ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 24 № 4 2018

УДК 517.982.256

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ЧЕБЫШЁВСКОГО ПРОЕКТОРА В ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

И. Г. Царьков

Исследуется задача о структуре и устойчивости чебышёвских центров множества. Для непустого ограниченного множества M в метрическом пространстве (X,ϱ) величина $\operatorname{diam} M = \sup_{x,y\in M}\varrho(x,y)$ называется его диаметром, а величина $r_M := r(M) := \inf\{a\geqslant 0,\ x\in X \mid M\subset B(x,a)\}$ — чебышёвским радиусом. Точка $x_0\in X$, для которой выполнено включение $M\subset B(x_0,r(M),)$ называется чебышёвским центром. Понятие чебышёвского центра и связанные с ним задачи устойчивости, существования и единственности важны в различных областях математики. Изучается структура множества чебышёвских центров и устойчивость чебышёвского проектора. В пространстве $X=C(Q)$, где Q — нормальное топологическое пространство, дается структурное описание чебышёвского центра множеств, обладающих единственным чебышёвский центром. Под чебышёвским проектором мы понимаем отображение, сопоставляющее непустому ограниченному множеству множество всех его чебышёвских центров. Для непустого ограниченного множества M из пространства X и непустого множества $Y\subset X$ величина $r_Y(M)=\inf_{y\in Y} r(y,M)$ называется относительным чебышёвским радиусом, где $r(x,M):=\inf\{r\geqslant 0 \mid M\subset B(x,r)\}=\sup_{y\in M}\|x-y\|$. Множество относительных чебышёвских центров определяется как $\mathrm{Z}_Y(M):=\{y\in Y \mid r(y,M)=r_Y(M)\}$. Отображение $M\mapsto \mathrm{Z}_Y(M)$ называется относительным чебышёвским проектором (относительно множества Y). Изучается устойчивость относительного чебышёвского проектора в конечномерных полиэдральных пространствах. В частности, установлено, что в конечномерном полиэдральном пространстве проектор $\mathrm{Z}_Y(\,\cdot\,)$ является глобально липшицевым, если Y — произвольное подпространство.

Ключевые слова: чебышёвский центр, чебышёвский проектор, устойчивость.

I. G. Tsar'kov. Stability of the relative Chebyshev projection in polyhedral spaces.

The paper is concerned with structural and stability properties of the set of Chebyshev centers of a set. Given a nonempty bounded subset M of a metric space (X,ϱ), the quantity $\operatorname{diam} M = \sup_{x,y\in M}\varrho(x,y)$ is called the diameter of M, and $r_M := r(M) := \inf\{a\geqslant 0,\ x\in X \mid M\subset B(x,a)\}$, the Chebyshev radius of M. A point $x_0\in X$ for which $M\subset B(x_0,r(M))$ is called a Chebyshev center of M. The concept of a Chebyshev center and related stability, existence and uniqueness problems are important in various branches of mathematics. We study the structure of the set of Chebyshev centers and the stability of the Chebyshev projection (the Chebyshev center map). In the space $X=C(Q)$, where Q is a normal topological space, we describe the structure of the Chebyshev center of sets with a unique Chebyshev center. The Chebyshev projection is the mapping associating with a nonempty bounded set the set of all its Chebyshev centers. Given a nonempty bounded set M of a space X and a nonempty set $Y\subset X$, the relative Chebyshev radius is defined as $r_Y(M)=\inf_{y\in Y} r(y,M)$, where $r(x,M):=\inf\{r\geqslant 0 \mid M\subset B(x,r)\}=\sup_{y\in M}\|x-y\|$. The set of relative Chebyshev centers is defined as $\mathrm{Z}_Y(M):=\{y\in Y \mid r(y,M)=r_Y(M)\}$. The mapping $M\mapsto \mathrm{Z}_Y(M)$ is called the relative Chebyshev projection (with respect to the set Y). Stability properties of the relative Chebyshev projection in finite-dimensional polyhedral spaces are studied. In particular, in a finite-dimensional polyhedral space, the projection $\mathrm{Z}_Y(\,\cdot\,)$, where Y is a subspace, is shown to be globally Lipschitz continuous.

Keywords: Chebyshev center, Chebyshev projection, stability.

MSC: 41A65

DOI: 10.21538/0134-4889-2018-24-4-235-245

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00295) и при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-6222.2018.1).

Посвящается 75-летию профессора В. В. Арестова,
глубоко преданного науке ученого и Школе С. Б. Стечкина.

1. Введение

Пусть M — произвольное непустое ограниченное множество в метрическом пространстве (X,ϱ). Величина $\operatorname{diam} M=\sup\limits_{x,y\in M}\varrho(x,y)$ называется его *диаметром*, а величина

$$r_M:=r(M):=\inf\bigl\{a\geqslant 0,\ x\in X\mid M\subset B(x,a)\bigr\}$$

— *чебышёвским радиусом* множества M. Точка $x_0\in X$, для которой выполнено включение $M\subset B(x_0,r(M))$ называется *чебышёвским центром*.

