ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.518+517.983

НАИЛУЧШЕЕ РАВНОМЕРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_2 ОПЕРАТОРАМИ[1]

В. В. Арестов

Дано решение задачи о наилучшем равномерном приближении на числовой оси оператора дифференцирования первого порядка на классе функций с ограниченной второй производной линейными ограниченными в пространстве L_2 операторами. Это один из немногих случаев точного решения задачи приближения оператора дифференцирования в одном пространстве аппроксимирующими операторами, ограниченными в другом пространстве. Получено родственное точное неравенство между равномерной нормой производной функции, вариацией преобразования Фурье функции и L_∞-нормой ее второй производной, которое можно рассматривать как неклассический вариант неравенства Адамара — Колмогорова.

Ключевые слова: задача Стечкина, оператор дифференцирования, неравенство Адамара — Колмогорова.

V. V. Arestov. Best uniform approximation of the differentiation operator by operators bounded in the space L_2.

We give a solution of the problem on the best uniform approximation on the numerical axis of the first-order differentiation operator on the class of functions with bounded second derivative by linear operators bounded in the space L_2. This is one of the few cases of the exact solution of the problem on the approximation of the differentiation operator in some space with the use of approximating operators that are bounded in another space. We obtain a related exact inequality between the uniform norm of the derivative of a function, the variation of the Fourier transform of the function, and the L_∞-norm of its second derivative. This inequality can be regarded as a nonclassical variant of the Hadamard–Kolmogorov inequality.

Keywords: Stechkin problem, differentiation operator, Hadamard–Kolmogorov inequality.

MSC: 26D10, 47A58

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-34-56

1. Обозначения. Окружение. Постановка задачи

В работе 1967 года С. Б. Стечкин [1] сформулировал задачу о наилучшем приближении линейного неограниченного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства и получил в ней принципиальные результаты. В последующем этой задаче было посвящено большое число исследований (см., в частности, [2–10] и приведенную там библиографию). Наиболее полно эта тематика развита для операторов дифференцирования в пространствах Лебега $L_\gamma = L_\gamma(\mathbb{I})$ на числовой оси $\mathbb{I} = (-\infty, \infty)$ и полуоси $\mathbb{I} = [0, \infty)$ (см., в частности, [2; 3; 7; 11–13] и приведенную там библиографию). В данной работе будет рассмотрен конкретный вариант такой задачи на оси. Прежде чем описать этот вариант и сформулировать полученный результат, приведем нужную для этого информацию, содержащуюся в нескольких статьях. Нам удобно часть этой информации привести в довольно общей ситуации.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

1.1. Обозначения

В данной статье используются стандартные обозначения классических пространств измеримых (или даже непрерывных) комплекснозначных функций. Напомним обозначения этих пространств и некоторые их свойства для числовой оси $(-\infty,\infty)$, хотя использоваться они будут иногда и для полуоси $[0,\infty)$. Итак, пусть $L_\gamma = L_\gamma(-\infty,\infty)$, при $1 \le \gamma < \infty$ есть пространство Лебега измеримых на числовой оси $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ функций f, у которых функция $|f|^\gamma$ суммируема на оси; пространство L_γ наделено нормой

$$\|f\|_\gamma = \|f\|_{L_\gamma} = \left(\int |f(t)|^\gamma dt\right)^{1/\gamma};$$

здесь и ниже в интегралах по оси множество интегрирования не указано. Пространство $L_\infty = L_\infty(-\infty,\infty)$ состоит из измеримых, существенно ограниченных функций на оси, наделено нормой $\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}\{|f(t)|\colon t \in (-\infty,\infty)\}$. Пространство $L_\infty = L_\infty(-\infty,\infty)$ содержит пространство $C = C(-\infty,\infty)$ непрерывных, ограниченных функций на оси, наделенное нормой $\|f\|_C = \sup\{|f(t)|\colon t \in (-\infty,\infty)\}$. В свою очередь, $C = C(-\infty,\infty)$ содержит пространство $C_0 = C_0(-\infty,\infty)$ функций, имеющих нулевой предел на бесконечности. В дальнейшем в некоторых ситуациях под L_∞ будет пониматься именно пространство $C = C(-\infty,\infty)$ или даже пространство $C_0 = C_0(-\infty,\infty)$; эти ситуации будут оговариваться особо. Обозначим через V пространство (комплексных) ограниченных борелевских мер на $(-\infty,\infty)$. Это пространство будем отождествлять с множеством (комплексных) функций μ ограниченной вариации на $(-\infty,\infty)$, значения вещественной и мнимой частей которых в точках разрыва заключены между пределами справа и слева. Норма в пространстве V есть полная вариация $\bigvee \mu = \bigvee_{-\infty}^{\infty} \mu$ меры (функции) $\mu \in V$.

Все эти пространства функций и их нормы инвариантны относительно группы сдвигов $\{\tau_h,\ h \in \mathbb{R}\}$, определенных формулой $(\tau_h f)(t) = f(t-h)$, $t \in \mathbb{R}$, и родственного семейства операторов $\{\sigma_h,\ h \in \mathbb{R}\}$, заданных формулой $(\sigma_h f)(t) = f(h-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Отметим, что операторы этих двух семейств связаны соотношением $\sigma_h = \tau_h\sigma_0$, где σ_0 — оператор смены знака аргумента функции: $(\sigma_0 f)(t) = f(-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Для функции $f \in L_1$ преобразование Фурье $\widehat{f}$ и обратное преобразование Фурье $\widecheck{f}$ определим формулами (см., например, [14])

$$\widehat{f}\,(t) = \int e^{-2\pi t\eta i} f(\eta)\,d\eta; \quad \widecheck{f}\,(t) = \int e^{2\pi t\eta i} f(\eta)\,d\eta.$$

Пусть $\mathscr{S}$ есть (топологическое векторное) пространство быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, а $\mathscr{S}'$ — соответствующее двойственное пространство обобщенных функций (см., например, [14]). Значение функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ на функции $\phi \in \mathscr{S}$ будем обозначать через $\langle\theta,\phi\rangle$. Пространство $\mathscr{S}'$ содержит множество $\mathscr{L} = \mathscr{L}(-\infty,\infty)$ функций f, измеримых, локально суммируемых на вещественной оси и растущих на бесконечности не быстрее некоторой степени $|t|$, а точнее, удовлетворяющих условию $\int (1+|t|)^\mu |f(t)|dt < \infty$, $\mu = \mu(f) \le 0$. Функции $f \in \mathscr{L}$ сопоставляют функционал $f \in \mathscr{S}'$ по формуле

$$\langle f,\phi\rangle = \int f(t)\phi(t)dt, \quad \phi \in \mathscr{S}.$$

Пространство $\mathscr{S}'$ замкнуто относительно нескольких классических операций. Для функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ производной порядка $n \ge 1$ называют функционал $\theta^{(n)} \in \mathscr{S}'$, определенный соотношением $\langle\theta^{(n)},\phi\rangle = (-1)^n\langle\theta,\phi^{(n)}\rangle$, $\phi \in \mathscr{S}$. Преобразование Фурье функционала $\theta \in \mathscr{S}'$ есть функционал $\widehat{\theta} \in \mathscr{S}'$, действующий по формуле

$$\langle\widehat{\theta},\phi\rangle = \langle\theta,\widehat{\phi}\rangle, \quad \phi \in \mathscr{S}. \tag{1.1}$$

Сверткой $\theta * \phi$ элементов $\theta \in \mathscr{S}'$, $\phi \in \mathscr{S}$ называют функцию $y(t) = \langle\theta, \sigma_t\phi\rangle$; если θ есть классическая функция из множества $\mathscr{L}$, то имеем

$$(\theta * \phi)(t) = \int \theta(\eta)\phi(t-\eta)d\eta.$$

1.2. Приближение оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами

Пусть p, q, r, s — вещественные параметры, удовлетворяющие ограничениям $1 \le p, q, r, s \le \infty$. Для целого $n \ge 1$ определим пространство $W^n_{r,p}$ функций $f \in L_r$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на оси, производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ локально абсолютно непрерывна, а $f^{(n)} \in L_p$. В пространстве $W^n_{r,p}$ выделим класс

$$Q^n_{r,p} = \{f \in W^n_{r,p} \colon \|f^{(n)}\|_{L_p} \le 1\}.$$

Обозначим через $\mathscr{B}(L_r, L_s)$ множество всех линейных ограниченных операторов из L_r в L_s, а через $\mathscr{B}(N; L_r, L_s)$ при $N > 0$ — множество операторов $T \in \mathscr{B}(L_r, L_s)$ с нормой $\|T\|_{L_r \to L_s} \le N$. Пусть $0 \le k < n$ — целые, причем $k > 0$, если $r = s$. Для оператора $T \in \mathscr{B}(L_r, L_s)$ положим

$$U(T) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|_{L_q} \colon f \in Q^n_{r,p}\}; \tag{1.2}$$

если разность $f^{(k)} - Tf$ не принадлежит пространству L_q, то считаем, что $\|f^{(k)} - Tf\|_{L_q} = \infty$. Величину (1.2) можно интерпретировать как уклонение (в пространстве L_q) оператора T от оператора дифференцирования $D^k = d^k/dt^k$ на классе $Q^n_{r,p}$. При $N > 0$ величина

$$E_{n,k}(N) = E_{n,k}(N; r, s; p, q) = \inf\{U(T) \colon T \in \mathscr{B}(N; L_r, L_s)\} \tag{1.3}$$

есть наилучшее приближение (в пространстве L_q) оператора дифференцирования D^k на классе $Q^n_{r,p}$ множеством линейных ограниченных операторов $\mathscr{B}(N; L_r, L_s)$. Задача Стечкина состоит в вычислении величины (1.3) и экстремального оператора, на котором в (1.3) достигается нижняя грань; будем называть ее задачей (1.3), а иногда — просто задачей $E_{n,k}(N)$.

Наиболее полно задача (1.3) изучена в классическом случае $s = q$. Эту задачу изучали С. Б. Стечкин, В. В. Арестов, В. Н. Габушин, Л. В. Тайков, Ю. Н. Субботин, В. И. Бердышев, В. М. Тихомиров, А. П. Буслаев, Г. Г. Магарил-Ильяев, В. Ф. Бабенко, Е. Е. Бердышева, М. А. Филатова и многие другие (см. [2; 3; 12] и приведенную там библиографию).

