISBN: 3-540-21972-2/hbk .
22. Neves J.S. Lorentz–Karamata spaces, Bessel and Riesz potential and embeddings. *Disser. Math.*, 2002, vol. 405, pp. 1–46. doi: 10.4064/dm405-0-1 .
23. Rodin V.A. The Hardy–Littlewood theorem for the cosine series in a symmetric space. *Math. Notes*, 1976, vol. 20, no. 2, pp. 693–696. doi: 10.1007/BF01155876 .
24. Komissarov A.A. *O nekotorykh svoistvakh funktsional'nykh sistem* [On some properties of functional systems]. Available from VINITI, no. 5827-83, Moscow, 1983, 28 p.
25. Ditzian Z., Prymak A. Nikol'skii inequalities for Lorentz spaces. *Rocky Mountain Jour. Math.*, 2010, vol. 40, no. 1, pp. 209–223. DOI: 10.1216/RMJ-2010-40-1-209 .
26. Sabziev N.M. *Nekotorye ekstremal'nye svoistva funktsii iz klassa* L_p (Some extremal properties of a function from the class L_p). Available from VINITI, no. 5252-82, Baku, 1982, 12 p.

Received August 29, 2018
Revised November 23, 2018
Accepted November 26, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Gabdolla Akishev, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., L. N. Gumilyov Eurasian National University, 100008, Astana , Republic Kazakhstan; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: akishev_g@mail.ru .