Из определения следует, что чебышёвский центр ограниченного множества в нормированном пространстве — это центр шара "наименьшего" радиуса, содержащего это множество, т. е. элемент пространства, "наиболее хорошо аппроксимирующий" все множество. Радиус такого шара называют чебышёвским. Чебышёвские центры в литературе иногда называются *наилучшими одновременными аппроксимациями.*

Задачи о чебышёвских центрах и сетях имеют теоретическое и прикладное значение. В частности, задачи такого рода привели к понятию ε-энтропии, что в качестве одного из приложений позволило А. Н. Колмогорову и В. М. Тихомирову построить новое доказательство невозможности представления гладких функций суперпозициями функций меньшего числа переменных. Задачи устойчивости и единственности чебышёвского центра применяются в задачах селекции многозначных отображений, что позволяет получать результаты для дифференциальных включений и параметризации многозначных отображений. Эта тематика активно развивается в настоящее время (М. В. Балашов, Г. Е. Иванов [1], М. В. Балашов, Д. Реповш [2] и др.). Совсем свежее направление в этой тематике связано с рассмотрением метрики Плиша взамен хаусдорфовой. Основные приложения результатов о чебышёвских центрах и сетях связаны с задачами об аппроксимации фигур M сложной геометрии более удобными для работы с ними множествами (в случае чебышёвского центра — шаром радиуса $r(M)$, в случае наилучшей сети мощности n — набором шаров фиксированного радиуса покрытия). Такого рода аппроксимации являются классическими задачами вычислительной геометрии и интересны как с теоретической точки зрения, так и в связи с многочисленными приложениями в задачах сотовой [3] и космической связи [4], логистики [5], при построении множеств достижимости управляемых систем [6], а также в связи с вопросами оптимизации [7] и аппроксимации оптимальных упаковок [8].

Чебышёвский центр множества, вообще говоря, не единственен. Через $\mathrm{Z}(M)$ обозначим *множество всех чебышёвских центров*[2] *ограниченного непустого множества* M. Оператор (многозначный)

$$M\longmapsto \mathrm{Z}(M) \tag{1.1}$$

будем называть *чебышёвским проектором*[3].

Для непустого ограниченного множества M из пространства X и непустого множества $Y\subset X$ величина

$$r_Y(M)=\inf_{y\in Y}r(y,M)$$

называется *относительным чебышёвским радиусом*, где

$$r(x,M):=\inf\bigl\{r\geqslant 0\mid M\subset B(x,r)\bigr\}=\sup_{y\in M}\|x-y\|.$$

[2] Использование буквы "Z" традиционно: это первая буква немецкого слова "Zentrum", означающего "центр".

[3] В англ. — "the Chebyshev center map" или просто "the center map".

Множество *относительных чебышёвских центров* определяется как

$$\mathrm{Z}_Y(M) := \{y \in Y \mid r(y, M) = r_Y(M)\}. \tag{1.2}$$

Отображение $M \mapsto \mathrm{Z}_Y(M)$ будем называть *относительным чебышёвским проектором* (относительно множества Y).

Как следствие множество относительных чебышёвских центров $\mathrm{Z}_Y(M)$ состоит из точек из Y таких, что шары минимального радиуса с центрами в этих точках содержат множество M. В частном случае $Y = X$ мы получаем определение чебышёвского центра и чебышёвского радиуса. Если $M = \{y\}$, то $r(x, M) = \|x - y\|$, $r_Y(M) = \rho(y, Y)$ — расстояние от y до Y, а проектор $\mathrm{Z}_Y(M)$ совпадает с метрической проекцией точки y на Y.

2. Структура чебышёвских центров как промежутков

Здесь надо напомнить определение *сегмента* $[\![x, y]\!]$ и промежутка в линейном нормированном пространстве X (см. [9]):

$$\begin{aligned} [\![x, y]\!] &:= \bigl\{z \in X \mid \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leqslant \varphi(z) \leqslant \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \ \forall \varphi \in \operatorname{ext} S^*\bigr\} \\ &= \bigl\{z \mid \varphi(z) \in [\varphi(x), \varphi(y)]\bigr\}; \end{aligned} \tag{2.3}$$

здесь и далее $\operatorname{ext} S^*$ — множество экстремальных (крайних) точек единичной сферы S^* сопряженного пространства X^*.

На самом деле, если взять произвольное подмножество $\mathcal{A} \subset \operatorname{ext} S^*$ такое, что $\mathcal{A} \cup (-\mathcal{A}) = \operatorname{ext} S^*$, то

$$[\![x, y]\!] = \bigl\{z \in X \mid f(z) \in [f(x), f(y)] \ \ \forall f \in \mathcal{A}\bigr\}.$$

Например, для $X = C(Q)$ удобно в качестве $\mathcal{A}$ выбирать функционалы, сопоставляющие функции $\varphi \in C(Q)$ ее значение в точке $t \in Q$. В этом случае для любых $\varphi, \psi \in C(Q)$

$$[\![\varphi, \psi]\!] = \bigl\{g \in C(Q) \mid g(t) \in [\varphi(t), \psi(t)] \ \ \forall t \in Q\bigr\}.$$

С выбором множества $\mathcal{A} \subset \operatorname{ext} S^*$, $\mathcal{A} \cup (-\mathcal{A}) = \operatorname{ext} S^*$, можно связать линейное отображение $c : X \to c(X)$, сопоставляющее элементу $x \in X$ функцию $c(x) : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, принимающее значение $x(x^*) = x^*(x)$ на элементе $x^* \in \mathcal{A}$. Таким образом, $c(X)$ — пространство непрерывных функций на $\mathcal{A}$, являющееся сужением на $\mathcal{A}$ непрерывных линейных функционалов из X, действующих на X^*. На $c(X)$ мы рассматриваем равномерную норму, т. е.