Плодотворным оказалось наблюдение С. Б. Стечкина о том, что задача (1.3) связана с задачей о наименьшей (наилучшей) константе в неравенстве между нормами производных функций

$$\|f^{(k)}\|_{L_q} \le K\|f\|^{\alpha}_{L_r}\|f^{(n)}\|^{\beta}_{L_p}, \quad f \in W^n_{r,p}, \tag{1.4}$$

$$\alpha = (n-k-1/p+1/q)/(n-1/p+1/r), \quad \beta = 1-\alpha.$$

Первое точное неравенство (1.4) получил Э. Ландау [15] в 1913 году при $n = 2$, $k = 1$ относительно равномерной нормы на полуоси. А. Н. Колмогоров в 1939 году нашел [16] точную константу в неравенстве (1.4) на оси $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ для всех $1 \le k < n$ при $p = q = r = \infty$, а точнее, в неравенстве

$$\|f^{(k)}\|_C \le C_{n,k}\|f\|^{(n-k)/n}_C \|f\|^{k/n}_{L_\infty}, \quad f \in W^n_{\infty,\infty}; \tag{1.5}$$

экстремальной в этом неравенстве является известная функция Фавара—Ахиезера—Крейна

$$f_n(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2\ell+1)t - n\pi/2\right)}{(2\ell+1)^{n+1}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Неравенство (1.5) для $n = 2$, $k = 1$ ранее (1914) получил Ж. Адамар [17]; а для $n = 3, 4$ при всех $1 \le k < n$ и $n = 5$, $k = 2$ — Г. Е. Шилов (1937) [18]. Результат А. Н. Колмогорова (1.5) — один из наиболее ярких и важных в данной тематике; в связи с этим неравенства (1.4) и в общем случае часто называют неравенствами Колмогорова. В. Н. Габушин [19] доказал, что необходимое и достаточное условие конечности константы K в неравенстве (1.4) состоит в том, что $(n-k)/r + k/p \ge n/q$. Более полную информацию о неравенствах Колмогорова (1.4), в частности, описание известных случаев с наилучшей константой, можно найти в [2; 3; 12; 20].

Как частный случай более общего результата С. Б. Стечкина [1, неравенство (6)], при выполнении условия

$$\mu = n - 1/p + 1/r > 0$$

величина (1.3) и наилучшая константа в (1.4) связаны неравенством

$$E_{n,k}(N) \ge \beta\alpha^{\alpha/\beta} K^{1/\beta} N^{-\alpha/\beta}, \quad N > 0. \tag{1.6}$$

Наилучшая константа K в неравенстве Колмогорова (1.4) известна в бо́льшем числе случаев в сравнении со случаями точного решения задачи (1.3). Чаще всего при решении задачи (1.3) использовалось неравенство Стечкина (1.6). В некоторых случаях соответствующее точное неравенство (1.4) было известно ранее, в других же одновременно была найдена наименьшая константа K в (1.4), см. библиографию в [2; 12].

Обсудим ситуацию, когда s и q необязательно совпадают; такой вариант задачи (1.3) иногда называют *четырехпараметрическим*. Величина (1.3) является однородной функцией параметра N. А именно, если параметры задачи (1.3) удовлетворяют ограничениям

$$k + 1/r - 1/s > 0, \tag{1.7}$$

$$n - k + 1/q - 1/p > 0, \tag{1.8}$$

то имеет место формула

$$E_{n,k}(N) = N^{-\gamma} E_{n,k}(1), \quad \gamma = \frac{n - k + 1/q - 1/p}{k + 1/r - 1/s}, \tag{1.9}$$

которая, в частности, влечет, что $E_{n,k}(N) \to 0$, $N \to \infty$. Отметим сразу, что условия (1.7) и (1.8) исключают три вырожденных случая задачи, они здесь обсуждаться не будут; см. детали в [21, § 5]. Формула (1.9) впервые была получена в [1, теорема 2] при $p = q = r = s = \infty$. В общем случае формула (1.9) обосновывается с помощью тех же соображений. Мы приведем сейчас эти соображения, поскольку детали рассуждений понадобятся в дальнейшем. Следуя [1, теорема 2], оператору $T \in \mathscr{B}(N; L_r, L_s)$ сопоставим оператор T_h, $h > 0$, формулой

$$(T_h f)(t) = h^{-k}(T f_h)(t h^{-1}), \tag{1.10}$$

в которой $f_h(u) = f(hu)$. Нетрудно проверить, что

$$\|T_h\|_{L_r \to L_s} = h^{-(k+1/r-1/s)} \|T\|_{L_r \to L_s}; \tag{1.11}$$

$$U(T_h) = h^{n-k+1/q-1/p} U(T). \tag{1.12}$$

Из определения (1.10) отображения $T \to T_h$ и (1.11) заключаем, что при этом отображении множество операторов $\mathscr{B}(N; L_r, L_s)$ взаимно однозначно отображается на множество $\mathcal{B}(h^{-(k+1/r-1/s)} N; L_r, L_s)$. В силу (1.12) можно утверждать, что

$$E_{n,k}(h^{-(k+1/r-1/s)} N) = h^{n-k+1/q-1/p} E_{n,k}(N) \tag{1.13}$$

при любых $h > 0$, $N > 0$. Более того, оператор $T \in \mathscr{B}(N; L_r, L_s)$ является экстремальным в задаче $E_{n,k}(N)$ в том и только в том случае, если оператор T_h — экстремальный в задаче $E_{n,k}(h^{-(k+1/r-1/s)} N)$. Формула (1.13) влечет (1.9).

При $s \neq q$ для полуоси не существует на данный момент случаев точного решения задачи (1.3). Одна из причин состоит в том, что при $s \neq q$ нет неравенства (1.6).

На оси задача (1.3) инвариантна относительно группы сдвигов τ_h, $h \in (-\infty, \infty)$. Это свойство позволяет получить в задаче (1.3) конкретные результаты [11; 21–25]. Обозначим через $\mathcal{T}(L_r, L_s)$ множество операторов $T \in \mathscr{B}(L_r, L_s)$, инвариантных относительно группы сдвигов на L_r, а через $\mathcal{T}(N; L_r, L_s)$ — множество операторов $T \in \mathcal{T}(L_r, L_s)$, нормы которых ограничены числом $N > 0$. В [21, теорема 1.1] доказано, что при любом $N > 0$ для всех значений параметров p, q, r, s (с некоторой особенностью при $r = \infty$) в (1.3) можно ограничиться операторами $T \in \mathcal{T}(N; L_r, L_s)$. Точнее, обозначим одним из двух выражений $E^{\diamond}_{n,k}(N)$ или $E^{\diamond}_{n,k}(N; r, s; p, q)$ величину (1.3) при $r < \infty$, а при $r = \infty$ — величину (1.3), в которой пространство L_r при $r = \infty$ интерпретируется как $C_0 = C_0(-\infty, \infty)$. В [21, теорема 1.1] доказано, что при любом $N > 0$ имеет место равенство

$$E^{\diamond}_{n,k}(N) = E^{\diamond}_{n,k}(N; r, s; p, q) = \inf\{U(T) \colon T \in \mathcal{T}(N; L_r, L_s)\}.$$

Множество $\mathcal{T}(L_r, L_s)$ ограниченных операторов из L_r в L_s, инвариантных относительно сдвига, достаточно хорошо изучено (см., например, монографии [26; 27]). Известно, что если $s < r$, то $\mathcal{T}(L_r, L_s)$ состоит только из нулевого оператора, и потому в этом случае $E_{n,k}(N) = \sup\{\|f^{(k)}\|_{L_q} \colon f \in Q^n_{r,p}\}$. При $q < p$ справедливо некоторое подобное утверждение. Эти два факта как раз и позволили [21, § 5] показать, что в предположениях (1.7), (1.8) величина $E_{n,k}(N)$ конечна при каком-либо значении $N > 0$ (или согласно (1.9), то же самое, при любом значении $N > 0$) в том и только в том случае, если выполнены условия $s \ge r$, $q \ge p$. Этот результат при $s = q$ ранее был получен другим методом В. Н. Габушиным [19].

При $s \ge r$ оператор $T \in \mathcal{T}(L_r, L_s)$, по крайней мере, на множестве $\mathscr{S}$, имеет вид свертки $Tf = \theta * f$ с некоторым элементом $\theta = \theta_T \in \mathscr{S}'$, см., например, [26, теорема 1.2]. Множество $M_{r,s} = M(r, s)$ таких обобщенных функций θ_T является банаховым пространством относительно нормы $\|\theta_T\|_{M(r,s)} = \|T\|_{L_r \to L_s}$. Пространства $M(r, s)$, называемые пространствами мультипликаторов, довольно хорошо изучены (см. монографии [14; 26; 27]). В частности, в некоторых случаях известно описание множества $M(r, s)$; см., например, [26, гл. I; 14, гл. 1, § 3; 27, гл. 4]. Так известно, что

$$M(2, 2) = \widecheck{L_\infty} = \{\theta \in \mathscr{S}' \colon \widehat{\theta} \in L_\infty\}, \tag{1.14}$$

$$M(r, \infty) = L_{r'}, \quad 1 \le r < \infty, \quad 1/r + 1/r' = 1; \quad M(\infty, \infty) = M(1, 1) = V. \tag{1.15}$$

Соотношения (1.14) и (1.15) имеют место вместе с соответствующими формулами для норм элементов; к примеру, $\|\theta\|_{M(2,2)} = \|\widecheck{\theta}\|_{L_\infty}$ для $\theta \in M(2, 2)$.

При $1 \le r \le s \le \infty$ определим на множестве $\mathscr{S}$ функционал

$$\|f\|_{r,s} = \sup\{|\langle \theta, f\rangle| \colon \theta \in M(r, s),\ \|\theta\| \le 1\},$$

который, как нетрудно понять, является на $\mathscr{S}$ нормой. Обозначим через $L_{r,s}$ пополнение $\mathscr{S}$ относительно этой нормы. Известно [21; 25], что $L_{r,s}$ есть функциональное пространство, вложенное в L_ω, $1/\omega = 1/r - 1/s$. Если $s = \infty$, то из (1.15) следует, что

$$L_{\infty,\infty} = C_0, \quad L_{r,\infty} = L_r \quad \text{при} \quad 1 \le r < \infty$$

вместе с равенствами норм элементов. Помимо того, как следствие (1.14) имеем

$$L_{2,2} = \widecheck{L_1} = \{f \in C_0 \colon \widehat{f} \in L_1\}, \tag{1.16}$$

причем $\|f\|_{2,2} = \|\widehat{f}\|_{L_1}$, $f \in L_{2,2}$.

