ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.5

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА КОЛМОГОРОВА В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

М. Ш. Шабозов, В. Д. Сайнаков

Пусть $\mathbf{z} := (\xi, \zeta) = (re^{it}, \rho e^{i\tau}), 0 \le r, \rho < \infty, 0 \le t, \tau \le 2\pi,$ — точка двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, $U^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ — единичный бикруг в $\mathbb{C}^2$, $\mathcal{A}(U^2)$ — класс аналитических в бикруге U^2 функций, $B_2 := B_2(U^2)$ — пространство Бергмана функций $f \in \mathcal{A}(U^2)$, для которых

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2(U^2)} = \left(\frac{1}{4\pi^2}\iint_{(U^2)} |f(\xi,\zeta)|^2 d\sigma_\xi d\sigma_\zeta\right)^{1/2} < +\infty,$$

где $d\sigma_\xi := dxdy, d\sigma_\zeta := dudv$, а интеграл понимается в смысле Лебега. В работе С. Б. Вакарчука и М. Б. Вакарчука (2013) доказано, что при выполнение некоторых условий относительно коэффициентов Тейлора $c_{pq}(f)$ в разложении $f(\xi, \zeta)$ в двойной ряд Тейлора имеет место точное неравенство Колмогорова вида

$$\left\|f^{(k-\mu,l-\nu)}\right\|_2 \le \mathcal{C}_{k,l}(\mu,\nu)\,\|f\|_2^{\mu\nu/(kl)}\,\left\|f^{(k,0)}\right\|_2^{(1-\mu/k)\nu/l}\,\left\|f^{(0,l)}\right\|_2^{(1-\nu/l)\mu/k}\,\left\|f^{(k,l)}\right\|_2^{(1-\mu/k)(1-\nu/l)},$$

где числовые коэффициенты $\mathcal{C}_{k,l}(\mu,\nu)$ конкретно определены параметрами $k, l \in \mathbb{N}, \mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$. В данной статье найдено точное неравенство типа Колмогорова для наилучших приближений $\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2$ функций $f \in B_2(U^2)$ обобщенными полиномами (квазиполиномами):

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2$$

$$\le \frac{\alpha_{m,k-\mu}\,\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(n-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(m+1)^{\mu/(2k)}\,(n+1)^{\nu/(2l)}}{(\alpha_{m,k})^{1-\mu/m}\,(\alpha_{n,l})^{1-\nu/l}\,[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)]^{1/2}}$$

$$\times \big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\big)^{\frac{\mu\nu}{kl}}\,\big(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l}\big(f^{(k,0)}\big)_2\big)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}$$

$$\times \big(\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\big(f^{(0,l)}\big)_2\big)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\,\big(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2\big)^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})},$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_2^{(k,l)}$, для которой полученное неравенства обращается в равенство.

Ключевые слова: неравенство типа Колмогорова, пространство Бергмана, аналитическая функция, квазиполином, верхняя грань.

M. Sh. Shabozov, V. D. Sainakov. On Kolmogorov type inequalities in the Bergman space for functions of two variables.

Suppose that $\mathbf{z} := (\xi, \zeta) = (re^{it}, \rho e^{i\tau})$, where $0 \le r, \rho < \infty$ and $0 \le t, \tau \le 2\pi$, is a point in the two-dimensional complex space $\mathbb{C}^2$; $U^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ is the unit bidisk in $\mathbb{C}^2$; $\mathcal{A}(U^2)$ is the class of functions analytic in U^2; and $B_2 := B_2(U^2)$ is the Bergman space of functions $f \in \mathcal{A}(U^2)$ such that

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2(U^2)} = \left(\frac{1}{4\pi^2}\iint_{(U^2)} |f(\xi,\zeta)|^2 d\sigma_\xi d\sigma_\zeta\right)^{1/2} < +\infty,$$

where $d\sigma_\xi := dxdy$, $d\sigma_\zeta := dudv$, and the integral is understood in the Lebesgue sense. S. B. Vakarchuk and M. B. Vakarchuk (2013) proved that, under some conditions on the Taylor coefficients $c_{pq}(f)$ in the expansion of $f(\xi, \zeta)$ in a double Taylor series, the following exact Kolmogorov inequality holds:

$$\left\|f^{(k-\mu,l-\nu)}\right\|_2 \le \mathcal{C}_{k,l}(\mu,\nu)\,\|f\|_2^{\mu\nu/(kl)}\,\left\|f^{(k,0)}\right\|_2^{(1-\mu/k)\nu/l}\,\left\|f^{(0,l)}\right\|_2^{(1-\nu/l)\mu/k}\,\left\|f^{(k,l)}\right\|_2^{(1-\mu/k)(1-\nu/l)},$$

where the numerical coefficients $\mathcal{C}_{k,l}(\mu,\nu)$ are explicitly defined by the parameters $k, l \in \mathbb{N}$ and $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$. We find an exact Kolmogorov type inequality for the best approximations $\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2$ of functions $f \in B_2(U^2)$ by generalized polynomials (quasipolynomials):

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2$$

$$\leq \frac{\alpha_{m,k-\mu}\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(n-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(m+1)^{\mu/(2k)}(n+1)^{\nu/(2l)}}{(\alpha_{m,k})^{1-\mu/m}(\alpha_{n,l})^{1-\nu/l}\left[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\right]^{1/2}}$$

$$\times \left(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\right)^{\frac{\mu\nu}{kl}}\left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l}\big(f^{(k,0)}\big)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}$$

$$\times \left(\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\big(f^{(0,l)}\big)_2\right)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\left(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2\right)^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}$$

in the sense that there exists a function $f_0 \in B_2^{(k,l)}$ for which the inequality turns into an equality.

Keywords: Kolmogorov type inequality, Bergman space, analytic function, quasipolynomial, upper bound.