$$\|c(x)\| = \sup_{x^* \in \mathcal{A}} |x(x^*)|.$$

Нетрудно видеть, что отображение $c : X \to c(X)$ является изометрией. Удобно отождествлять x и его образ $c(x)$, а также множество $E \subset X$ и его образ $c(E)$. Более того, шар $B(x, R)$ отождествляется с множеством $b(x, R) := c(B(x, R))$. Поскольку $B(x, R) := \{y \in X \mid |x^*(y - x)| \leqslant R$ для любого $x^* \in \operatorname{ext} S^*\}$, то

$$\begin{aligned} b(x, R) &= [\![x(x^*) - R,\, x(x^*) + R]\!] \\ &= \{y \in X \mid x(x^*) - R \leqslant y(x^*) \leqslant x(x^*) + R, \ \ x^* \in \operatorname{ext} S^*\} \\ &= \{y \in X \mid x(x^*) - R \leqslant y(x^*) \leqslant x(x^*) + R, \ \ x^* \in \mathcal{A}\} \\ &= \{c(y) \mid c(x) - R \leqslant c(y) \leqslant c(x) + R\}. \end{aligned}$$

Множество $\mathrm{m}(E) := \bigcap_{E \subset B(x,R)} B(x, R)$ (оболочка Банаха — Мазура множества E) мы отождествляем с множеством

$$\mathrm{m}(c(E)) = \bigcap_{c(E) \subset b(x,R)} b(x, R).$$

И, наконец, напомним, что множество $E \subset X$ называется *промежутком* (см. [9]), если

$$[\![x, y]\!] \subset E \quad \text{для всех } x, y \in E.$$

Любой замкнутый шар является замкнутым промежутком.

Напомним, что функция $f : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, где Q – некоторое топологическое пространство, называется *полунепрерывной снизу*, если для всех чисел c множество $\{x \in Q \mid f(x) > c\}$ открыто.

З а м е ч а н и е 1. А. А. Васильева [10; 11] показала, что подмножество $\Pi \subset C(Q)$, Q — хаусдорфов компакт, является замкнутым непустым промежутком, если и только если Π представимо в виде *обобщенного сегмента*

$$[\![f_1, f_2]\!] = \bigl\{f \in C(Q) \mid f(t) \in [f_1(t), f_2(t)] \quad \forall t \in Q\bigr\}, \tag{2.4}$$

где $f_1, f_2 : Q \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_1 \leqslant f_2$, f_1 полунепрерывна сверху на Q, а f_2 — снизу (в определении $[\![f_1, f_2]\!]$ функции f_1, f_2 необязательно лежат в $C(Q)$). По теореме Катетова — Тонга об отделимости полунепрерывных функций (см., например, [12]) множество $[\![f_1, f_2]\!]$ непусто в $C(Q)$. Отметим, что обобщенный сегмент $[\![f_1, f_2]\!]$ одноточечен тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$ (в этом случае f_1, f_2 — непрерывные функции). А. А. Васильева также показала, что метрическая проекция на замкнутый промежуток обладает непрерывной 1-липшицевой выборкой тогда и только тогда, когда этот промежуток является сегментом $[\![f_1, f_2]\!]$, где $f_1, f_2 \in C(Q)$. Ряд свойств обобщенных сегментов был также получен в работе [13].

Пусть $V \neq \varnothing$ и пусть $r := r_V(M)$ — относительный чебышёвский радиус множества M относительно V. Рассмотрим $x^* \in \mathcal{A}$ и положим

$$m^*(\,\cdot\,) = \sup_{y \in M} y(\,\cdot\,), \quad m_*(\,\cdot\,) = \inf_{y \in M} y(\,\cdot\,) \tag{2.5}$$

(здесь y рассматривается как $c(y)$, т. е. как функция на $\mathcal{A}$; функции $m^*(\,\cdot\,)$ и $m_*(\,\cdot\,)$, соответственно, полунепрерывны снизу и сверху). Таким образом, $\Pi := [\![m^* - r,\ m_* + r]\!]$ — обобщенный сегмент.

Определим полосу

$$\Pi_{x^*} := \bigl\{x \in X \mid m^*(x^*) - r \leqslant x(x^*) \leqslant m_*(x^*) + r\bigr\}.$$

Нетрудно видеть, что Π_{x^*} состоит из тех и только тех точек $x \in X$, для которых

$$M \subset \bigl\{u \in X \mid |x^*(u - x)| \leqslant r\bigr\} =: \Pi_{x^*}(x).$$

Пусть $v \in X$. Поскольку $\bigcap_{x^* \in \mathcal{A}} \Pi_{x^*}(x) = B(x, r)$, то следующие условия эквивалентны:

a) $v \in \mathrm{Z}_V(M)$;

b) $v \in V \cap \Pi_{x^*}$ для любого $x^* \in \mathcal{A}$;

c) $v \in V \cap \Pi$, где $\Pi = \Pi_r := \bigcap_{x^* \in \mathcal{A}} \Pi_{x^*}$.

Таким образом,

$$\mathrm{Z}_V(M) = V \cap \Pi. \tag{2.6}$$

Из (2.6) вытекает, что *множество* $\mathrm{Z}_V(M)$ *относительных чебышёвских центров выпукло для выпуклого* $V \subset X$. Также ясно, что $\operatorname{diam} M,\ \operatorname{diam} \Pi \leqslant 2\,r$.