В работах автора [21; 22; 25] были построены аналоги задачи (1.3) и неравенства (1.4) в пространствах $L_{r,s}$ и $L_{p,q}$, порожденные задачей (1.3). Ниже в п. 1.4 будет выписана одна из этих задач для значений параметров $s = r = 2$, $p = q = \infty$.

1.3. Некоторые известные случаи задачи (1.3)

Отметим несколько конкретных случаев решения задачи (1.3), близких к рассматриваемому в данной работе.

С л у ч а й $p = q = r = s = \infty$. Первые точные результаты в задаче (1.3) получил С. Б. Стечкин. Он доказал [1; 28], что в пространстве $C = C(-\infty, \infty)$ (а точнее, в случае $r = s = q = p = \infty$) при $n = 2$ и $n = 3$ для $1 \le k < n$ экстремальными являются следующие классические (конечноразностные) операторы $T_h^{n,k}$:

$$(T_h^{2,1} f)(t) = (T_h^{3,1} f)(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h}, \quad N = h^{-1},$$

$$(T_h^{3,2} f)(t) = \frac{f(t+h) - 2f(t) + f(t-h)}{h^2}, \quad N = \frac{4}{h^2}.$$

При $n = 4, 5$ решение этого случая задачи (1.3) нашел В. В. Арестов [29], а при произвольном $n \ge 6$ — А. П. Буслаев [30] с использованием результата И. Домара [31]. При $n \ge 4$ экстремальные операторы бесконечноразностные с равномерными узлами. Точнее, к примеру, при $k = 1$ экстремальный оператор имеет вид

$$T_{n,1} f(t) = h^{-1} \sum_{\ell=0}^{\infty} \alpha_\ell (f(t + (2\ell+1)h) - f(t - (2\ell+1)h));$$

последовательность $\{\alpha_\ell\}_{\ell \ge 0}$ является суммой нескольких геометрических прогрессий. В обосновании результатов использовалась оценка снизу (1.6) и точное неравенство Колмогорова (1.5).

С л у ч а й $p = q = r = s = 2$. Решение задачи (1.3) в этом случае получили Ю. Н. Субботин и Л. В. Тайков [32]. Экстремальный оператор — некоторый интегральный оператор свертки. Использовалась оценка снизу (1.6). Соответствующее точное неравенство (1.4) было известно ранее [33, гл. VII, § 7.9, п. 261].

С л у ч а й $p = q = 2$, $1 \le r = s \le \infty$. Для этих значений параметров решение задачи (1.3) получил автор [11; 22; 24]. Соответствующего неравенства (1.4) не существует. Результат был получен с помощью соображений инвариантности. При $n \ge 3$ $(1 \le k < n)$ это сделано в статье [22], а при $n = 2$, $k = 1$, — на пять лет позже в статье [24] (см. также [11]).

1.4. Случай $r = s = 2$, $p = q = \infty$

В дальнейшем будет обсуждаться задача (1.3) для значений параметров $r = s = 2$, $p = q = \infty$. Обозначение $E_{n,k}(N)$ будет использоваться лишь для величины $E_{n,k}(N; 2, 2; \infty, \infty)$. В данном случае исходным является пространство $W^n_{2,\infty}$ функций $f \in L_2$, которые $n-1$ раз непрерывно дифференцируемы на оси, производная порядка $n-1$ которых локально абсолютно непрерывна на оси, а $f^{(n)} \in L_\infty$. Обозначим через $\mathring{W} = \mathring{W}^n_{2,\infty}$ пространство функций $f \in W^n_{2,\infty}$ со свойством $f^{(n)} \in C_0$. В пространстве $\mathring{W}^n_{2,\infty}$ выделим класс функций $\mathring{Q}^n_{2,\infty} = \{f \in \mathring{W}^n_{2,\infty} \colon \|f^{(n)}\|_{C_0} \le 1\}$. Наряду с $E_{n,k}(N)$ рассмотрим наилучшее равномерное приближение оператора D^k множеством $\mathscr{B}(L_2, L_2)$ линейных ограниченных операторов в пространстве L_2, а точнее, величину

$$E^\circ_{n,k}(N) = \inf\{U^\circ(T) \colon \|T\|_{L_2 \to L_2} \le N\}, \tag{1.17}$$

$$U^\circ(T) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|_C \colon f \in \mathring{Q}^n_{2,\infty}\}.$$

Для сокращения записи положим $F = \breve{L_1}$; это есть банахово пространство относительно нормы $\|f\|_F = \|\widehat{f}\|_{L_1}$, $f \in F$. Обозначим через $Y^n = W^n_{2,2;\infty,\infty}$ пространство функций $f \in F$, которые n раз (непрерывно) дифференцируемы на оси и $f^{(n)} \in C_0$. Операторной задаче (1.17) будет соответствовать в Y^n следующее неравенство для норм функции и ее производных:

$$\|f^{(k)}\|_C \le K_{n,k}\|\widehat{f}\,\|_L^{(n-k)/n}\|f^{(n)}\|_{C_0}^{k/n}, \quad f \in Y^n. \tag{1.18}$$

Как частный случай результатов автора [25, теорема 3] справедливо такое утверждение.

Теорема 1. *При $r = s = 2$, $p = q = \infty$, $1 \le k < n$ для любого значения $N > 0$*

$$E^{\circ}_{n,k}(N) = \beta\alpha^{\alpha/\beta}(K_{n,k})^{1/\beta}N^{-\alpha/\beta}, \quad \alpha = \frac{n-k}{n}, \quad \beta = \frac{k}{n},$$

где $K_{n,k}$ — наименьшая константа в (1.18).

Для того чтобы обеспечить существование экстремальных функций в рассматриваемых здесь задачах, расширим пространство Y^n. Рассмотрим более широкое в сравнении с (1.16) множество $\mathcal{F} = \check{V} = \{f \in C\colon \widehat{f} \in V\}$ функций $f \in C = C(-\infty,\infty)$, преобразование Фурье которых есть (вообще говоря, комплексная) ограниченная борелевская мера на оси, а точнее, множество функций, представимых в виде

$$f(t) = \int e^{2\pi t\eta i}\,d\mu(\eta), \quad \text{где} \quad \mu = \mu_f = \widehat{f} \in V. \tag{1.19}$$

Полную вариацию $\bigvee\mu$ меры μ в (1.19) будем обозначать через $\|f\|_{\mathcal{F}}$. Относительно этого функционала пространство $\mathcal{F} = \check{V}$ является банаховым.

При $n \ge 1$ рассмотрим пространство $\mathcal{Y}^n = \mathcal{F}\bigcap W^n_{\infty,\infty}$ функций $f \in \mathcal{F}$, непрерывно дифференцируемых $n-1$ раз на $(-\infty,\infty)$ и, более того, производная $f^{(n-1)}$ порядка $n-1$ которых локально абсолютно непрерывна на оси и $f^{(n)} \in L_\infty$. Имеет место вложение $\mathcal{Y}^n \subset W^n_{\infty,\infty}$; более того, если $f \in \mathcal{Y}^n$, то $\|f\|_C \le \bigvee\widehat{f}$. Поэтому из классического варианта (1.5) неравенства Колмогорова следует, что на множестве $\mathcal{Y}^n$ имеет место неравенство

$$\|f^{(k)}\|_C \le \mathcal{K}_{n,k}\left(\bigvee\widehat{f}\right)^{(n-k)/n}\|f^{(n)}\|_{L_\infty}^{k/n}, \quad f \in \mathcal{Y}^n. \tag{1.20}$$

Наилучшая константа $\mathcal{K}_{n,k}$ в этом неравенстве и константы в неравенствах (1.18) и (1.5) связаны соотношением $K_{n,k} \le \mathcal{K}_{n,k} \le C_{n,k}$. Следует ожидать, что на самом деле справедливо равенство $K_{n,k} = \mathcal{K}_{n,k}$; ниже будет показано, что этот факт имеет место, по крайней мере, при $n = 2$, $k = 1$. Неравенство же $\mathcal{K}_{n,k} \le C_{n,k}$ может быть и строгим (см. замечание к теореме 3 ниже).

Функцию $f^* \in \mathcal{Y}^n$, $f^* \not\equiv 0$, на которой (1.20) обращается в равенство, называют *экстремальной* в неравенстве (1.20). Нетрудно понять, что если f^* экстремальная, то для любых $\kappa \ne 0$, c, t_0 функция $cf^*(\kappa t + t_0)$ также будет экстремальной. Если функция f^* экстремальная и любая другая экстремальная выражается через нее формулой $cf^*(\kappa t + t_0)$, то говорят, что f^* — *единственная экстремальная функция.*

В пространстве $\mathcal{Y}^n$ выделим класс $\mathcal{Q}^n = \{f \in \mathcal{Y}^n\colon \|f^{(n)}\|_{L_\infty} \le 1\}$. Рассмотрим задачу наилучшего равномерного приближения оператора дифференцирования порядка k на классе $\mathcal{Q}^n$ множеством $\mathscr{B}(\mathcal{F}, C)$ линейных ограниченных операторов из $\mathcal{F}$ в C:

$$\mathcal{E}_{n,k}(N) = \inf\{\mathcal{U}(T)\colon T \in \mathscr{B}(\mathcal{F}, C),\ \|T\|_{\mathcal{F}\to C} \le N\}, \tag{1.21}$$

$$\mathcal{U}(T) = \sup\{\|f^{(k)} - Tf\|\colon f \in \mathcal{Q}^n\}.$$

С помощью тех же соображений, что и при обосновании (1.6), доказывается, что величина (1.21) и наилучшая константа в (1.20) связаны неравенством

$$\mathcal{E}_{n,k}(N) \ge \beta\alpha^{\alpha/\beta}\mathcal{K}_{n,k}^{1/\beta}N^{-\alpha/\beta}, \quad N > 0. \tag{1.22}$$

1.5. Основные результаты

В данной статье будет дано решение задачи (1.3) для значений параметров

$$r = s = 2, \quad p = q = \infty; \quad k = 1, \quad n = 2. \tag{1.23}$$

Одновременно будет дано решение нескольких родственных задач.