MSC: 42C10, 47A58, 30E10, 32E05

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-270-282

Посвящается 75-летию профессора В. В. Арестова

1. Введение

В монографии [1] приведены и систематизированы результаты исследований по неравенствам для норм промежуточных производных (неравенствам типа Колмогорова) функций с различными областями определения, как классических, так и полученных в последнее время. При этом основное внимание уделено точным неравенствам такого типа. В [2] дан обстоятельный обзор неравенств типа Колмогорова, где получены наилучшие константы и анализируется их связь с задачей Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования на различных классах функций. Следует отметить, что почти все результаты в [1; 2] получены для вещественнозначных функций. Естественно, что представляет большой интерес получение неравенств типа Колмогорова для функций комплексного переменного. Для функции одного комплексного переменного некоторые результаты можно найти в [3–6]. В случае функций нескольких переменных окончательных результатов значительно меньше (см. [7; 8]). В данной работе доказано неравенство типа Колмогорова для наилучших приближений функций f двух комплексных переменных, аналитических в бикруге квазиполиномами [9] (или "углами" [10]) и дано его приложение к экстремальной задаче нахождения точной верхней грани наилучшего совместного приближения самой функции и ее последовательных производных указанными квазиполиномами. Статью следует рассматривать как дальнейшее развитие и распространение идей и подходов, изложенных в работах [7; 8].

Пусть $\mathbf{z} := (\xi,\zeta) = (re^{it},\rho e^{i\tau})$, где $0 \leq r,\rho < \infty,\ 0 \leq t,\tau \leq 2\pi,$ — точка двумерного комплексного пространства $\mathbb{C}^2$, $U^2 := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ — единичный бикруг в $\mathbb{C}^2$.

Класс всех аналитических в бикруге U^2 функций $f(z) := f(\xi,\zeta)$ обозначим через $\mathcal{A}(U^2)$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$ полагаем

$$M_2(f;r,\rho) := \left(\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|f(re^{it},\rho e^{i\tau})\right|^2 dtd\tau\right)^{1/2},$$

где $0 \leq r,\rho < 1$. Символом $B_2(U^2)$ обозначим пространство Бергмана, состоящее из функций $f \in \mathcal{A}(U^2)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|_2 := \|f\|_{B_2(U^2)} = \left(\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{(U^2)}|f(\xi,\zeta)|^2 d\sigma_\xi d\sigma_\zeta\right)^{1/2} = \left(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 r\rho M_2^2(f;r,\rho)drd\rho\right)^{1/2}, \tag{1.1}$$

где $d\sigma_\xi := dxdy, d\sigma_\zeta := dudv, \xi := x+iy, \zeta = u+iv, x,y,u,v \in \mathbb{R}, x^2+y^2 = r^2 < 1, u^2+v^2 = \rho^2 < 1.$

Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$, принадлежащей пространству $B_2(U^2)$, исходя из разложения

$$f(\xi,\zeta) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q, \tag{1.2}$$

где $c_{pq}(f)$ — коэффициенты Тейлора функции f, в силу (1.1) и равенства Парсеваля запишем соотношение

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)} \right)^{1/2}.$$

Через $B_2^{(k,l)}(U^2)$, где $k, l \in \mathbb{N}$, обозначим класс функций $f \in \mathcal{A}(U^2)$, у которых смешанные производные $f^{(k,l)}$ по переменным ξ, ζ и частные производные $f^{(k,0)}$ и $f^{(0,l)}$ соответственно по переменной ξ и ζ принадлежат пространству $B_2(U^2)$, т. е. $B_2^{(k,l)}(U^2) \subset B_2(U^2)$. Для натуральных $p \geq k, q \geq l$ числа $\alpha_{p,k}$ и $\alpha_{q,l}$ определяем равенствами

$$\alpha_{p,k} = p(p-1)\cdots(p-k+1), \quad \alpha_{q,l} = q(q-1)\cdots(q-l+1).$$

В [8] при некоторых естественных ограничениях на коэффициенты Тейлора $c_{p,q}(f)$ функции $f \in B_2^{(k,l)}(U^2)$ доказано неравенство типа Колмогорова вида

$$\left\| f^{(k-\mu,l-\nu)} \right\|_2 \leq \frac{\alpha_{k,k-\mu}(k+1)^{\mu/(2k)}}{\alpha_{k,k}^{1-\mu/k}(\mu+1)^{1/2}} \, \frac{\alpha_{l,l-\nu}(l+1)^{\nu/(2l)}}{\alpha_{l,l}^{1-\nu/l}(\nu+1)^{1/2}}$$

$$\times \|f\|_2^{\mu\nu/(kl)} \left\| f^{(k,0)} \right\|_2^{(1-\mu/k)\nu/l} \left\| f^{(0,l)} \right\|_2^{(1-\nu/l)\mu/k} \left\| f^{(k,l)} \right\|_2^{(1-\mu/k)(1-\nu/l)},$$

которое является неулучшаемым в том смысле, что существует функция $f_0 \in B_2^{(k,l)}(U^2)$, для которой оно обращается в равенство.

2. Вспомогательные утверждения

Приведем некоторые известные факты и определения, нужные нам в дальнейшем [7;11;12]. Пусть $(\mathbb{Z}_1, \|\cdot\|_{\mathbb{Z}_1})$ и $(\mathbb{Z}_2, \|\cdot\|_{\mathbb{Z}_2})$ — два линейных нормированных пространства аналитических в единичном круге функций одного комплексного переменного, а $\mathfrak{M}_m \subset \mathbb{Z}_1$ и $\mathfrak{N}_n \subset \mathbb{Z}_2$ — конечномерные подпространства с базисами $\{a_p(\xi)\}_{p=0}^m$ и $\{b_q(\zeta)\}_{q=0}^n$ соответственно. Положим

$$G(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n) := \mathbb{Z}_2 \otimes \mathfrak{M}_m \oplus \mathbb{Z}_1 \otimes \mathfrak{N}_n, \tag{2.1}$$

где $\otimes$ и $\oplus$ означают соответственно операции тензорного произведения и прямой суммы множеств. Очевидно, что каждый элемент множеств (2.1) представим в виде

$$g_{m,n}(\xi, \zeta) := \sum_{p=0}^{m} \varphi_p(\zeta) a_p(\xi) + \sum_{q=0}^{n} \psi_q(\xi) b_q(\zeta), \tag{2.2}$$