Далее мы рассмотрим частный случай нашей задачи, а именно случай чебышевских центров. Отметим, что множество всех чебышёвских центров ограниченного множества $\varnothing \neq M \subset X$ образует замкнутый промежуток

$$\Pi := \bigl\{x \in X \mid m^*(\,\cdot\,) - r \leqslant x(\,\cdot\,) \leqslant m_*(\,\cdot\,) + r\bigr\}, \tag{2.7}$$

где $r = r(M)$ — чебышёвский радиус.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения

$$\overline{N}(\,\cdot\,) := \inf_{\substack{x\in X\\ m^*-r\leqslant x}} x(\,\cdot\,), \quad \overline{n}(\,\cdot\,) := \sup_{\substack{x\in X\\ x\leqslant m_*+r}} x(\,\cdot\,). \tag{2.8}$$

Отметим, что эти функции полунепрерывны сверху и снизу соответственно. Из определения имеем $m^*(\,\cdot\,) - r \leqslant \overline{N}(\,\cdot\,)$, $\overline{n}(\,\cdot\,) \leqslant m_*(\,\cdot\,) + r$. Отсюда и из (2.7) и (2.8) вытекает равенство обобщенных сегментов (ср. с (2.4))

$$\Pi = [\![m^*(\,\cdot\,) - r,\, m_*(\,\cdot\,) + r]\!] = [\![\overline{N}(\,\cdot\,),\ \overline{n}(\,\cdot\,)]\!].$$

В случае, когда X является банаховым пространством, для которого $c(X)$ содержит константы (например, $X = C(Q)$), то, заменяя в (2.8) x на $y - r$ и x на $y + r$, имеем

$$\overline{N}(\,\cdot\,) = N(\,\cdot\,) - r, \quad \overline{n}(\,\cdot\,) = n(\,\cdot\,) + r,$$

где

$$N(\,\cdot\,) = \inf\bigl\{y(\,\cdot\,) \mid m^*(\,\cdot\,) \leqslant y(\,\cdot\,)\bigr\},$$

$$n\,(\,\cdot\,) = \sup\bigl\{y(\,\cdot\,) \mid m_*(\,\cdot\,) \geqslant y(\,\cdot\,)\bigr\}.$$

Поэтому, если X таково, что $c(X)$ содержит константы, то

$$\Pi = [\![N(\,\cdot\,) - r,\, n(\,\cdot\,) + r]\!]. \tag{2.9}$$

Пусть $\mathfrak{B}$ — множество брусов вида $\Pi = (x^*)^{-1}[a,b]$ $(-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty)$.

Отметим, что оболочка

$$\mathrm{br}(M) := \bigcap\bigl\{\Pi \in \mathfrak{B} \mid \Pi \supset M\bigr\}$$

совпадает с обобщенным сегментом $[\![m_*(\,\cdot\,),\, m^*(\,\cdot\,)]\!]$.

Отметим также, что в пространстве $C(Q)$

$$\mathrm{br}(M) := \bigcap\bigl\{\Pi \mid \Pi \supset M,\ \ \Pi \text{ — замкнутый промежуток}\bigr\}$$

Напомним, что оболочка $b(x,R)$ совпадает с обобщенным сегментом $[\![x(\,\cdot\,) - R,\, x(\,\cdot\,) + R]\!]$ и, кроме того,

$$\mathrm{m}(M) = \mathrm{m}(\mathrm{br}(M)) = \bigcap_{\mathrm{br}(M)\subset b(x,R)} b(x,R).$$

Поэтому для всех $x \in X$ и R таких, что $\mathrm{br}(M) \subset b(x,R)$, верны неравенства

$$m^*(\,\cdot\,) \leqslant x(\,\cdot\,) + R, \quad m_*(\,\cdot\,) \geqslant x(\,\cdot\,) - R,$$

и если X — банахово пространство такое, что $c(X)$ содержит константы, то

$$[\![n(\,\cdot\,),\, N(\,\cdot\,)]\!] \subset b(x,R) \quad \text{при условии, что} \quad \mathrm{br}(M) \subset b(x,R).$$

Поэтому

$$[\![n(\,\cdot\,),\, N(\,\cdot\,)]\!] \subset \mathrm{m}(\mathrm{br}(M)) = \mathrm{m}(M).$$

Пусть Q — топологическое пространство. *Пространством* $C(Q)$ мы будем называть пространство непрерывных ограниченных функций на Q с равномерной нормой $\|f\| = \sup_{t\in Q}|f(t)|$. Топологическое пространство Q называется *нормальным*, если одноточечные множества замкнуты и любые два непересекающихся замкнутых множества отделимы окрестностями (т. е. содержатся в непересекающихся открытых множествах).

Теорема 1. *Пусть $X = C(Q)$, Q — нормальное топологическое пространство, M — непустое ограниченное подмножество X, имеющее единственный чебышевский центр z. Тогда*

$$\mathrm{m}(M) = B(z,r),$$

где z — чебышёвский центр множества M. При этом

$$z = \frac{1}{2}\big(N(\,\cdot\,) + n(\,\cdot\,)\big).$$

Доказательство. Пусть $r = r(M)$. Имеем $\{z\} = [\![N(\,\cdot\,) - r,\, n(\,\cdot\,) + r]\!]$. Следовательно, в силу замечания 1

$$z = \frac{1}{2}\left(N(\,\cdot\,) - r + n(\,\cdot\,) + r\right) = N(\,\cdot\,) - r = n(\,\cdot\,) + r.$$

Так как функция $N(\,\cdot\,)$ полунепрерывна сверху, а $n(\,\cdot\,)$ — снизу, то из равенства $N(\,\cdot\,) = n(\,\cdot\,) + 2r$ вытекает, что $N(\,\cdot\,)$ и $n(\,\cdot\,)$ — непрерывные функции. Поэтому $[\![n(\,\cdot\,),\, N(\,\cdot\,)]\!]$ — сегмент, являющийся шаром $B(z,r)$. Следовательно,

$$B(z,r) = [\![n(\,\cdot\,), N(\,\cdot\,)]\!] \subset \mathrm{m}(M) \subset B(z,r).$$