Теорема 2. *Для значений параметров* (1.23) *при любом* $h > 0$ *имеет место формула*

$$E_{2,1}(\mathbf{N}(h)) = \frac{\pi h}{4}, \quad \mathbf{N}(h) = \frac{\pi^2}{2h}\biggl(4\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\biggr)^{-1}. \tag{1.24}$$

Экстремальным в (1.24) *является оператор сингулярной свертки на пространстве* L_2, *определенный формулой*

$$(\Theta_h f)(t) = \mathbf{A}(h)\int_0^{\pi h}(f(t+u) - f(t-u))\,y\left(uh^{-1}\right)\,du, \tag{1.25}$$

где

$$\mathbf{A}(h) = h^{-2}\biggl(4\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\biggr)^{-1}; \quad y(u) = \frac{\pi - u}{4\sin u}, \quad u \in (0, \pi).$$

Наряду с теоремой 2 будет доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Для функций пространства* $\mathcal{Y}^2$ *справедливо точное неравенство*

$$\|f'\|_C \le \mathcal{K}_{2,1}\sqrt{\bigvee\widehat{f}\cdot\|f''\|_\infty}, \quad f \in \mathcal{Y}^2, \tag{1.26}$$

с наименьшей возможной константой

$$\mathcal{K}_{2,1} = \frac{\pi}{2}\biggl(\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\biggr)^{-1/2}, \tag{1.27}$$

и функция

$$f_2(t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\sin((2\ell+1)t)}{(2\ell+1)^3} \tag{1.28}$$

является экстремальной в неравенстве (1.26).

З а м е ч а н и е. Имеют место соотношения (см., к примеру, лемму 1 ниже или [34, введение, § 0.2, п. 234])

$$\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3} > \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)^3} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3} < \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому для константы (1.27) справедливы оценки

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} < \mathcal{K}_{2,1} < \sqrt{2}. \tag{1.29}$$

Согласно результату Адамара [17] при $n = 2$, $k = 1$ наилучшая константа в неравенстве (1.5) имеет значение $C_{2,1} = \sqrt{2}$. Второе неравенство (1.29) означает, что выполняется строгое неравенство $\mathcal{K}_{2,1} < C_{2,1}$.

Доказательство теорем 2 и 3 будет дано в последующих трех разделах. В разд. 2 обсуждаются свойства функции (1.28), которая, как утверждается в теореме 3 и будет в дальнейшем доказано, является экстремальной в неравенстве (1.26). В процессе исследований эта функция даст оценку снизу во всех рассматриваемых в этом разделе задачах. В разд. 3 строится и исследуется оператор, относительно которого в дальнейшем доказывается, что он является экстремальным в рассматриваемых здесь аппроксимационных задачах. В разд. 4 будет дано доказательство основных утверждений данной работы.

2. Экстремальная функция. Оценки снизу

Приведем некоторые необходимые в дальнейшем свойства функции f_2, определенной формулой (1.28). Функция f_2 — нечетная, 2π-периодическая, и для нее на $[0,\pi]$ имеет место формула

$$f_2(t)=\frac{t}{2}(t-\pi),\quad t\in[0,\pi]. \tag{2.1}$$

Помимо того, функция f_2 дифференцируема на $(-\infty,\infty)$, ее производная есть четная, 2π-периодическая функция со значениями

$$f_2'(t)=t-\frac{\pi}{2},\quad t\in[0,\pi]. \tag{2.2}$$

Следовательно, f_2' абсолютно непрерывна на оси $(-\infty,\infty)$ и

$$f_2''(t)=\operatorname{sgn}\sin t,\quad t\neq\nu\pi,\quad \nu\in\mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

Функцию (1.28) можно записать в следующей экспоненциальной форме:

$$f_2(t)=-\frac{2}{\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\big(e^{(2\ell+1)ti}-e^{-(2\ell+1)ti}\big). \tag{2.4}$$

С помощью δ-функции Дирака определим меру $d\mu_2$ на оси соотношением

$$d\mu_2(\eta)=\frac{2}{\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\delta(\eta-\eta_\ell)-\frac{2}{\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\delta(\eta+\eta_\ell), \tag{2.5}$$

где $\eta_\ell=\dfrac{2\ell+1}{2\pi}$, $\ell\geq 0$. Представление (2.4) функции (1.28) с помощью меры (2.5) можно переписать в виде

$$f_2(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi\eta ti}d\mu_2(\eta)=\widecheck{\mu_2}(t). \tag{2.6}$$

Лемма 1. *Функция f_2 принадлежит пространству $\mathcal{Y}^2$, и соответствующие нормы функции и ее первых двух производных имеют следующие значения*:

$$\begin{gathered}\|f_2\|_{\mathcal{F}}=\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3},\quad \|f_2\|_C=-f_2(\pi/2)=\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)^3}=\frac{\pi^2}{8},\\ \|f_2'\|_C=-f_2'(0)=\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^2}=\frac{\pi}{2},\quad \|f_2''\|_{L_\infty}=1.\end{gathered} \tag{2.7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представление (2.6) означает, что $f_2\in\mathcal{F}$ и, как нетрудно видеть,

$$\|f_2\|_{\mathcal{F}}=\bigvee\mu_2=\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}.$$

Остальные свойства функции f_2 легко следуют из (1.28), (2.1), (2.2) и (2.3). Все утверждения леммы 1 доказаны. □

Следствие 1. *Для наилучшей константы в неравенстве* (1.26) *справедлива оценка снизу*

$$\mathcal{K}_{2,1}\geq\frac{\|f_2'\|_{C(-\infty,\infty)}}{\sqrt{\Big(\bigvee\widehat{f_2}\Big)\,\|f_2''\|_{L_\infty}}}=\frac{\pi}{2}\Big(\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\Big)^{-1/2}. \tag{2.8}$$

Функция f_2 не принадлежит множеству $W^2_{2,2;\infty,\infty}$. Для того чтобы воспользоваться функцией f_2 в задачах на пространстве $W^2_{2,2;\infty,\infty}$, произведем сглаживание этой функции; это и сделано в следующей лемме.

Лемма 2. *Для функции f_2 существует семейство функций $\{g_\alpha\} \subset W^2_{2,2;\infty,\infty}$, зависящее от параметра α, $0 < \alpha \le \alpha_0 = 1/(2\pi)$, обладающее следующими свойствами*:
(1) $\|\widehat{g_\alpha}\|_{L_1} = \bigvee \widehat{f_2}$, $0 < \alpha \le \alpha_0$;
(2) $\lim_{\alpha\to+0}\|g''_\alpha\|_{L_\infty} = \|f''_2\|_{L_\infty}$;
(3) $\lim_{\alpha\to+0}\|g'_\alpha\|_{C_0} = \|f'_2\|_C$;
(4) *для любого $R > 0$ при $k = 0$ и $k = 1$ имеет место предельное соотношение*

$$\|f_2^{(k)} - g_\alpha^{(k)}\|_{C[-R,R]} \to 0, \quad \alpha \to +0.$$

Доказательство. Обозначим через ϕ функцию на оси $(-\infty,\infty)$, четную, неотрицательную, бесконечно дифференцируемую, имеющую компактный носитель, сосредоточенный на отрезке $[-1,1]$, нормированную условием

$$\int \phi(t)dt = 1,$$

наконец, положительно определенную, т. е. преобразование Фурье которой неотрицательное: $\widehat{\phi} \ge 0$. Определим при $0 < \alpha \le 1/(2\pi)$ функцию ϕ_α соотношением

$$\phi_\alpha(t) = \alpha^{-1}\phi\left(t\alpha^{-1}\right), \quad t \in \mathbb{R};$$

носитель этой функции сосредоточен на отрезке $[-\alpha,\alpha]$. Имеем

$$\widehat{\phi_\alpha}(t) = \alpha^{-1}\int e^{-2\pi t\eta i}\phi\left(\eta\alpha^{-1}\right)\,d\eta = \int e^{-2\pi\alpha t\eta i}\phi\left(\eta\right)\,d\eta = \widehat{\phi}\,(\alpha t), \quad t \in \mathbb{R};$$

в частности,

$$\widehat{\phi_\alpha}(0) = \int \phi_\alpha(\eta)\,d\eta = \int \phi(\eta)\,d\eta = 1. \tag{2.9}$$

Введем семейство функций g_α, $0 < \alpha < 1/(2\pi)$, определив вначале их преобразование Фурье. А именно, исходя из (2.5), положим

$$\widehat{g_\alpha}(\eta) = \frac{2}{\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\left(\phi_\alpha(\eta-\eta_\ell) - \phi_\alpha(\eta+\eta_\ell)\right). \tag{2.10}$$

Функции (2.10), очевидно, суммируемы, а поскольку носители слагаемых в (2.10) не пересекаются, то имеем

$$\int|\widehat{g_\alpha}(\eta)|d\eta = \frac{2}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\bigg(\int\phi_\alpha(\eta-\eta_\ell)d\eta + \int\phi_\alpha(\eta+\eta_\ell)d\eta\bigg).$$

Воспользовавшись свойством (2.9), окончательно получаем, что

$$\int|\widehat{g_\alpha}(\eta)|d\eta = \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}.$$

Функции g_α являются обратными преобразованиями Фурье функций (2.10). Поскольку функции (2.10) нечетные, то имеем

$$g_\alpha(t) = \frac{2}{\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\int e^{2\pi i\,t\,\eta}\left(\phi_\alpha(\eta-\eta_\ell) - \phi_\alpha(\eta+\eta_\ell)\right)d\eta$$
$$= \widehat{\phi_\alpha}(t)\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi\,t\,\eta_\ell\right)}{(2\ell+1)^3} = \widehat{\phi_\alpha}(t)\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\sin\left((2\ell+1)t\right)}{(2\ell+1)^3}.$$

Таким образом,

$$g_\alpha(t) = \Phi(\alpha t) f_2(t), \quad \text{где} \quad \Phi(t) = \widehat{\phi}(t). \tag{2.11}$$

Всюду на оси

$$g'_\alpha(t) = \Phi(\alpha t) f'_2(t) + \varepsilon_1(\alpha, t), \quad \varepsilon_1(\alpha, t) = \alpha\, \Phi'(\alpha t) f_2(t), \tag{2.12}$$

и почти всюду (в тех точках, где существует f''_2)

$$g''_\alpha(t) = \Phi(\alpha t) f''_2(t) + \varepsilon_2(\alpha, t), \quad \varepsilon_2(\alpha, t) = 2\alpha\, \Phi'(\alpha t) f'_2(t) + \alpha^2 \Phi''(\alpha t) f_2(t). \tag{2.13}$$

Обе функции $\varepsilon_1(\alpha, t)$ и $\varepsilon_2(\alpha, t)$ в (2.12) и (2.13) равномерно на оси стремятся к нулю при $\alpha \to +0$. Из формул (2.11)–(2.13) следуют все утверждения леммы 2. $\square$

Важную роль в наших исследованиях имеет частный случай неравенства (1.18) для $n = 2$, $k = 1$:

$$\|f'\|_C \le K_{2,1} \sqrt{\|\widehat{f}\,\|_L \|f''\|_\infty}, \quad f \in Y^2. \tag{2.14}$$

Поскольку $Y^2 \subset \mathcal{Y}^2$, то $K_{2,1} \le \mathcal{K}_{2,1}$. Из приведенных ниже результатов будет следовать, что эти константы совпадают. На данный момент как следствие леммы 2 можно утверждать, что для константы $K_{2,1}$ справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Для наилучшей константы в неравенстве* (2.14) *выполняется оценка*

$$K_{2,1} \ge \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^3} \right)^{-1/2}, \tag{2.15}$$

аналогичная (2.8).