где последовательности функций $\{\varphi_p(\zeta)\}_{p=0}^m \subset \mathbb{Z}_2$ и $\{\psi_l(\xi)\}_{l=0}^n \subset \mathbb{Z}_1$ — произвольные наборы функций из указанных пространств. Функции вида (2.2) называют *обобщенными квазиполиномами* [9] или “*углами*” [10]. Пусть теперь $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}_2$ — линейное нормированное пространство аналитических в единичном бикруге $U^2 := \{(\xi, \zeta) : |\xi| < 1, |\zeta| < 1\}$ функций $f(\mathbf{z}) := f(\xi, \zeta)$ двух комплексных переменных, а множество $G(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n) \subset \mathbb{Z}$. Для произвольной функции $f \in \mathbb{Z}$ равенством

$$\mathscr{E}_{m,n}(f)_{\mathbb{Z}} := \mathscr{E}\left(f, G(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n)\right)_{\mathbb{Z}} = \inf\left\{\|f - g_{m,n}\| : g_{m,n} \in G(\mathfrak{M}_m, \mathfrak{N}_n)\right\} \tag{2.3}$$

определим величину наилучшего приближения функции f элементами множества (2.1) или наилучшим приближением функции f “углом”. Мы рассмотрим случай $\mathbb{Z} := B_2(U^2)$, $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}_2 = B_2(U), \mathfrak{M}_m := \mathcal{P}_m, \mathfrak{N}_n := \mathcal{P}_n$, где $\mathcal{P}_m$ и $\mathcal{P}_n$ — соответственно множество комплексных алгебраических полиномов одного переменного степени не более m и n. В этом случае

$$G(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n) := \left\{ g_{m,n}(\xi, \zeta) : g_{m,n}(\xi, \zeta) = \sum_{p=0}^{m} \varphi_p(\zeta)\xi^p + \sum_{q=0}^{n} \psi_q(\xi)\zeta^p : \varphi_p, \psi_q \in B_2 \right\}. \tag{2.4}$$

Множество (2.4) называют *подпространством квазиполиномов* [9]. Для аналитической функции $f \in \mathcal{A}(U^2)$ с разложением в ряд Тейлора (1.2) *квазиполиномом Тейлора порядка* (m,n), m, $n \in \mathbb{N}$ называют выражение

$$T_{m,n}(f;\xi,\zeta) := \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{n} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q + \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{\infty} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q - \sum_{p=0}^{m}\sum_{q=0}^{n} c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q. \tag{2.5}$$

Очевидно, что $T_{m,n}(f) \in G(\mathcal{P}_m, \mathcal{P}_n)$.

3. Основные результаты

В этом разделе излагаем основные результаты, полученные в данной работе. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Среди всех обобщенных полиномов вида*

$$g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta) = \sum_{p=0}^{m-1}\varphi_p(\zeta)\xi^p + \sum_{q=0}^{n-1}\psi_q(\xi)\zeta^q, \tag{3.1}$$

принадлежащих множеству $G(\mathcal{P}_{m-1}, \mathcal{P}_{n-1})$, наилучшее приближение функции $f \in B_2(U^2)$ доставляет ее квазиполином Тейлора $T_{m-1,n-1}(f)$ порядка $(m-1, n-1)$. При этом

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2 = \|f - T_{m-1,n-1}(f)\|_2^2 = \sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный элемент $g_{m-1,n-1} \in G(\mathcal{P}_{m-1}, \mathcal{P}_{n-1})$ вида (3.1). Поскольку $\{\varphi_p(\zeta)\}_{p=0}^{m-1} \subset B_2(U), \{\psi_q(\xi)\}_{q=0}^{n-1} \subset B_2(U)$, то в смысле сходимости в метрике $B_2(U)$ справедливы равенства

$$\varphi_p(\zeta) = \sum_{q=0}^{\infty} c_q(\varphi_p)\zeta^q, \quad p = \overline{0, m-1}, \tag{3.3}$$

$$\psi_q(\xi) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p(\psi_q)\xi^p, \quad q = \overline{0, n-1}. \tag{3.4}$$

Подставляя вместо функций $\varphi_p(\zeta), p = \overline{0, m-1}$, $\psi_q(\xi), q = \overline{0, n-1}$, в равенство (3.1) их разложения в ряды, стоящие в правых частях (3.3) и (3.4) в смысле сходимости в пространстве $B_2(U^2)$, получаем соотношение

$$g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta) := \sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{\infty} c_q(\varphi_p)\xi^p\zeta^q + \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{n-1} c_p(\psi_q)\xi^p\zeta^q. \tag{3.5}$$

Далее, в силу того что каждая из систем функций $\{\xi^p\}_{p=0}^{\infty}$ и $\{\zeta^q\}_{q=0}^{\infty}$ является ортогональной в круге U (см., например, [13, с. 201]), то система $\{\xi^p\zeta^q\}_{p,q=0}^{\infty}$ является ортогональной в бикруге U^2. Имеем

$$\|f - g_{m-1,n-1}\|_2^2 = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{(U^2)} |f(\xi,\zeta) - g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta)|^2\, d\sigma_\xi d\sigma_\zeta$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{(U^2)} (f(\xi,\zeta) - g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta))\left(\overline{f(\xi,\zeta)} - \overline{g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta)}\right) d\sigma_\xi d\sigma_\zeta. \tag{3.6}$$