Теорема доказана. □

3. Устойчивость относительного чебышёвского проектора в конечномерных полиэдральных пространствах

Через ℓ_n^∞ обозначим пространство n-мерных действительных векторов с равномерной нормой. Пусть V — подпространство в ℓ_n^∞. Набор $\mathcal{L} := \{L_i\}_{i=1}^m$ координатных ненулевых подпространств $L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_m$ назовем *допустимым* для V, если набор строго убывающих подпространств $\{V_l\}_{=1}^m$, задаваемый рекуррентной формулой $V_1 := V \subset L_1$, $V_{l+1} = V_l \cap L_{l+1}$ ($l = 1, \ldots, m-1$), обладает тем свойством, что L_l содержится в координатном подпространстве минимальной размерности, содержащем V_{l-1} ($l = 2, \ldots, m$).

Для каждого индекса $i = 1, \ldots, m$ через $\mathcal{A}_i$ обозначим множество всех векторов $e \in V_i$ таких, что $\rho(e, L_{i+1}) > 0$. Положим

$$\beta_i(\mathcal{L}) := \sup_{e \in \mathcal{A}_i} \rho(e, V_{i+1})/\rho(e, L_{i+1}), \qquad \beta(\mathcal{L}, V) := \max_{i=1,\ldots,m-1} \beta_i(\mathcal{L}).$$

Далее, пусть $\alpha(V) := \sup_{\mathcal{L}} \beta(\mathcal{L}, V)$, где супремум берется по всем допустимым наборам $\mathcal{L}$ для V. Отметим, что для всякой изометрии τ, представляющей собой перестановку координат векторов в ℓ_n^∞, выполняется равенство $\alpha(\tau(V)) = \alpha(V)$.

В следующем утверждении будем считать, что пространство V не содержит ненулевых координатных подпространств.

Лемма. *Пусть $\Pi := \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $V \cap \Pi \neq \varnothing$ и пусть $y \in V$, $\rho(y, \Pi) \leqslant \delta$. Тогда существует точка $z \in V \cap \Pi$ такая, что*

$$\|y - z\| \leqslant (\alpha + 1)^n \delta, \quad \text{где} \quad \alpha = \alpha(V).$$

Доказательство. Пусть L_1 — минимальное координатное подпространство в ℓ_n^∞, содержащее $V_1 := V$, $\dim L_1 = n_1$. Положим $\Pi_1 = \Pi \cap L_1$. Перенумеровав при необходимости координаты векторов, будем считать, что $\Pi_1 = \prod_{i=1}^{n_1} [a_i, b_i]$. Осуществляя при необходимости параллельный перенос, считаем, что $0 \in \Pi_1 \cap V_1$. Пусть $y_1 := y$. Тогда $\delta_1 := \rho(y_1, \Pi_1) \leqslant \delta$.

Шаг индукции. Пусть на k-м шаге построено координатное подпространство L_k, подпространство $V_k \subset L_k$, где L_k — координатное подпространство минимальной размерности n_k, содержащее V_k, $\Pi_k = \prod_{i=1}^{n_k}[a_i, b_i]$, $0 \in \Pi_k \cap V_k$, $\delta_k := \rho(y_k, \Pi_k) \leqslant (\alpha+1)^{k-1}\delta$. Существует координатная гиперплоскость π_k в пространстве L_l, проходящая через некоторую грань Π_k (которая пересекается с отрезком $[0, y_k]$) и разделяющая точку y_k и параллелепипед Π_k. Ясно, что π_k есть сдвиг некоторой координатной гиперплоскости. При этом $\rho(y_k, \pi_k) \leqslant \delta_k$. Положим $V_{k+1} = V_k \cap \pi_k$. Существует точка $y_{k+1} \in V_{k+1}$ такая, что $\|y_{k+1} - y_k\| \leqslant \alpha\delta_k$. Тогда

$$\rho(y_{k+1}, \Pi_k) \leqslant \|y_{k+1} - y_k\| + \rho(y_k, \Pi_k) \leqslant (\alpha+1)\delta_k \leqslant (\alpha+1)^k\delta.$$

Осуществляя при необходимости параллельный перенос, будем считать, что $0 \in \Pi_k \cap V_{k+1}$. Через L_{k+1} обозначим координатное подпространство в L_{k+1} минимальной размерности n_{k+1}, содержащее V_{k+1}. Делая при необходимости перестановку координат, будем считать для продолжения индукционного процесса, что $\Pi_{k+1} = \Pi_k \cap L_{k+1} = \prod_{i=1}^{n_{k+1}}[a_i, b_i]$. Индукция останавливается на шаге $k = m$, если $n_{k+1} = 0$. По построению $z = y_m \in V \cap \Pi$ и

$$\|y - z\| \leqslant \sum_{k<n}(1+\alpha)^k\delta < (1+\alpha)^n\delta.$$

Лемма доказана. $\square$

Отметим, что если не задаваться целью выписать константу K в неравенстве $\|y - z\| \leqslant K\delta$ (из предыдущей леммы) в зависимости от геометрической характеристики $\alpha(V)$, то, как показал А. В. Маринов, это неравенство можно легко получить из теоремы Хоффмана (см. [14, с. 176]).