Результаты этого раздела дают оценки снизу во всех аппроксимационных задачах, рассматриваемых в данной статье.

3. Построение и исследование экстремального оператора

3.1. Вспомогательные утверждения

Обозначим через y нечетную функцию, которая имеет на $(0, \infty)$ значения

$$y(u) = \begin{cases} \dfrac{\pi - u}{4 \sin u}, & u \in (0, \pi); \\ 0, & u > \pi. \end{cases} \tag{3.1}$$

В последующем нам нужны будут свойства функции y и ее обратного преобразования Фурье $\widetilde{y}$. Функция y имеет в точке 0 неинтегрируемую особенность, поэтому ее обратное преобразование Фурье $\widetilde{y}$ следует понимать в смысле теории обобщенных функций (1.1). Как нетрудно проверить, функция $z = \widetilde{y}$ классическая, и имеет место формула

$$z(t) = \widetilde{y}(t) = 2i \int_0^\pi y(u) \sin 2\pi t u\, du = \frac{i}{2} \int_0^\pi \frac{\pi - u}{\sin u} \sin 2\pi t u\, du; \tag{3.2}$$

отметим, что функция $z = \widetilde{y}$ целая и нечетная.

Утверждения следующих двух лемм содержатся в работе автора [11; 24] (отметим, что [11] есть перевод на английский язык давней статьи автора [24], опубликованной на русском языке в труднодоступном сборнике). Однако эти утверждения содержатся в названных работах внутри доказательства теоремы 1, изложены довольно схематично, причем с некоторыми неточностями. Поэтому они будут приведены здесь с доказательствами.

Лемма 3. *Для функций* (3.1) *и* (3.2) *справедливы утверждения*:

$$\|z\|_C = \frac{\pi^2}{4}, \tag{3.3}$$

$$z'(0) = 8\pi i \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^3}, \tag{3.4}$$

$$\|\widehat{z''}\|_1 = (2\pi)^2 \int\limits_0^{\pi} u^2 y(u)\,du = (2\pi)^3 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^3}. \tag{3.5}$$

Нам удобно вместо функции (3.2) провести исследование функции

$$\chi(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{\pi-u}{\sin u} \sin ut\,du, \tag{3.6}$$

связанной с функцией (3.2) равенством

$$z(t) = i\chi(2\pi t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Лемма 4. *Для функции* (3.6) *справедливы следующие утверждения.*
(1) *Имеет место представление*

$$\chi(t) = \frac{1+\cos t\pi}{2} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\ell+1-t)^2} - \frac{1}{(2\ell+1+t)^2} \right), \quad t \neq 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.8}$$

(2) *Выполняются соотношения*

$$0 \le \chi(t) \le \frac{\pi^2}{4}, \quad t \ge 0, \tag{3.9}$$

$$\|\chi\|_{C(-\infty,\infty)} = \chi(2k+1) = \frac{\pi^2}{4}, \quad k \ge 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.10}$$

(3) *Для производной функции* (3.6) *справедливы формулы*

$$\chi'(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{u(\pi-u)}{\sin u} \cos ut\,du, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.11}$$

$$\chi'(0) = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{u(\pi-u)}{\sin u}\,du = 4 \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^3}. \tag{3.12}$$

(4) *Имеет место равенство*

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \frac{u^2(\pi-u)}{\sin u}\,du = 2\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\ell+1)^3}. \tag{3.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $m \ge 1$ для $u \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, имеет место формула (см., например, [35, отдел VI, § 3, задача 17])

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} \sin(2\ell+1)u = \frac{\sin^2 mu}{\sin u} = \frac{1-\cos 2mu}{2\sin u},$$

которая влечет представление $\dfrac{1}{2\sin u} = \sum\limits_{\ell=0}^{m-1} \sin(2\ell+1)u + \dfrac{\cos 2mu}{2\sin u}$. Подставив это выражение в (3.6), получаем

$$\chi(t) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} \frac{\pi-u}{\sin u}\sin ut\,dt = \sum_{\ell=0}^{m-1}\phi_\ell(t) + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi-u}{\sin u}\sin ut\cos 2mu\,du, \tag{3.14}$$

где $\phi_\ell(t) = \displaystyle\int_0^{\pi}(\pi-u)\,\sin(2\ell+1)u\,\sin ut\,du$. Каждая из функций ϕ_ℓ целая, и, как легко проверить,

$$\begin{gathered} \phi_\ell(2\ell+1) = \frac{\pi^2}{4}, \\ \phi_\ell(t) = \frac{1+\cos t\pi}{2}\left(\frac{1}{(2\ell+1-t)^2} - \frac{1}{(2\ell+1+t)^2}\right), \quad t \ne 2\ell+1. \end{gathered} \tag{3.15}$$

Для фиксированного t при $m \to \infty$ последний интеграл в (3.14) стремится к нулю, поэтому справедлива формула $\chi(t) = \sum\limits_{\ell=0}^{\infty}\phi_\ell(t)$, которая влечет (3.8).

Из (3.15) следует, что $\phi_\ell(t) \ge 0$ для $t \ge 0$ и $\phi_\ell(2k+1) = 0$ для $k \ne \ell$. Поэтому функция χ на полуоси $(0,\infty)$ положительная и

$$\chi(2\ell+1) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \ell \ge 0, \quad \ell \in \mathbb{Z}. \tag{3.16}$$

Воспользуемся теперь разложением $\dfrac{1}{\sin^2 \pi t} = \dfrac{1}{\pi^2}\sum\limits_{\nu=-\infty}^{\infty}\dfrac{1}{(t-\nu)^2}$, $t \notin \mathbb{Z}$, которое можно получить, к примеру, дифференцированием разложения функции котангенс на простейшие дроби (см. [36, гл. 4, § 4, п. 4.2, пример 2)] или [37, гл. XII, § 3, п. 441, пример 9)]). Заменив здесь переменное t на $(t-1)/2$, получаем тождество

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{1+\cos t\pi}{2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2\ell+1-t)^2} + \frac{1}{(2\ell+1+t)^2}\right), \quad t \ne 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{3.17}$$

Соотношения (3.8), (3.16), (3.17) влекут теперь свойства (3.9) и (3.10).

Формула (3.11) получается из (3.6) дифференцированием правой части (3.6) по параметру t под знаком интеграла. Этот шаг требует пояснения. Для $h \ne 0$ и произвольного t имеем

$$\frac{\chi(t+h)-\chi(t)}{h} = \frac{1}{2h}\int\limits_0^{\pi}\frac{\pi-u}{\sin u}(\sin u(t+h) - \sin ut)\,du = \int\limits_0^{\pi}\frac{\pi-u}{\sin u}\left(\frac{1}{h}\sin\frac{uh}{2}\right)\cos\frac{u(2t+h)}{2}\,du. \tag{3.18}$$

В последнем интеграле подынтегральная функция мажорируется функцией $\dfrac{u(\pi-u)}{2\sin u}$, не зависящей от параметра h (впрочем, от t тоже). В силу теоремы Лебега о мажорантной сходимости для вычисления предела выражения (3.18) при $h \to 0$ можно перейти к пределу под знаком последнего интеграла. В результате как раз и получим формулу (3.11). Воспользовавшись формулой (3.11) и дифференцируя (3.8) в точке $t = 0$, получаем (3.12).

Наконец, вычислим интеграл $J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{u^2(\pi-u)}{\sin u}\,du$. Заменим в этом интеграле переменную u на $\pi-u$ и возьмем полусумму исходного выражения для J и выражения, получившегося после замены. В результате получим

$$J = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\pi}\frac{u^2(\pi-u)+(\pi-u)^2u}{\sin u}\,du = \frac{\pi}{4}\int\limits_0^{\pi}\frac{u(\pi-u)}{\sin u}\,du.$$

Применив теперь (3.12), приходим к (3.13). Лемма 4 полностью доказана. □

Доказательство леммы 3. Будем исходить из (3.7). Свойство (3.3) содержится в (3.10). Соотношение (3.7) влечет, что $z'(0) = 2\pi i\chi'(0)$. Воспользовавшись теперь соотношением (3.12), получаем (3.4).

В силу (3.6) и (3.7) имеем

$$z''(t) = (2\pi)^2 i\chi''(2\pi t) = -(2\pi)^2 \frac{i}{2}\int\limits_0^\pi \frac{u^2(\pi-u)}{\sin u}\sin 2\pi ut\,du.$$

Это соотношение можно интерпретировать так, что z'' есть (понимаемое в классическом смысле) обратное преобразование Фурье функции $-(2\pi)^2u^2y(u)$. Отсюда заключаем, что $\widehat{z''}(u) = -(2\pi)^2u^2y(u)$, $u\in\mathbb{R}$. А следовательно,

$$\|\widehat{z''}\|_1 = 2\int\limits_0^\pi |\widehat{z''}(u)|du = (2\pi)^2\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \frac{u^2(\pi-u)}{\sin u}\,du.$$

Применяя теперь формулу (3.13), получаем (3.5). Лемма 3 также доказана. □

3.2. Конструкция и свойства экстремального оператора

В данном подразделе будут рассмотрены свойства оператора

$$(\Theta f)(t) = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi t\eta i}z(\eta)d\mu_f(\eta), \quad f\in\mathcal{F}, \tag{3.19}$$

где функция z определена формулой (3.2), а константа A имеет значение

$$A = \left(4\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\right)^{-1}. \tag{3.20}$$

Довольно очевидно, что (3.19) есть линейный ограниченный оператор из $\mathcal{F}$ в C. Позже с помощью оператора Θ будет описано решение всех аппроксимационных задач данного раздела.