Пользуясь формулами (1.2) и (3.5), после некоторых простых вычислений находим

$$\begin{aligned} &f(\xi,\zeta)-g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta) \\ &=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}(c_{pq}(f)-c_q(\varphi_p)-c_p(\psi_q))\xi^p\zeta^q+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=n}^{\infty}(c_{pq}(f)-c_q(\varphi_p))\xi^p\zeta^q \\ &\quad+\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=0}^{n-1}(c_{pq}(f)-c_p(\psi_q))\xi^p\zeta^q+\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Аналогичным образом для сопряженного выражения имеем

$$\begin{aligned} &\overline{f(\xi,\zeta)}-\overline{g_{m-1,n-1}(\xi,\zeta)} \\ &=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}(\overline{c_{pq}(f)}-\overline{c_q(\varphi_p)}-\overline{c_p(\psi_q)})\bar\xi^p\bar\zeta^q+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=n}^{\infty}(\overline{c_{pq}(f)}-\overline{c_q(\varphi_p)})\bar\xi^p\bar\zeta^q \\ &\quad+\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=0}^{n-1}(\overline{c_{pq}(f)}-\overline{c_p(\psi_q)})\bar\xi^p\bar\zeta^q+\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\overline{c_{pq}(f)}\,\bar\xi^p\bar\zeta^q. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Подставляя правые части равенств (3.7) и (3.8) вместо выражений $f-g_{m-1,n-1}$ и $\bar f-\bar g_{m-1,n-1}$ внутри интеграла в правой части (3.6) и выполнив простые выкладки с учетом ортогональности системы $\{\xi^p\zeta^q\}_{p,q=0}^{\infty}$ в бикруге U^2, получаем

$$\begin{aligned} \|f-g_{m-1,n-1}\|_2^2&=\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{|c_{pq}(f)-c_q(\varphi_p)-c_p(\psi_q)|^2}{4(p+1)(q+1)}+\sum_{p=0}^{m-1}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f)-c_q(\varphi_p)|^2}{4(p+1)(q+1)} \\ &\quad+\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=0}^{n-1}\frac{|c_{pq}(f)-c_p(\psi_q)|^2}{4(p+1)(q+1)}+\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Из (3.9) сразу вытекает, что величина (2.3) принимает минимальное значение, равное величине (3.2), тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} c_{pq}(f)=c_q(\varphi_p)+c_p(\psi_q), & p=\overline{0,m-1};\quad q=\overline{0,n-1}, \\ c_{pq}(f)=c_q(\varphi_p), & p=\overline{0,m-1};\quad q=n,n+1,\ldots, \\ c_{pq}(f)=c_p(\psi_q), & q=\overline{0,n-1};\quad p=m,m+1,\ldots. \end{cases}$$

Подставляя в правую часть равенства (3.5) вместо коэффициентов $c_q(\varphi_p)$ и $c_p(\psi_q)$ их значение через коэффициенты $c_{pq}(f)$, мы получаем квазиполином Тейлора порядка $(m-1,n-1)$ в виде равенства (2.5), чем и завершаем доказательство леммы 1.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $m>k\ge\mu\ge 1, n>l\ge\nu\ge 1,\ m,n,l,\mu,\nu\in\mathbb{N}$. Тогда для любой функции $f\in B_2^{(k,l)}(U^2)$ выполняется неравенство*

$$\begin{aligned} &\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2 \\ &\le\frac{\alpha_{m,k-\mu}\,\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(n-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(m+1)^{\mu/(2k)}\,(n+1)^{\nu/(2l)}}{(\alpha_{m,k})^{1-\mu/m}\,(\alpha_{n,l})^{1-\nu/l}\big[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\big]^{1/2}} \\ &\quad\times\big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\big)^{\frac{\mu\nu}{kl}}\,\big(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l}\big(f^{(k,0)}\big)_2\big)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}} \\ &\quad\times\big(\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\big(f^{(0,l)}\big)_2\big)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\,\big(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2\big)^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

которое обращается в равенство для функции $f_0(\xi,\zeta)=\xi^m\zeta^n\in B_2^{(k,l)}(U^2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что для произвольной $f\in B_2^{(k,l)}(U^2)$ в силу равенств (1.2) и (2.5) имеет место равенство

$$R_{m,n}(f;\xi,\zeta):=f(\xi,\zeta)-T_{m-1,n-1}(f;\xi,\zeta)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}c_{pq}(f)\xi^p\zeta^q. \tag{3.11}$$

При этом из того, что $f\in B_2^{(k,l)}(U^2)$, вытекает, что $f\in B_2^{(k-\mu,l-\nu)}(U^2)$, а из (3.11) следует, что $R_{m,n}(f)\in B_2^{(m-k,n-l)}(U^2)$. Легко проверить, что при выполнении условия теоремы относительно указанных числовых параметров справедливы равенства

$$T_{m-1,n-1}^{(k,0)}(f;\xi,\zeta)=T_{m-k-1,n-1}\left(f^{(k,0)};\xi,\zeta\right),$$

$$T_{m-1,n-1}^{(0,l)}(f;\xi,\zeta)=T_{m-1,n-l-1}\left(f^{(0,l)};\xi,\zeta\right),$$

$$T_{m-1,n-1}^{(k,l)}(f;\xi,\zeta)=T_{m-k-1,n-l-1}\left(f^{(k,l)};\xi,\zeta\right).$$

Из этих равенств и соотношения (3.11) при $m\ge k\ge\mu\ge1, n\ge l\ge\nu\ge1$ получаем

$$R_{m,n}^{(k,0)}(f;\xi,\zeta)=f^{(k,0)}(\xi,\zeta)-T_{m-1,n-1}^{(k,0)}(f;\xi,\zeta)$$

$$=f^{(k,0)}(\xi,\zeta)-T_{m-k-1,n-1}\big(f^{(k,0)};\xi,\zeta\big)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\alpha_{p,k}c_{pq}(f)\xi^{p-k}\zeta^q. \tag{3.12}$$

Аналогичным образом будем иметь

$$R_{m,n}^{(0,l)}(f;\xi,\zeta)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\alpha_{q,l}c_{pq}(f)\xi^p\zeta^{q-l}, \tag{3.13}$$

$$R_{m,n}^{(k,l)}(f;\xi,\zeta)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\alpha_{p,k}\alpha_{q,l}c_{pq}(f)\xi^{p-k}\zeta^{q-l}, \tag{3.14}$$

$$R_{m,n}^{(k-\mu,l-\nu)}(f;\xi,\zeta)=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\alpha_{p,k-\mu}\alpha_{q,l-\nu}c_{pq}(f)\xi^{p-k+\mu}\zeta^{q-l+\nu}. \tag{3.15}$$

Из равенства (3.11) в силу равенства (3.2) имеем

$$\|R_{m,n}(f)\|_2^2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}=\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2^2, \tag{3.16}$$