Для произвольных множеств M и N в произвольном метрическом пространстве (X, ρ) через $d(M, N) := \sup_{x\in M}\rho(x, N)$ обозначим уклонение множества M от множества N. Через $h(M, N)$ обозначим хаусдорфово расстояние между M и N, т. е. величину

$$\max\{d(M, N), d(N, M)\}.$$

Теорема 2. *Пусть $(\mathcal{M}, \theta)$ — полуметрическое пространство,* $\Pi(t) := \prod_{i=1}^{n}[a_i(t), b_i(t)]$, *$t \in \mathcal{M}$, — такое семейство параллелепипедов в ℓ_n^∞, что для некоторого числа $c > 0$*

$$|a_i(t) - a_i(t_0)|,\ |b_i(t) - b_i(t_0)| \leqslant c\,\theta(t, t_0), \quad i = 1, \dots, n,$$

для всех $t, t_0 \in \mathcal{M}$. Предположим также, что для некоторого подпространства $V \subset \ell_n^\infty$ множество

$$\Phi(t) := \Pi(t) \cap V$$

непусто для всех $t \in \mathcal{M}$. Тогда отображение Φ является K-липшицевым на $\mathcal{M}$ (относительно хаусдорфовой метрики) для некоторой константы $K = K(V) > 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что случаи $\dim V = 0$ и $\dim V = n$ тривиальны. Случай, когда V содержит ненулевое координатное подпространство сведем к случаю подпространства V_0 меньшей размерности, не содержащего ненулевых координатных подпространств. Действительно, пусть L — координатное подпространство максимальной размерности, содержащееся в V. Пусть $V_0 := V \cap L^\perp$, где $L^\perp$ — ортогональное дополнение к L (оно является координатным в ℓ_n^∞). Параллелепипед $\Pi(t)$ представляется в виде $\Pi_0(t) \times \Pi_1(t)$, где $\Pi_0(t)$ (соответственно $\Pi_1(t)$) — ортогональная проекция $\Pi(t)$ на $L^\perp$ (на L) параллельно L (параллельно $L^\perp$). В этом случае доказательство липшицевости отображения $\Phi(t) := \Pi(t) \cap V = (\Pi_0(t) \cap V_0) \times \Pi_1(t)$ сводится к доказательству липшицевости отображения $\Phi_0(t) := \Pi_0(t) \cap V_0$, при этом V_0 уже не содержит ненулевых координатных подпространств и $\Phi_0(t) \neq \varnothing$ для всех $t \in \mathcal{M}$.

Итак, доказательство теоремы сводится к изучению случая подпространств V, не содержащих ненулевых координатных подпространств. По условию теоремы для любых $t, t_0 \in \mathcal{M}$ и $a_i = a_i(t)$, $b_i = b_i(t)$, $a_i^0 = a_i(t_0)$, $b_i^0 = b_i(t_0)$ верны неравенства

$$|a_i - a_i^0|,\ |b_i - b_i^0| \leqslant c\,\theta(t, t_0) =: \delta.$$

По лемме для любой точки $y \in \Pi(t_0) \cap V$ существует точка $z \in \Pi(t) \cap V$ такая, что $\|z-y\| \leqslant (\alpha(V)+1)^n\delta$. Отсюда

$$d(\Phi(t_0), \Phi(t)) \leqslant c(\alpha(V)+1)^n\, \theta(t, t_0).$$

Аналогично показывается, что

$$d(\Phi(t), \Phi(t_0)) \leqslant c(\alpha(V)+1)^n\, \theta(t, t_0).$$

Теорема 2 доказана. □

Выбирая в качестве $(\mathcal{M}, \theta)$ полуметрическое пространство всех непустых ограниченных подмножеств пространства ℓ^∞_n, снабженное хаусдорфовой полуметрикой, и полагая

$$a_i(N) = \inf_{z \in N} z^{(i)} + r, \quad b_i(N) = \sup_{z \in N} z^{(i)} - r,$$

где $r := r_V(N)$, V — подпространство в ℓ^∞_n, мы получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть V — подпространство в ℓ^∞_n. Тогда существует число $c = c(V) > 0$ такое, что*

$$h(\mathrm{Z}_V(M), \mathrm{Z}_V(N)) \leqslant c\, h(M, N)$$

для любых непустых ограниченных подмножеств $M, N \subset \ell^\infty_n$.

Следствие 1. *Пусть V — подпространство в ℓ^∞_n. Тогда существует липшицева выборка из чебышёвского проектора $\mathrm{Z}_V(\,\cdot\,)$.*

Доказательство. Каждому ограниченному подмножеству $M \subset V$ сопоставим его центр Штейнера $\varphi(M)$ (см. определение в [15]). Это отображение является липшицевым на множестве непустых ограниченных подмножеств из V, снабженных хаусдорфовой полуметрикой (см. теорему 2.1.3 в [15]). Нетрудно убедиться, что $\varphi \circ \mathrm{Z}_V$ является искомой липшицевой выборкой. □

Пусть X_n — n-мерное банахово пространство с полиэдральной нормой (т. е. единичный шар пространства X_n является выпуклой комбинацией конечного числа точек из X_n). Такие пространства будем называть *полиэдральными конечномерными пространствами.*

Из следствия 1 вытекает результат Ю. Ю. Дружинина (см. [16]) о существовании липшицевой выборки из чебышёвского проектора в конечномерном симметричном полиэдральном пространстве, поскольку любое такое пространство изометрично вкладывается в ℓ^∞_n для достаточно больших n.

Из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Следствие 2. *В конечномерном полиэдральном пространстве метрическая проекция на подпространство глобально липшицева.*

Замечание 2. Отметим в связи со следствием 2 ранее полученные результаты. В пространстве ℓ^∞_n метрическая проекция на чебышёвское подпространство глобально липшицева на всем пространстве (А. К. Клайн [17, теорема 4], В. И. Бердышев [18, теорема 2], а также М. Бартелт [19] и М. Финцель [20, § 5]). Указанный результат также является следствием теоремы 3.