Лемма 5. *Для нормы оператора* (3.19) *справедлива формула*

$$\|\Theta\|_{\mathcal{F}\to C} = N_{2,1}, \quad N_{2,1} = \frac{\pi^2}{4}\left(4\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\right)^{-1}, \tag{3.21}$$

и, более того, норма оператора достигается на функции (1.28).

Доказательство. При любом $t\in(-\infty,\infty)$ имеем $|(\Theta f)(t)|\le A\,\|z\|_C\bigvee\mu_f$, $f\in\mathcal{F}$. Отсюда следует оценка $\|\Theta\|_{\mathcal{F}\to C}\le A\,\|z\|_C$. Применяя формулу (3.3), получаем окончательно оценку сверху нормы оператора (3.19):

$$\|\Theta\|_{\mathcal{F}\to C}\le A\,\frac{\pi^2}{4}. \tag{3.22}$$

Для получения оценки снизу воспользуемся функцией (1.28), а точнее, ее представлением (2.6) через меру (2.5). Справедливы следующие соотношения:

$$(\Theta f_2)(0) = A\int\limits_{-\infty}^{\infty} z(\eta)d\mu_2(\eta) = -\frac{2A}{\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(2\ell+1)^3}z(\eta_\nu) - \frac{1}{(2\ell+1)^3}z(-\eta_\nu)\right)$$

$$= -\frac{2A}{\pi i}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\left(z(\eta_\nu) - z(-\eta_\nu)\right).$$

Воспользовавшись теперь связью (3.7) между функциями z и χ, нечетностью этих функций и свойством (3.10), получаем

$$(\Theta f_2)(0) = -\frac{4A}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\chi(2\ell+1)}{(2\ell+1)^3} = -\frac{4A}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{4}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3} = -A\pi\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3} = -\frac{\pi}{4}.$$

Кроме того, согласно (2.7)

$$\|f_2\|_{\mathcal{F}} = \frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3} = \frac{1}{\pi A}.$$

Поэтому имеем

$$\|\Theta\|_{\mathcal{F}\to C} \geq \frac{|(\Theta f_2)(0)|}{\|f_2\|_{\mathcal{F}}} = A\frac{\pi^2}{4}.$$

Эта оценка и (3.22) влекут равенство (3.21) для нормы оператора Θ и тот факт, что норма достигается на функции f_2. Лемма 5 доказана. □

Лемма 6. *Для оператора* (3.19) *на множестве* $\mathcal{Y}^2$ *справедливо представление в виде свертки*

$$(\Theta f)(t) = A\int\limits_0^{\pi}(f(t+u) - f(t-u))y(u)du \tag{3.23}$$

с функцией y, *определенной формулой* (3.1), *и константой* A *— формулой* (3.20).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим вначале, что $f \in \mathcal{F}$. Исходя из представления (1.19) функции f, находим

$$f(t+u) - f(t-u) = \int e^{2\pi t\eta i}\left(e^{2\pi u\eta i} - e^{-2\pi u\eta i}\right)\, d\mu_f(\eta) = 2i\int e^{2\pi t\eta i}\sin(2\pi u\eta)\, d\mu_f(\eta).$$

Пусть ε_0 — произвольное вещественное число со свойством $0 < \varepsilon_0 < \pi$. При $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, используя предыдущее равенство, имеем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}(f(t+u) - f(t-u))y(u)du = 2i\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi t\eta i}\sin(2\pi u\eta)y(u)\, d\mu_f(\eta)du.$$

В силу теорем Фубини и Тонелли [38, гл. III, § 11] последние два интеграла можно поменять местами; в результате получаем соотношение

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}(f(t+u) - f(t-u))y(u)du = 2i\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi t\eta i}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\sin(2\pi u\eta)\, y(u)\, du\right) d\mu_f(\eta). \tag{3.24}$$

Нам предстоит перейти в (3.24) к пределу при $\varepsilon \to +0$. Вначале обоснуем, что в правой части (3.24) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ под знаком первого (внешнего) интеграла. Для этого воспользуемся теоремой Лебега о мажорантной сходимости. Проверим, что интегралы

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\pi}\sin(2\pi u\eta)\, y(u)\, du \tag{3.25}$$

равномерно ограничены по переменным $\eta \in (-\infty, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Поскольку согласно лемме 3 функция (3.2) ограничена на числовой оси, то достаточно доказать, что функция

$$I(\eta, \varepsilon) = \int\limits_0^{\varepsilon}\sin(u\eta)\, y(u)\, du \tag{3.26}$$

по переменным $\eta \in (-\infty, \infty)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ограничена. Запишем

$$I(\eta, \varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \frac{\pi - u}{4 \sin u} \sin(u\eta)\, du = I_1(\eta, \varepsilon) + I_2(\eta, \varepsilon) - I_0(\eta, \varepsilon),$$

где

$$I_0(\eta, \varepsilon) = \frac{1}{4} \int_0^{\varepsilon} \frac{u}{\sin u} \sin(u\eta)\, du, \quad I_1(\eta, \varepsilon) = \frac{\pi}{4} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{u} \sin(u\eta)\, du,$$

$$I_2(\eta, \varepsilon) = \frac{\pi}{4} \int_0^{\varepsilon} \Big(\frac{1}{\sin u} - \frac{1}{u} \Big) \sin(u\eta)\, du.$$

Интегралы $I_0(\eta, \varepsilon)$ и $I_2(\eta, \varepsilon)$, очевидно, равномерно ограничены по η и ε. Сделав замену переменной, интеграл $I_1(\eta, \varepsilon)$ запишем в виде

$$I_1(\eta, \varepsilon) = \frac{\pi}{4} \int_0^{\varepsilon\eta} \frac{\sin u}{u}\, du.$$

Исходя из свойств функции интегральный синус, заключаем, что $I_1(\eta, \varepsilon)$ также равномерно ограничен по η и ε. Нужное свойство функций (3.26) и (3.25) доказано.

Применяя теорему Лебега о мажорантной сходимости, заключаем, что действительно в правой части (3.24) можно перейти к пределу при $\varepsilon \to +0$ под знаком первого (внешнего) интеграла.

Пусть теперь $f \in \mathcal{Y}^2$. Производная f' такой функции всюду непрерывна. Поэтому левая часть (3.24) при $\varepsilon \to +0$ имеет конечный предел

$$\int_0^{\pi} \frac{f(t+u) - f(t-u)}{u}\, uy(u) du = \int_0^{\pi} (f(t+u) - f(t-u))\, y(u) du.$$

Итак, доказано, что для функций $f \in \mathcal{Y}^2$ при любом $t \in (-\infty, \infty)$ имеет место равенство

$$\int_0^{\pi} (f(t+u) - f(t-u)) y(u) du = 2i \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi t\eta i} \Bigg(\int_0^{\pi} \sin(2\pi u\eta)\, y(u)\, du \Bigg) d\mu_f(\eta),$$

которое с помощью (3.2) можно записать в виде

$$\int_0^{\pi} (f(t+u) - f(t-u)) y(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi t\eta i} z(\eta)\, d\mu_f(\eta).$$

Это соотношение лишь мультипликативной константой отличается от (3.23). Лемма 6 доказана. $\square$

Лемма 7. *Для оператора* Θ, *заданного формулой* (3.23), *на множестве* $W^2_{\infty,\infty}$ *имеет место формула*

$$f'(t) - (\Theta f)(t) = A \int_0^{\pi} \big(f''(t-\eta) - f''(t+\eta) \big)\, \Psi(\eta)\, d\eta, \quad f \in W^2_{\infty,\infty}, \tag{3.27}$$

в которой Ψ *есть ядро*

$$\Psi(\eta)=\int\limits_{\eta}^{\pi}(u-\eta)y(u)du, \tag{3.28}$$

обладающее свойством

$$\int\limits_{0}^{\pi}\Psi(\eta)d\eta=\frac{\pi}{2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}. \tag{3.29}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем исходить из представления (3.23) оператора Θ. Воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме Коши

$$f(t+u)=f(t)+uf'(t)+\int\limits_{0}^{u}f''(t+\eta)(u-\eta)d\eta.$$

Имеем

$$f(t+u)-f(t-u)=2uf'(t)+\int\limits_{0}^{u}\big(f''(t+\eta)-f''(t-\eta)\big)\,(u-\eta)d\eta.$$

Поэтому

$$\int\limits_{0}^{\pi}(f(t+u)-f(t-u))y(u)du$$

$$=2f'(t)\int\limits_{0}^{\pi}uy(u)du+\int\limits_{0}^{\pi}\Bigg(\int\limits_{0}^{u}\big(f''(t+\eta)-f''(t-\eta)\big)\,(u-\eta)d\eta\Bigg)y(u)du$$

$$=2f'(t)\int\limits_{0}^{\pi}uy(u)du+\int\limits_{0}^{\pi}\big(f''(t+\eta)-f''(t-\eta)\big)\int\limits_{\eta}^{\pi}(u-\eta)y(u)du\,d\eta.$$

Итак,

$$\int\limits_{0}^{\pi}(f(t+u)-f(t-u))y(u)du=2f'(t)\int\limits_{0}^{\pi}uy(u)du+\int\limits_{0}^{\pi}\big(f''(t+\eta)-f''(t-\eta)\big)\,\Psi(\eta)\,d\eta,$$

где Ψ есть ядро (3.28). Подставляя это соотношение в (3.23), получаем

$$(\Theta f)(t)=2Af'(t)\int\limits_{0}^{\pi}uy(u)du+A\int\limits_{0}^{\pi}\big(f''(t+\eta)-f''(t-\eta)\big)\,\Psi(\eta)\,d\eta. \tag{3.30}$$

При этом в силу (3.1) и (3.12)

$$\int\limits_{0}^{\pi}uy(u)du=\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{u(\pi-u)}{\sin u}\,du=2\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}=\frac{1}{2A}.$$

Поэтому (3.30) совпадает с (3.27).