а из соотношений (3.12)–(3.15) сразу следуют равенства

$$\big\|R_{m,n}^{(k,0)}(f)\big\|_2^2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{p,k}^2}{4(p-k+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2=\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}^2\big(f^{(k,0)}\big)_2, \tag{3.17}$$

$$\big\|R_{m,n}^{(0,l)}(f)\big\|_2^2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{q,l}^2}{4(p+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2=\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}^2\big(f^{(0,l)}\big)_2, \tag{3.18}$$

$$\big\|R_{m,n}^{(k,l)}(f)\big\|_2^2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{p,k}^2\,\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2=\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}^2\big(f^{(k,l)}\big)_2, \tag{3.19}$$

$$\left\|R_{m,n}^{(k-\mu,l-\nu)}(f)\right\|_2^2$$

$$=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{p,k-\mu}^2\,\alpha_{q,l-\nu}^2}{4(p-k+\mu+1)(q-l+\nu+1)}|c_{pq}(f)|^2=\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}^2\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2. \tag{3.20}$$

Оценим теперь величину (3.20) сверху посредством величин (3.16)–(3.19). Имеем

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}^2\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{p,k-\mu}^2\,\alpha_{q,l-\nu}^2}{4(p-k+\mu+1)(q-l+\nu+1)}|c_{pq}(f)|^2$$

$$=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\Big[\frac{\alpha_{p,k}^2\,\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}$$

$$\times\Big[\frac{\alpha_{p,k}^2}{4(p-k+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}\Big[\frac{\alpha_{q,l}^2}{4(p+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}$$

$$\times\Big[\frac{1}{4(p+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{\frac{\mu\nu}{kl}}\Big[\frac{\alpha_{p,k-\mu}\,\alpha_{q,l-\nu}}{\alpha_{p,k}^{1-\mu/k}\,\alpha_{q,l}^{1-\nu/l}}\Big]^2$$

$$\times\Big[\frac{(p-k+1)^{1-\mu/k}\,(q-l+1)^{1-\nu/l}(p+1)^{\mu/k}(q+1)^{\nu/l}}{(p-k+\mu+1)(q-l+\nu+1)}\Big]. \tag{3.21}$$

Полагаем

$$\varphi_{k,\mu}(p):=\frac{\alpha_{p,k-\mu}\,(p-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(p+1)^{\mu/(2k)}}{\alpha_{p,k}^{1-\mu/k}\,(p-k+\mu+1)^{1/2}},$$

$$\varphi_{l,\nu}(q):=\frac{\alpha_{q,l-\nu}\,(q-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(q+1)^{\nu/(2l)}}{\alpha_{q,l}^{1-\nu/l}\,(q-l+\nu+1)^{1/2}}.$$

Из (3.21) получаем

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}^2\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2\le\Big(\sup_{p\ge m}\varphi_{k,\mu}(p)\Big)^2\Big(\sup_{q\ge n}\varphi_{l,\nu}(q)\Big)^2$$

$$\times\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\Big[\frac{\alpha_{p,k}^2\,\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}\Big[\frac{\alpha_{p,k}^2}{4(p-k+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}$$

$$\times\Big[\frac{\alpha_{q,l}^2}{4(p+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\Big[\frac{1}{4(p+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{\frac{\mu\nu}{kl}}. \tag{3.22}$$

Если теперь воспользоваться двумерным аналогом неравенства Гельдера для сумм (см., например, [7; 14, с. 36])

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}^{\alpha}b_{pq}^{\beta}d_{pq}^{\gamma}\delta_{pq}^{c}\le\Big(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}a_{pq}\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}b_{pq}\Big)^{\beta}\Big(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}d_{pq}\Big)^{\gamma}\Big(\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\delta_{pq}\Big)^{c}, \tag{3.23}$$

где $a_{pq}, b_{pq}, d_{pq}, \delta_{pq}$ — неотрицательные числа, $\alpha+\beta+\gamma+c=1$, то, учитывая равенства (3.16)–(3.19), из неравенства (3.22) в силу (3.23) имеем

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}^2\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2\le\Big(\sup_{p\ge m}\varphi_{k,\mu}(p)\Big)^2\Big(\sup_{q\ge n}\varphi_{l,\nu}(q)\Big)^2$$

$$\times\Big[\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{p,k}^2\,\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}$$

$$\times\Big[\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{p,k}^2}{4(p-k+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}$$

$$\times\Big[\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{q,l}^2}{4(p+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\Big[\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{1}{4(p+1)(q+1)}|c_{pq}(f)|^2\Big]^{\frac{\mu\nu}{kl}}$$

$$=\Big(\sup_{p\geq m}\varphi_{k,\mu}(p)\Big)^2\Big(\sup_{q\geq n}\varphi_{l,\nu}(q)\Big)^2\Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\Big)^{\frac{2\mu\nu}{kl}}$$

$$\times\Big(\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}(f^{(k,0)})_2\Big)^{2(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}\Big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\Big)^{2(1-\frac{\nu}{l})\frac{\mu}{k}}\Big(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}(f^{(k,l)})_2\Big)^{2(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}.\quad(3.24)$$

Из результата работы [5] вытекает, что

$$\sup_{p\geq m}\varphi_{k,\mu}(p)=\varphi_{k,\mu}(m),\quad \sup_{q\geq n}\varphi_{l,\nu}(q)=\varphi_{l,\nu}(n).\quad(3.25)$$

Неравенство (3.10) с учетом (3.25) следует из (3.24). Докажем точность неравенства (3.10) для функции

$$f_0(\xi,\zeta)=\xi^m\zeta^n\in B_2^{(k,l)}(U^2),\quad m>k,\quad n>l,\quad m,n,k,l\in\mathbb{N}.$$

Для этой функции в силу (3.16)–(3.20) имеем

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_0)_2=\frac{1}{2\sqrt{(m+1)(n+1)}},\quad(3.26)$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\big(f_0^{(k,0)}\big)_2=\frac{\alpha_{m,k}}{2\sqrt{(m-k+1)(n+1)}},\quad(3.27)$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\big(f_0^{(0,l)}\big)_2=\frac{\alpha_{n,l}}{2\sqrt{(m+1)(n-l+1)}},\quad(3.28)$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\big(f_0^{(k,l)}\big)_2=\frac{\alpha_{m,k}\,\alpha_{n,l}}{2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)}},\quad(3.29)$$

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f_0^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2=\frac{\alpha_{m,k-\mu}\,\alpha_{n,l-\nu}}{2\sqrt{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}.\quad(3.30)$$

Подставляя равенства (3.26)–(3.29) в правую часть неравенства (3.10), убедимся, что оно обращается в равенство (3.30), откуда и следует утверждение теоремы 1.