Множество $V \subset X_n$ называется полиэдральным множеством, если V — пересечение конечного числа замкнутых полупространств в X_n.

Известно, что в полиэдральном симметричном пространстве X_n метрическая проекция на полиэдральное множество глобально липшицева (В. Ли [21]) и обладает липшицевой выборкой (М. Финцель и В. Ли [22, теорема 6.1]).

З а м е ч а н и е 3. Следующий результат обобщает приведенные выше результаты М. Финцель и В. Ли.

Пусть V — непустое полиэдральное подмножество конечномерного полиэдрального банахова пространства X. Тогда относительный чебышёвский проектор

$$M \mapsto \mathrm{Z}_V(M), \quad \varnothing \neq M \subset X$$

глобально липшицев на X и обладает липшицевой выборкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Балашов М.В., Иванов Г.Е.** Липшицевы параметризации многозначных отображений со слабо выпуклыми значениями // Изв. РАН. Сер. математическая. 2007. Т. 71, вып. 6. С. 47–68. doi: 10.4213/im941 .
2. **Balashov M.V., Repovš D.** On Pliś metric on the space of strictly convex compacta // J. Convex Anal. 2012. Vol. 19, no. 1. P. 171–183.
3. **Зикратова И.А., Шаго Ф.Н., Гуртов А.В., Иванинская И.И.** Оптимизация зоны покрытия сети сотовой связи на основе математического программирования // Науч.-техн. вестник информ. технологий, механики и оптики. 2015. Т. 15, вып. 2. С. 313–321.
4. **Гениатулин К.А. Носов В.И.** Применение метода координационных колец при частотно-территориальном планировании системы спутниковой связи с зональным обслуживанием // Вестн. СибГУТИ. 2014. Вып. 1. С. 35–45.
5. **Бычков И.В., Казаков А.Л., Лемперт А.А., Бухаров Д.С., Столбов А.Б.** Интеллектная система управления развитием транспортно-логистической инфраструктурой региона // Проблемы управления. 2014. Вып. 1. С. 27–35.
6. **Гусейнов Х.Г., Моисеев А.Н., Ушаков В.Н.** Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, вып. 2. С. 179–187.
7. **Иванов В.В.** Об оптимальных по точности алгоритмах приближенного решения операторных уравнений I рода // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1975. Т. 15, вып. 1. С. 3–11.
8. **Ушаков В.Н., Лебедев П.Д., Лавров Н.Г.** Алгоритмы построения оптимальных упаковок в эллипсы // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2017. Т. 10, вып. 3. С. 67–79. doi: 10.14529/mmp170306 .
9. **Алимов А.Р., Царьков И.Г.** Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, вып. 1 (427). С. 3–81.
10. **Васильева А.А.** Замкнутые промежутки в $C(T)$ и $L_\varphi(T)$ и их аппроксимативные свойства в нормированных пространствах // Мат. заметки. 2003. Т. 73, вып. 1, С. 135–138. doi: 10.4213/im496 .
11. **Васильева А.А.** Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. математическая. 2004. Т. 68, вып. 4. С. 75–116. doi: 10.4213/im496 .
12. **García-Ferreira S., Ortiz-Castillo Y.F., Yamauchi T.** Insertion theorems for maps to linearly ordered topological spaces // Topol. Appl. 2015. Vol. 188. P. 74–81. doi: 10.1016/j.topol.2015.03.011 .
13. **Franchetti C., Cheney E.W.** The embedding of proximinal sets // J. Approx. Theory 1986. Vol. 4. P. 213–225. doi: 10.1016/0021-9045(86)90006-7 .
14. **Левитин Е.С.** Теория возмущений в математическом программировании и ее приложения. М. : Наука, 1992. 359 с.
15. **Половинкин Е.С.,Балашов М.В.** Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с.
16. **Дружинин Ю.Ю.** О существовании липшицевой выборки из чебышёвских центров // Мат. сб. 2013. Vol. 204, № 5. P. 25–44. doi: 10.4213/sm8127 .
17. **Cline A.K.** Lipschitz conditions on uniform approximation operators // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 8, no. 2. P. 160–172. doi: 10.1016/0021-9045(73)90025-7 .
18. **Бердышев В.И.** Метрическая проекция на конечномерные подпространства из C и L // Мат. заметки. 1975. Т. 18, вып. 4. С. 473–488. doi: 10.1007/BF01153037 .
19. **Bartelt M.** On Lipschitz conditions, strong unicity and a theorem of A. K. Cline // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 76, no. 3. P. 245–250. doi: 10.1016/0021-9045(75)90072-6 .
20. **Finzel M.** Linear-approximation in ℓ_n^∞ // J. Approx. Theory. 1994 Vol. 76, no. 3. P. 326–350. doi: 10.1006/jath.1994.1021 .

21. **Li W.** Hoffman's theorem and metric projections in polyhedral spaces // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 75, no. 1. P. 107–111. doi: 10.1006/jath.1993.1090 .
22. **Finzel M., Li W.** Piecewise affine selections for piecewise polyhedral multifunctions and metric projections // J. Conv. Anal. 2000. Vol. 7, no. 1. P. 97–94.