Далее имеем

$$\int\limits_{0}^{\pi}\Psi(\eta)d\eta=\int\limits_{0}^{\pi}\int\limits_{\eta}^{\pi}(u-\eta)y(u)dud\eta=\int\limits_{0}^{\pi}y(u)\int\limits_{0}^{u}(u-\eta)d\eta\,du=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}u^2y(u)\,du.$$

Применяя формулу (3.13), получаем свойство (3.29). Лемма 7 доказана. □

4. Доказательства основных результатов

4.1. Доказательство теоремы 2

Нам удобно вначале привести доказательство теоремы 2 для конкретного значения

$$N_{2,1}=\frac{\pi^2}{4}\Big(4\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\Big)^{-1}$$

параметра N. С помощью формулы (3.19) определим в пространстве L_2 оператор, который обозначим тем же символом Θ. Точнее, положим

$$(\Theta f)(t)=A\breve{w},\quad w=z\widehat{f},\quad f\in L_2; \tag{4.1}$$

функция z определена формулами (3.2) и (3.1). Оператор (4.1) на множестве достаточно гладких функций, к примеру, на множестве $\mathscr{S}$, есть оператор свертки

$$(\Theta f)(t)=A\int\limits_0^{\pi}(f(t+u)-f(t-u))y(u)du,\quad f\in\mathscr{S}, \tag{4.2}$$

с сингулярным ядром (3.1). Согласно лемме 3 функция z ограничена на оси, поэтому оператор Θ, определенный формулами (4.1) или, что то же самое, (4.2), является линейным ограниченным в пространстве L_2 с нормой

$$\|\Theta\|_{L_2\to L_2}=A\,\|z\|_C=N_{2,1}. \tag{4.3}$$

Теорема 4. *Имеет место равенство*

$$E_{2,1}(N_{2,1})=\frac{\pi}{4},$$

и оператор (4.1) *является в данном случае экстремальным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следствие (4.3) имеем

$$E_{2,1}(N_{2,1})\le U(\Theta)=\sup\{\|f'-\Theta f\|_C\colon f\in W^2_{2,\infty},\ \|f''\|_{L_\infty}\le 1\}.$$

Лемма 7 и (3.20) влекут, что

$$U(\Theta)\le 2A\int\limits_0^{\pi}\Psi(\eta)d\eta=\pi A\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}=\frac{\pi}{4}.$$

Итак, на данном этапе имеем

$$E_{2,1}(N_{2,1})\le U(\Theta)\le\frac{\pi}{4}. \tag{4.4}$$

С другой стороны, согласно теореме 1 имеет место равенство

$$E^{\circ}_{2,1}(N_{2,1})=\frac{K^2_{2,1}}{4N_{2,1}}. \tag{4.5}$$

Подставив в (4.5) оценку (2.15) для $K_{2,1}$, получаем неравенство $E^{\circ}_{2,1}(N_{2,1})\ge\dfrac{\pi}{4}$. К тому же, очевидно, $E_{2,1}\left(N_{2,1}\right)\ge E^{\circ}_{2,1}\left(N_{2,1}\right)$. Поэтому все величины в (4.4) совпадают. Но это и составляет содержание теоремы 4. $\square$

Из приведенных в доказательстве теоремы рассуждений также следует, что в (2.15) имеет место равенство:

$$K_{2,1}=\frac{\pi}{2}\bigg(\frac{4}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\bigg)^{-1/2}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. Воспользуемся формулами (1.13) и (1.10). Операторам (4.1), (4.2) по формуле (1.10) будет соответствовать оператор (1.25). Поэтому теорема 4 влечет теорему 2. $\square$

4.2. Две экстремальные задачи в пространстве $\mathcal{Y}^2$

Для задачи (1.21) при $n=2$, $k=1$ справедлив следующий аналог теоремы 2.

Теорема 5. *При любом $h>0$ имеет место формула*

$$\mathcal{E}_{2,1}(\mathbf{N}(h))=\frac{\pi h}{4},\quad \mathbf{N}(h)=\frac{\pi^2}{2h}\left(4\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}\right)^{-1},$$

и оператор Θ_h, определенный на пространстве $\mathcal{F}$ формулой

$$(\Theta_h f)(t)=Ah^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi t\eta i}z(\eta h)\,d\mu(\eta),\quad \mu=\widehat{f},\tag{4.6}$$

является в данном случае экстремальным.

Д о к а з а т е л ь с т в о теорем 5 и 3 проведем одновременно. Доказательство теоремы 5 начнем со значения $h=1$. В данном случае нам предстоит доказать, что имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{2,1}(N_{2,1})=\frac{\pi}{4}\tag{4.7}$$

и оператор (3.19) является экстремальным. Согласно лемме 5 имеем $\|\Theta\|_{\mathcal{F}\to C}=N_{2,1}$. Поэтому

$$\mathcal{E}_{2,1}(N_{2,1})\le\mathcal{U}(\Theta)=\sup\{\|f'-\Theta f\|_C\colon f\in\mathcal{Y}^2,\ \|f''\|_{L_\infty}\le 1\}.$$

Утверждения леммы 7 и (3.20) влекут, что

$$\mathcal{U}(\Theta)\le 2A\int\limits_0^{\pi}\Psi(\eta)d\eta=\pi A\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{1}{(2\ell+1)^3}=\frac{\pi}{4}.$$

Итак, на данном этапе имеем

$$\mathcal{E}_{2,1}(N_{2,1})\le\mathcal{U}(\Theta)\le\frac{\pi}{4}.\tag{4.8}$$

Воспользуемся теперь неравенством (1.22). В данном случае оно принимает вид

$$\mathcal{E}_{2,1}\left(N_{2,1}\right)\ge\frac{\mathcal{K}_{2,1}^2}{4N_{2,1}}.\tag{4.9}$$

Для $\mathcal{K}_{2,1}$ ранее было получено неравенство (2.8). Подставив его в (4.9), получаем оценку

$$\mathcal{E}_{2,1}\left(N_{2,1}\right)\ge\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, оба неравенства (4.8) обратились в равенства. Так что равенство (4.7) и экстремальность оператора (3.19) доказаны.

Из приведенных рассуждений также следует, что неравенство (2.8) тоже обратилось в равенство. Это, в частности, означает, что функция f_2 является экстремальной в неравенстве (1.26). Но это и составляет утверждение теоремы 3.

По формуле (1.10) оператору (3.19), как нетрудно проверить, соответствует оператор (4.6). Отсюда так же, как и при обосновании теоремы 2, с помощью теоремы 4 следует справедливость утверждений теоремы 5 при любом $h>0$. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Стечкин С.Б.** Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. 1967. Т. 1, вып. 2. С. 137–148.
2. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6. С. 89–124. doi: 10.4213/rm1019 .
3. **Бабенко В.Ф., Корнейчук Н.П., Кофанов В.А., Пичугов С.А.** Неравенства для производных и их приложения Киев: Наук. думка, 2003. 591 с.
4. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 206 с.
5. **Габушин В.Н.** Наилучшее приближение функционалов на некоторых множествах // Мат. заметки. 1970. Т. 8, № 5. С. 551–562.
6. **Babenko Yu., Skorokhodov D.** Stechkin's Problem for differential operators and functionals of first and second orders // J. Approx. Theory. 2013. Vol. 167. P. 173–200. doi: 10.1016/j.jat.2012.12.003 .
7. **Бабенко В.Ф., Парфинович Н.В., Пичугов С.А.** Неравенства типа Колмогорова для норм производных Рисса функций многих переменных с ограниченным в L_∞ лапласианом и смежные задачи // Мат. заметки. 2014. Т. 95, вып. 1. С. 3–17. doi: 10.4213/mzm10196 .
8. **Berdysheva E., Filatova M.** On the best approximation of the infinitesimal generator of a contraction semigroup in a Hilbert space // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, no. 2. P. 40–45. doi: 10.15826/umj.2017.2.006 .
9. **Akopyan R.R.** Approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in an annulus // Ural Math. J. 2017, Vol. 3, no. 2. P. 6–13. doi: 10.15826/umj.2017.2.002 .
10. **Akopyan R.R.** Optimal recovery of a derivative of an analytic function from values of the function given with an error on a part of the boundary // Analysis Math. 2018. Vol. 44, iss. 1. P. 3–19. doi: 10.1007/s10476-018-0102-7 .
11. **Arestov V.V.** On the best approximation of the differentiation operator // Ural Math. J. 2015. Vol. 1, no. 1. P. 20–29. doi: 10.15826/umj.2015.1.002 .
12. **Arestov V.V., Filatova M.A.** Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis // J. Approx. Theory. 2014. Vol. 187. P. 65–81. doi: 10.1016/j.jat.2014.08.001 .
13. **Буслаев А.П., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.** О существовании экстремальной функции в неравенстве для производных // Мат. заметки. 1982. Т. 32. № 6. С. 823–834.
14. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 333 с.
15. **Landau E.** Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. (2). 1913. Vol. 13. P. 43–49. doi: 10.1112/plms/s2-13.1.43 .
16. **Колмогоров А.Н.** О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Избранные тр. Математика, механика. М.: Наука, 1985. С. 252–263. (Уч. зап. Моск. ун-та. Математика, кн. 3, 1939. Т. 30. С. 3–16.)
17. **Hadamard J.** Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // Soc. Math. France, Comptes rendus des Séances. 1914. Vol. 41. P. 68–72.
18. **Боссе Ю.Г. (Шилов Г.Е.)** О неравенствах между производными // Сб. работ студ. научн. кружков МГУ. 1937. Т. 1. С. 68–72.
19. **Габушин В.Н.** О наилучшем приближении оператора дифференцирования в метрике L_p // Мат. заметки. 1972. Т. 12, № 5. С. 531–538.
20. **Тихомиров В.М., Магарил-Ильяев Г.Г.** Неравенства для производных // А.Н. Колмогоров. Избранные тр. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 387–390.
21. **Арестов В.В.** Приближение операторов, инвариантных относительно сдвига // Тр. МИАН. 1975. Т. 138. С. 43–70.
22. **Арестов В. В.** Приближение операторов типа сверки линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН. 1980. Т. 145. С. 3–19.
23. **Арестов В.В.** Приближение инвариантных операторов // Мат. заметки. 1983. Т. 34, № 1. С. 9–29.
24. **Арестов В.В.** О наилучшем приближении оператора дифференцирования // Приближение функций полиномами и сплайнами: сб. ст. Свердловск, 1985. С. 3–14.
25. **Арестов В.В.** Наилучшее приближение неограниченных операторов, инвариантных относительно сдвига, линейными ограниченными операторами // Тр. МИАН. 1992. Т. 198. С. 3–20.
26. **Хермандер Л.** Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 71 с.