Нам далее понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть $m,n,k,l\in\mathbb{N}$ удовлетворяют неравенствам $m\geq k\geq 1, n\geq l\geq 1$. Тогда для произвольной $f\in B_2^{(k,l)}$ справедливы соотношения*

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\leq\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}}\,\frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}}\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2,\quad(3.31)$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\big(f^{(k,0)}\big)_2\leq\sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}}\,\frac{1}{\alpha_{n,l}}\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2,\quad(3.32)$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\big(f^{(0,l)}\big)_2\leq\sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}\,\frac{1}{\alpha_{m,k}}\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2.\quad(3.33)$$

Для функции $f_0(\xi,\zeta)=\xi^m\zeta^n\in B_2^{(k,l)}$ все неравенства (3.31)–(3.33) *обращаются в равенство.*

Доказательство. Не умаляя общности, для произвольной функции $f\in B_2^{(k,l)}$ докажем неравенство (3.31). Заметим, что для такой функции в силу (3.19) имеет место соотношение

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}^2\big(f^{(k,l)}\big)_2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{p,k}^2\,\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}|c_{pq}(f)|^2,$$

а потому, пользуясь доказанным в [15] соотношением

$$\sup_{\substack{p\geq m\\ q\geq n}}\frac{(p-k+1)(q-l+1)}{(p+1)(q+1)}\,\frac{1}{\alpha_{p,k}^2\,\alpha_{q,l}^2}=\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}\,\frac{1}{\alpha_{m,k}^2\,\alpha_{n,l}^2},$$

будем иметь

$$\mathscr{E}^2_{m-1,n-1}(f)_2=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{|c_{pq}(f)|^2}{4(p+1)(q+1)}$$

$$=\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{p,k}^2\,\alpha_{q,l}^2}\,\frac{(p-k+1)(q-l+1)}{(p+1)(q+1)}\,\frac{\alpha_{p,k}^2\,\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}\,|c_{pq}(f)|^2$$

$$=\frac{1}{\alpha_{m,k}^2\,\alpha_{n,l}^2}\,\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}\,\sum_{p=m}^{\infty}\sum_{q=n}^{\infty}\frac{\alpha_{p,k}^2\,\alpha_{q,l}^2}{4(p-k+1)(q-l+1)}\,|c_{pq}(f)|^2$$

$$=\frac{1}{\alpha_{m,k}^2\,\alpha_{n,l}^2}\,\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}\,\mathscr{E}^2_{m-k-1,n-l-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2,$$

откуда и следует неравенство (3.31). Аналогичным образом доказываются два других неравенства (3.32) и (3.33).

Непосредственным вычислением можно убедиться, что все неравенства (3.31)–(3.33) обращаются в равенства для функции $f_0(\xi,\zeta)=\xi^m\zeta^n\in B_2^{(k,l)}(U^2)$, для которой имеют место равенства (3.26)–(3.30). Лемма 2 доказана.

Пусть $W_2^{(k,l)}(k,l\in\mathbb{N})$ — класс функций $f\in B_2^{(k,l)}(U^2)$, для которых $\big\|f^{(k,l)}\big\|_2\leq 1$.

Лемма 3. *Пусть числа $m,n,k,l\in\mathbb{N}$ удовлетворяют неравенствам $m\geq k\geq 1, n\geq l\geq 1$. Тогда справедливы равенства*

$$\sup\big\{\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2: f\in W_2^{(k,l)}\big\}=\frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}},\tag{3.34}$$

$$\sup\big\{\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\big(f^{(k,0)}\big)_2: f\in W_2^{(k,l)}\big\}=\frac{1}{\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}},\tag{3.35}$$

$$\sup\big\{\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\big(f^{(0,l)}\big)_2: f\in W_2^{(k,l)}\big\}=\frac{1}{\alpha_{m,k}}\sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}.\tag{3.36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для произвольной функции $f\in W_2^{(k,l)}$ имеет место неравенство

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-l-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2\leq\|f^{(k,l)}\|_2\leq 1.\tag{3.37}$$

Учитывая (3.37), из соотношений (3.31)–(3.33) получаем неравенства

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\leq\frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}},\tag{3.38}$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\big(f^{(k,0)}\big)_2\leq\frac{1}{\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}},\tag{3.39}$$

$$\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\big(f^{(0,l)}\big)_2\leq\frac{1}{\alpha_{m,k}}\sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}.\tag{3.40}$$

Неравенства (3.38)–(3.40) на множестве функций $W_2^{(k,l)}$ являются точными. Знак равенства в них достигается для функции

$$f_1(\xi,\zeta)=\frac{\xi^m\zeta^n}{\alpha_{m,k}\,t\alpha_{n,l}}\,2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)}, \tag{3.41}$$

очевидно, принадлежащей множеству $W_2^{(k,l)}$. Для этой функции

$$f_1^{(k,0)}(\xi,\zeta)=\frac{\xi^{m-k}\zeta^n}{\alpha_{n,l}}\,2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)},\quad f_1^{(0,l)}(\xi,\zeta)=\frac{\xi^m\zeta^{n-l}}{\alpha_{m,k}}\,2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)},$$

и, как следует из равенств (3.16)–(3.18),

$$\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f_1)_2=\frac{1}{\alpha_{m,k}\,\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}},$$

$$\mathscr{E}_{m-k-1,n-1}\big(f_1^{(k,0)}\big)_2=\frac{1}{\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}},\quad \mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\big(f_1^{(0,l)}\big)_2=\frac{1}{\alpha_{m,k}}\sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}.$$

Этим равенства (3.34)–(3.36) доказаны, и вместе с ним лемма 3 доказана.