Поступила 11.09.2018
После доработки 14.11.2018
Принята к публикации 19.11.2018

Царьков Игорь Германович
д-р физ.-мат. наук, профессор
механико-математический факультет
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова,
г. Москва
e-mail: igtsarkov@yandex.ru

REFERENCES

1. Ivanov G.E., Balashov M.V. Lipschitz continuous parametrizations of set-valued maps with weakly convex images. *Izv. Math.*, 2007, vol. 71, no. 6, pp. 1123–1143. doi: 10.1070/IM2007v071n06ABEH002384 .
2. Balashov M.V., Repovš D. On Pliś metric on the space of strictly convex compacta. *J. Convex Anal.*, 2012, vol. 19, no. 1, pp. 171–183.
3. Zikratov I.A., Shago F.N., Gurtov A.V., Ivaninskaya I.I. Optimization of the coverage zone for a cellular network based on mathematical programming. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2015, vol. 15, no. 2, pp. 313–321 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2015-15-2-322-328 .
4. Geniatulin K., Nosov V. Using of coordinating rings method in frequency-spatial planning of mobile satellite communication system with zonal maintenance. *Vestnik SibGUTI*, 2014, no. 1, pp. 35–45.
5. Bychkov I.V., Kazakov A.L., Lempert A.A., Bukharov D.S., Stolbov A.B. The intelligent management system of development of regional transport-logistic infrastructure. *Autom. Remote Control*, 2016, vol. 77, no. 2, pp. 332–343. doi: 10.1134/S0005117916020090 .
6. Guseinov Kh.G., Moiseev A.N., Ushakov V.N. On the approximation of reachable domains of control systems. *J. Appl. Math. Mech.*, 1998, vol. 62, no. 2, pp. 169–175.
7. Ivanov V.V. Algorithms of optimal accuracy for the approximate solution of operator equations of the first kind. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1975, vol. 15, no. 1, pp. 1–9. doi: 10.1016/0041-5553(75)90129-9 .
8. Ushakov V.N., Lebedev P.D., Lavrov N.G. Algorithms of optimal packing construction in ellipse. *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, 2017, vol. 10, no. 3, pp. 67–79 (in Russian). doi: 10.14529/mmp170306 .
9. Alimov A.R., Tsar'kov I.G. Connectedness and solarity in problems of best and near-best approximation. *Russian Math. Surveys*, 2016, vol. 71, no. 1, pp. 1–77. doi: 10.1070/RM9698 .
10. Vasil'eva A.A. Closed spans in $C(T)$ and $L_\varphi(T)$ and their approximative properties. *Math. Notes*, 2003, vol. 73, no. 1, pp. 125–128. doi: 10.1023/A:1022134303534 .
11. Vasil'eva A.A. Closed spans in vector-valued function spaces and their approximative properties. *Izv. Math.*, 2004, vol. 68, no. 4, pp. 709–747. doi: 10.1070/IM2004v068n04ABEH000496 .
12. García-Ferreira S., Ortiz-Castillo Y.F., Yamauchi T. Insertion theorems for maps to linearly ordered topological spaces. *Topol. Appl.*, 2015, vol. 188, pp. 74–81. doi: 10.1016/j.topol.2015.03.011 .
13. Franchetti C., Cheney E.W. The embedding of proximinal sets. *J. Approx. Theory*, 1986, vol. 4, pp. 213–225. doi: 10.1016/0021-9045(86)90006-7 .
14. Levitin E.S. *Perturbation theory in mathematical programming and its application.* Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization (book 38), 1st Edition, N Y: Wiley, 1994. 402 p. ISBN-10: 0471939358 . Original Russian text published in Levitin E.S., Teoriya vozmushchenii v matematicheskom programmirovanii i ee prilozheniya, Moscow, Nauka Publ., 1992, 359 p.
15. Polovinkin E.S., Balashov M.V. *Elementy vypuklogo i sil'no vypuklogo analiza* [Elements of convex and strongly convex analysis]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2004, 416 p. ISBN: 5-9221-0499-3 .

16. Druzhinin Yu.Yu. Existence of a Lipschitz selection of the Chebyshev-centre map. *Sb. Math.*, 2013, vol. 204, no. 5, pp. 641–660. doi: 10.1070/SM2013v204n05ABEH004315 .
17. Cline A.K. Lipschitz conditions on uniform approximation operators. *J. Approx. Theory*, 1973, vol. 8, no. 2, pp. 160–172. doi: 10.1016/0021-9045(73)90025-7 .
18. Berdyshev V.I. Metric projection onto finite-dimensional subspaces of C and L. *Math. Notes*, 1975, vol. 18, no. 4, pp. 871–879. doi: 10.1007/BF01153037 .
19. Bartelt M. On Lipschitz conditions, strong unicity and a theorem of A.K. Cline. *J. Approx. Theory*, 1975, vol. 14, no. 4, pp. 245–250. doi: 10.1016/0021-9045(75)90072-6 .
20. Finzel M. Linear-approximation in ℓ_n^∞. *J. Approx. Theory*, 1994, vol. 76, no. 3, pp. 326–350. doi: 10.1006/jath.1994.1021 .
21. Li W. Hoffman's theorem and metric projections in polyhedral spaces. *J. Approx. Theory*, 1993, vol. 75, no. 1, pp. 107–111. doi: 10.1006/jath.1993.1090 .
22. Finzel M., Li W. Piecewise affine selections for piecewise polyhedral multifunctions and metric projections. *J. Conv. Anal.*, 2000, vol. 7, no. 1, pp. 73–94.

Received September 11, 2018
Revised November 14, 2018
Accepted November 19, 2018

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-01-00295) and by the RF President's Grant for State Support of Leading Scientific Schools (project no. NSh-6222.2018.1).

Igor' Germanovich Tsar'kov, Dr. Phys.-Math. Sci., Prof., Department of Mechanics and Mathematics Moscow State University, Moscow, 119991 Russia, e-mail: igtsarkov@yandex.ru .