27. **Larsen R.** An introduction to the theory of multipliers. Berlin etc.: Springer, 1971. 282 p.
28. **Стечкин С.Б.** Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta Sci. Math. 1965. Vol. 26, № 3–4. P. 225–230 (in Russian).
29. **Арестов В.В.** О наилучшем приближении операторов дифференцирования // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 2. С. 149–154.
30. **Буслаев А.П.** О приближении оператора дифференцирования // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 5. С. 731–742.
31. **Domar Y.** An extremal problem related to Kolmogoroff's inequality for bounded functions // Arkiv för Mat. 1968. Vol. 7, no. 5. P. 433–441.
32. **Субботин Ю.Н., Тайков Л.В.** Наилучшее приближение оператора дифференцирования в пространстве L_2 // Мат. заметки. 1968. Т. 3, № 2. С. 157–164.
33. **Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. 456 с.
34. **Градштейн И.С., Рыжик И.М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
35. **Полиа Г., Сеге Г.** Задачи и теоремы из анализа. Т. 2. М.: Наука, 1978. 432 с.
36. **Маркушевич А.И.** Теория аналитических функций. Т. 1. М.: Наука, 1967. 488 с.
37. **Фихтенгольц Г.М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб.: Изд-во Лань, 1997. 800 с.
38. **Данфорд Н., Шварц Дж.Т.** Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004. 896 с.

Поступила 01.09.2018
После доработки 08.11.2018
Принята к публикации 12.11.2018

Арестов Виталий Владимирович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Уральский федеральный университет;
ведущий науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
г. Екатеринбург
e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru

REFERENCES

1. Stechkin S.B. Best approximation of linear operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 91–99. doi: 10.1007/BF01268056 .
2. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001 .
3. Babenko V.F., Korneichuk N.P., Kofanov V.A., Pichugov S.A. *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya* [Inequalities for derivatives and their applications]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 2003, 591 p. (in Russian).
4. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. *Theory of linear ill-posed problems and its applications.* Utrecht: VSP, 2002, 294 p. ISBN: 978-3111826141 . Original Russian text published in V.K. Ivanov, V.V. Vasin, V.P. Tanana, *Teoriya lineinykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya.* Moscow: Nauka Publ., 1978, 206 p.
5. Gabushin V.N. Best approximations of functionals on certain sets, *Math. Notes*, 1970, vol. 8, no. 5, pp. 780–785. doi: 10.1007/BF01146932 .
6. Babenko Yu., Skorokhodov D. Stechkin's Problem for differential operators and functionals of first and second orders. *J. Approx. Theory*, 2013, vol. 167, pp. 173–200. doi: 10.1016/j.jat.2012.12.003 .
7. Babenko V.F., Parfinovich N.V., Pichugov S.A. Kolmogorov-type inequalities for norms of Riesz derivatives of functions of several variables with Laplacian bounded in L_∞ and related problems. *Math. Notes*, 2014, vol. 95, no. 1, pp. 3–14. doi: 10.1134/S0001434614010015 .
8. Berdysheva E., Filatova M. On the best approximation of the infinitesimal generator of a contraction semigroup in a Hilbert space. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 40–45. doi: 10.15826/umj.2017.2.006 .

9. Akopyan R.R. Approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in an annulus. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 6–13. doi: 10.15826/umj.2017.2.002 .
10. Akopyan R.R. Optimal recovery of a derivative of an analytic function from values of the function given with an error on a part of the boundary. *Analysis Math.*, 2018, vol. 44, no. 1, pp. 3–19. doi: 10.1007/s10476-018-0102-7 .
11. Arestov V.V. On the best approximation of the differentiation operator. *Ural Math. J.*, 2015, vol. 1, no. 1, pp. 20–29. doi: 10.15826/umj.2015.1.002 .
12. Arestov V.V., Filatova M.A. Best approximation of the differentiation operator in the space L_2 on the semiaxis. *J. Approx. Theory*, 2014, vol. 187, pp. 65–81. doi: 10.1016/j.jat.2014.08.001 .
13. Buslaev A.P., Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. Existence of extremal functions in inequalities for derivatives. *Math. Notes*, 1982, vol. 32, no. 6, pp. 898–904. doi: 10.1007/BF01145874 .
14. Stein E.M., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1971, 312 p. ISBN: 9781400883899 . Translated to Russian under the title *Vvedenie v garmonicheskii analiz na evklidovykh prostranstvakh*. Moscow, Mir Publ., 1974, 333 p.
15. Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differentierbare Funktionen. *Proc. London Math. Soc.* (2), 1913, vol. 13, pp. 43–49. doi: 10.1112/plms/s2-13.1.43 .
16. Kolmogorov A.N. On inequalities between upper bounds of consecutive derivatives of an arbitrary function defined on an infinite interval. *Selected works. Mathematics and Mechanics*. Moscow: Nauka Publ., 1985, pp. 252–263. (*Moskov. Gos. Univ., Uchenye Zap.* (*Mat.* 3), 1939, vol. 30, pp. 3–16) (in Russian).
17. Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées. *Soc. math. France, Comptes rendus des Séances*, 1914, vol. 41, pp. 68–72.
18. Bosse Yu.G. (Shilov G.E.) On inequalities between derivatives. *Collection of Works of Student Scientific Societies of Moscow State University*, 1937, vol. 1, pp. 17–27 (in Russian).
19. Gabushin V.N. The best approximation of the differentiation operator in the metric of L_p. *Math. Notes*, 1972, vol. 12, no. 5, pp. 756–760. doi: 10.1007/BF01099059 .
20. Tikhomirov V.M., Magaril-Il'yaev G.G. Inequalities for derivatives. In: *Kolmogorov A.N. Selected Works: Mathematics and Mechanics*, Moscow, Nauka Publ., 1985, pp. 387–390 (in Russian).
21. Arestov V.V. Approximation of operators invariant with respect to a shift. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1975, vol. 138, pp. 45–74.
22. Arestov V.V. Approximation of operators of convolution type by bounded linear operators. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1981, vol. 145, pp. 1–18.
23. Arestov V.V. Approximation of invariant operators. *Math. Notes*, 1983, vol. 34, no. 1, pp. 489–499. doi: 10.1007/BF01160861 .
24. Arestov V.V. On the best approximation of the differentiation operator. In: *Approximation of functions by polynomials and splines, collected papers*, Sverdlovsk, 1985, pp. 3–14 (in Russian).
25. Arestov V.V. Best approximation of unbounded shift-invariant operators by linear bounded operators. *Proc. Steklov. Inst. Math.*, 1994, vol. 198, pp. 1–16.
26. Hörmander L. Estimates for translation invariant operators in L^p spaces. *Acta Mathematica*, 1960, vol. 104, no. 1-2, pp. 93–140. doi: 10.1007/BF02547187 .
27. Larsen R. *An introduction to the theory of multipliers*. Berlin etc.: Springer, 1971, 282 p. doi: 10.1007/978-3-642-65030-7 .
28. Stechkin S.B. Inequalities between norms of derivatives of arbitrary functions. *Acta Sci. Math.*, 1965, vol. 26, no. 3-4, pp. 225–230 (in Russian).
29. Arestov V.V. On the best approximation of differentiation operators. *Math. Notes*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 100–103. doi: 10.1007/BF01268057 .
30. Buslaev A.P. Approximation of a differentiation operator. *Math. Notes*, 1981, vol. 29, no. 5, pp. 372–378. doi: 10.1007/BF01158361 .
31. Domar Y. An extremal problem related to Kolmogoroff's inequality for bounded functions. *Arkiv för Mat.*, 1968, vol. 7, no. 5, pp. 433–441. doi: 10.1007/BF02590991 .
32. Subbotin Yu.N., Taikov L.V. Best approximation of a differentiation operator in L_2-space, *Math. Notes*, 1968, vol. 3, no. 2, pp. 100–105. doi: 10.1007/BF01094328 .
33. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. *Inequalities*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1934, 314 p. ISBN(2nd ed.): 0-521-05206-8 . Translated to Russian under the title *Neravenstva*. Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1948, 456 p.

34. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. *Table of integrals, series, and products.* N Y; London; Oxford: Elsevier, Acad. Press, 2007, 1172 p. ISBN: 978-0-12-373637-6 . Translated to Russian under the title *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii.* 2011, Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011, 1232 p.
35. Pólya G., Szegő G. *Problems and theorems in analysis.* Vol. 2. Berlin: Springer, 1972, 392 p. ISBN: 978-3-540-63686-1 . Translated to Russian under the title *Zadachi i teoremy iz analiza.* T. 2. Moscow: Nauka Publ., 1978, 432 p.
36. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskikh funktsii* [Theory of analytic functions]. Vol. 1. Moscow: Nauka Publ., 1967, 488 p. ISBN(3rd ed.): 978-5-8114-0928-0 .
37. Fikhtengol'ts G.M. *Kurs differentsial'nogo i integral'nogo ischisleniya* [A course in differential and integral calculus]. Vol. 2. St.-Petersburg: Lan' Publ., 1997, 800 p. ISBN(10th ed.): 978-5-8114-0674-6.
38. Dunford N., Schwartz J.T. *Linear operators. Part* 1: *General theory.* N Y: Interscience, 1988. 872 p. ISBN: 978-0-471-60848-6 . Translated to Russian under the title *Lineinye operatory. Obshchaya teoriya.* Moscow: Editorial URSS, 2004, 896 p.

Received September 1, 2018
Revised November 08, 2018
Accepted November 12, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Vitalii Vladimirovich Arestov, Dr. Phys.-Math. Sci., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620000 Russia; N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620990 Russia, e-mail: vitalii.arestov@urfu.ru .