Утверждение леммы 3 в сочетании с результатом теоремы 1 позволяет решать следующую экстремальную задачу: требуется найти величину

$$\sup\big\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2 : f\in W_2^{(k,l)}\big\}, \tag{3.42}$$

где $m>k\ge\mu\ge1, n>l\ge\nu\ge1$. Имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть $m,n,k,l,\mu,\nu\in\mathbb{N}$ удовлетворяют ограничениям $m>k\ge\mu\ge1$, $n>l\ge\nu\ge1$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup\big\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2 : f\in W_2^{(k,l)}\big\}$$
$$=\frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}}\,\frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}. \tag{3.43}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как для произвольной функции $f\in W_2^{(k,l)}$ имеют место оценки (3.37)–(3.39), то, пользуясь этими оценками, из неравенства (3.10) получаем

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2$$
$$\le\frac{\alpha_{m,k-\mu}\,\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(n-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(m+1)^{\mu/(2k)}\,(n+1)^{\nu/(2l)}}{(\alpha_{m,k})^{1-\mu/m}\,(\alpha_{n,l})^{1-\nu/l}\big[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\big]^{1/2}}$$
$$\times\big(\mathscr{E}_{m-1,n-1}(f)_2\big)^{\frac{\mu\nu}{kl}}\,\big(\mathscr{E}_{m-k-1,n-l}\big(f^{(k,0)}\big)_2\big)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}$$
$$\times\big(\mathscr{E}_{m-1,n-l-1}\big(f^{(0,l)}\big)_2\big)^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\,\big(\mathscr{E}_{m-\mu-1,n-\nu-1}\big(f^{(k,l)}\big)_2\big)^{(1-\frac{\mu}{k})(1-\frac{\nu}{l})}$$
$$\le\frac{\alpha_{m,k-\mu}\,\alpha_{n,l-\nu}(m-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(n-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(m+1)^{\mu/(2k)}\,(n+1)^{\nu/(2l)}}{(\alpha_{m,k})^{1-\mu/m}\,(\alpha_{n,l})^{1-\nu/l}\big[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\big]^{1/2}}$$
$$\times\left[\frac{1}{\alpha_{m,k}\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}}\right]^{\frac{\mu\nu}{kl}}\Big(\frac{1}{\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{n-l+1}{n+1}}\Big)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{l}}$$
$$\times\left[\frac{1}{\alpha_{m,k}}\sqrt{\frac{m-k+1}{m+1}}\right]^{\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}=\frac{\alpha_{m,k-\mu}\,\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{m,k}^{1-\frac{\mu}{k}+\frac{\mu\nu}{kl}+\frac{\mu}{k}(1-\frac{\nu}{l})}\,\alpha_{n,l}^{1-\frac{\nu}{l}+\frac{\mu\nu}{kl}+\frac{\nu}{l}(1-\frac{\mu}{k})}}$$

$$\times \frac{(m-k+1)^{(k-\mu)/(2k)}(n-l+1)^{(l-\nu)/(2l)}(m+1)^{\mu/(2k)}\,(n+1)^{\nu/(2l)}}{\big[(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)\big]^{1/2}}$$

$$\times \Big[\,\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m+1)(n+1)}\,\Big]^{\frac{\mu\nu}{2kl}}\Big(\frac{n-l+1}{n+1}\Big)^{(1-\frac{\mu}{k})\frac{\nu}{2l}}\Big(\frac{m-k+1}{m+1}\Big)^{\frac{\mu}{2k}(1-\frac{\nu}{l})}$$

$$=\frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}}\,\frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}. \tag{3.44}$$

и таким образом оценка сверху величины (3.42) получена.

Для получения оценки снизу рассмотрим ту же функцию (3.41), введенную нами в конце доказательства леммы 3. Для этой функции

$$f_1^{(k-\mu,l-\nu)}(\xi,\zeta)=\frac{\alpha_{m,k-\mu}\,\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{m,k}\,\alpha_{n,l}}\,\xi^{m-k+\mu}\zeta^{n-l+\nu}\,2\sqrt{(m-k+1)(n-l+1)}.$$

$$\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f_1^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2=\frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}}\,\frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}. \tag{3.45}$$

Учитывая равенство (3.45), получаем оценку снизу

$$\sup\Big\{\mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2 : f\in W_2^{(k,l)}\Big\}$$

$$\geq \mathscr{E}_{m-k+\mu-1,n-l+\nu-1}\big(f_1^{(k-\mu,l-\nu)}\big)_2=\frac{\alpha_{m,k-\mu}}{\alpha_{m,k}}\,\frac{\alpha_{n,l-\nu}}{\alpha_{n,l}}\sqrt{\frac{(m-k+1)(n-l+1)}{(m-k+\mu+1)(n-l+\nu+1)}}. \tag{3.46}$$

Требуемое равенство (3.43) получаем из сопоставления оценки сверху (3.44) и оценки снизу (3.46). Теорема 2 доказана.

Автор выражает искреннюю признательность рецензенту за ценные замечания, которые способствовали улучшению изложения материала статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неравенства для производных и их приложения / В. Ф. Бабенко, Н. П. Корнейчук, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов. Киев: Наукова думка, 2003, 590 с.
2. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 6. С. 89–124.
3. **Вакарчук С.Б.** О неравенствах типа Колмогорова для некоторых банаховых пространств аналитических функций. Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии // Сб. науч. работ / Ин-та математики АН УССР. Киев, 1988. С. 4–7.
4. **Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.** Неравенство типа Колмогорова в весовом пространстве Бергмана // Докл. АН РТ. 2007. Т. 50, № 1. С. 14–19.
5. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в круге функций // Віснік Дніпропетровского університету. Сер.: Математика. 2012. Т.17, № 6/1. С. 82–88.
6. **Саидусайнов М.С.** Точные неравенства типа Колмогорова для функций, принадлежащих весовому пространству Бергмана. Тр. Междунар. летней мат. шк.-конф. С. Б. Стечкина по теории функций. Душанбе, 2016. С. 217–223.
7. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** Неравенство типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 12. С. 1579–1601.
8. **Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б.** О неравенствах типа Колмогорова для аналитических в единичном бикруге функций // Віснік Дніпропетровского університету. Серия: Математика. 2013. Т.18, №6/1. С. 61–66.
9. **Брудный Ю.А.** Приближение функций n переменных квазимногочленами // Изв. АН СССР. Серия: Математика. 1970. Т.34, №3. С. 564–583.

10. **Потапов М.К.** О приближении “углом” // Proc. Conf. on Constructive Theory of Functions. Budapesht, 1972. С. 193–206.
11. **Шабозов М.Ш., Вакарчук С.Б.** О точных значениях квазипоперечников некоторых функциональных классов // Укр. мат. журн. 1996. Т. 48, № 3. С. 301–308.
12. **Шабозов М.Ш., Акобиршоев М.О.** Квазипоперечники некоторых классов дифференцируемых периодических функций двух переменных // Докл. РАН. 2005. Т. 404, № 4. С. 460–464.
13. **Смирнов В.И., Лебедев Н.А.** Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.; Л.: Наука, 1964, 440 с.
14. **Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е, Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
15. **Шабозов М.Ш., Саидусайнов М.С.** Верхние грани приближения некоторых классов функций комплексной переменной рядами Фурье в пространстве L_2 и значения n-поперечников // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 4. С. 617–631.

Поступила 03.07.2018
После доработки 19.10.2018
Принята к публикации 22.10.2018

Шабозов Мирганд Шабозович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Таджикский национальный университет,
г. Душанбе
e-mail: shabozov@mail.ru

Сайнаков Восиф Додхудоевич
старший преподаватель
Таджикский технологический университет,
г. Душанбе
e-mail: vosifvoiz@mail.ru

REFERENCES

1. Babenko V.F., Korneichuk N.P., Kofanov V.A. and Pichugov S.A. *Neravenstva dlya proizvodnykh i ikh prilozheniya* [Inequalities for derivatives and their applications]. Kiev: Naukova dumka, 2003, 590 p. ISBN: 966-00-0074-4 .
2. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russ. Math. Surv.*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001 .
3. Vakarchuk S.B. On inequalities of Kolmogorov type for some Banach spaces of analytic functions. *Nekotorye voprosy analiza i differentsial'noi topologii* [Some questions of analysis and differential topology], Collect. Sci. Works, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1988, pp. 4–7 (in Russian).
4. Shabozov M.Sh., Saidusainov M.S. Inequality of Kolmogorov type in the weighted Bergman space. *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan*, 2007, vol. 50, no. 1, pp. 14–19 (in Russian).
5. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On inequalities of Kolmogorov type for analytic functions in a disk. *Dnipr. Univ. Math. Bull.*, 2012, vol. 17, no. 6/1, pp. 82–88 (in Russian).
6. Saidusainov M.S. Exact inequalities of Kolmogorov type for functions belonging to the weighted Bergman space, *Proc. Internat. Summer Math. Stechkin School-Conf. on Function Theory, Tajikistan, Dushanbe, 15-25 August, 2016*, pp. 217–223 (in Russian). ISBN: 978-9-9975-9175-3.
7. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. Inequalities of Kolmogorov type for analytic functions of one and two complex variables and their application to approximation theory. *Ukr. Math. J.*, 2012, vol. 63, no. 12, pp. 1795–1819. doi: 10.1007/s11253-012-0615-3 .
8. Vakarchuk S.B., Vakarchuk M.B. On inequalities of Kolmogorov type for analytic functions in the unit bicircle. *Dnipr. Univ. Math. Bull.*, 2013, vol. 18, no. 6/1, pp. 61–66 (in Russian).
9. Brudnyi Yu.A. Approximation of functions of n variables by quasipolynomials. *Math. USSR-Izv.*, 1970, vol. 4, no. 3, pp. 568–586. doi: 10.1070/IM1970v004n03ABEH000922 .
10. Potapov M.K. On approximation by “angle”. *Proc. Conf. Constructive Theory of Functions*, Budapest, 1972, pp. 371–399 (in Russian).

11. Shabozov M.Sh., Vakarchuk S.B. On exact values of quasiwidths of some classes of functions. *Ukr. Math. J.*, 1996, vol. 48, no. 3, pp. 338–346. doi: 10.1007/BF02378524 .
12. Shabozov M.Sh., Akobirshoev M. Quasiwidths of some classes of differentiable periodic functions of two variables. *Dokl. Akad. Nauk*, 2005, vol. 404, no. 4, pp. 460–464 (in Russian).
13. Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Functions of a complex variable. Constructive theory.* London: Iliffe Books Ltd., 1968, 488 p. ISBN: 9780262190466 . Original Russian text published in Smirnov V.I., Lebedev N.A. *Konstruktivnaya teoriya funktsii kompleksnogo peremennogo.* Moscow; Leningrad: Nauka Publ., 1964, 440 p.
14. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. *Inequalities.* Cambridge: Cambridge University Press, 1934, 340 p. ISBN(2nd ed.): 0-521-05206-8 . Translated to Russian under the title *Neravenstva.* Moscow: Inostr. Lit. Publ., 1948, 456 p.
15. Shabozov M.Sh., Saidusaynov M.S. Upper bounds for the approximation of certain classes of functions of a complex variable by Fourier series in the space L_2 and n-widths. *Math. Notes*, 2018, vol. 103, no. 3-4, pp. 656–668. doi: 10.1134/S0001434618030343 .

Received July 3, 2018
Revised October 19, 2018
Accepted October 22, 2018

Mirgand Shabozovich Shabozov. Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Tajik National University, Dushanbe, 734025 Republic of Tajikistan, e-mail: shabozov@mail.ru

Vosif Dodkhudoevich Sainakov. Technological University of Tajikistan, Dushanbe, 734061 Republic of Tajikistan, e-mail: vosifvoiz@mail.ru